Math. un 80 (IV, 2

Matthesii. Systemata & methodi.

128.

Math. un. 80-4,2

<36621328450015

Bayer. Staatsbibliothek

Anfangsgründe
der
Hydrodynamik
welche
von der Bewegung des Wassers
besonders
die praktischen Lehren
enthalten.

Von
Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathem. Anfangsgr. IVter Theil; 2te Abtheil.

Zweyte vermehrte Auflage.
Mit fünf Kupfertafeln.

Göttingen
bey Vandenhoek und Ruprecht.
1797.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Solche Beschäfftigungen, die zur praktischen Mathematik gehören, darunter ich hier meiner jetzigen Absicht gemäß nur das Maschinenwesen nennen will, werden von einigen, ganz ohne theoretische Einsichten getrieben: Von diesen ist gewöhnlichermaassen nichts weiter zu erwarten, als was man von dem gemeinsten Handwerker erwartet, dasjenige mittelmässig zu machen, was er durch vieljährige Uebung zu machen gelernt hat, aber ob es besser gemacht werden könnte, zu beurtheilen, Veränderungen zu ersinnen, oder wenn sie angegeben werden, auch nur auszuführen, dazu sind sie ungeschickt, wenigstens verdrossen.

Solche die nicht blos mit der Hand arbeiten, machen sich oft eine Art von Theorie, die auf das, womit sie am meisten zu thun haben, eingeschränkt, nicht ganz rich-

tig ist, und durch solche Unvollkommenheiten zeigt, wie vortheilhaft ihnen ein ordentlicher Unterricht gewesen wäre.

Wer mit dieser Gemüthsbeschaffenheit sich mathematischen Ausübungen widmet, der wird den ordentlichen Unterricht wohl nicht verabsäumen, wenn er nur von der Wichtigkeit desselben überführt ist. Hiezu deucht mich gehört ein solcher Vortrag, dabey sich die Anwendung der Lehren sobald als möglich zeigen lässt, bliebe hiebey auch selbst, in den Beweisen der Sätze, in ihren genauen Bestimmungen, noch einiges zu ergänzen im Anfange übrig, so wird jemand, der den Nutzen der Sätze erkennt, darüber nachzudenken gereizt, da er sonst dieses, und mehr dazu, mit der Kaltsinnigkeit vorbeygelassen hätte, die man meistens gegen blosse Wahrheiten hat.

Hiedurch wird sich die Ordnung gegenwärtigen Buches rechtfertigen.

Sehr viel Lehren der angewandten Mathematik lassen sich ohne Algebra und Analysis des Unendlichen nicht finden, oder nicht bequem zum Nutzen anwenden, die Lehren selbst, trägt man doch ihrer Wichtigkeit wegen, auch denen vor, die ihre Erfindung oder Anwendung zu verstehen nicht

im Stande sind. Von dieser Art ist, was in folgendem Werke den Anfang macht: der Druck stehendes Wassers auf eine Fläche von gegebener Lage und Grösse.

Die eigentliche Abhandlung von der Bewegung des Wassers habe ich von Erfahrungen angefangen. Sie waren, wie bey aller Kenntniß der Natur, das erste, woraus man etwas von diesem Gegenstande lernte, sie sind Muster, wie man Versuche anstellen und daraus nützliche Kenntnisse herleiten soll, auch erfodern die vornehmsten unter ihnen mehr Anstalten und Vorsichtigkeit, als daß sie in den gewöhnlichen Experimentalcollegiis jährlich könnten wiederhohlt werden, daher war eine umständliche Erzählung von ihnen desto nothwendiger. Von dem Gesetze, das sie lehren, lassen sich sogleich eine Menge Anwendungen machen. Das Mathematische vom Laufe der Flüsse, was in den vornehmsten Schriften hievon enthalten ist, wird man hier leichter, kürzer, und zum Gebrauche bequemer finden.

Eben so zeige ich im zweyten Abschnitte zuerst, was Erfahrung und Theorie vom Stosse des Wassers lehren, und leite daraus die Berechnung der unterschlächtigen

Wasserräder her. Es ist natürlich dabey auch an die oberschlächtigen zu denken.

Was man von der Bewegung des Wassers blos durch Schlüsse aus bekannten Eigenschaften desselben einsieht, das habe ich in den dritten Abschnitt versparet. Ständen diese Untersuchungen am Anfange des ganzen Buchs, so würden sie manchen abschrecken, der sich so weitläuftig und so tiefsinnig zur Praxis nicht vorbereiten wollte. Jetzo wird er vielleicht durch das bisherige seyn angewöhnt worden, über diese Dinge nachzudenken, und auch von dem Nutzen dieses Nachdenkens versichert seyn, weil er sich überall an Vorfälle erinnern wird, wo die Theorie nützlich ist.

Ich habe in diesem Abschnitte Johann Bernoullis Hydraulik zum Grunde gelegt. Seine Voraussetzungen schienen mir immer, sowohl am leichtesten zu verstehen, als auch der Natur am gemässesten zu seyn, und da ich jetzo veranlasst ward, Hrn. d'Alemberts scharfe Angriffe dieser Hydraulik, genau zu prüfen, so ward ich dadurch nur in meinen bisherigen Gedanken bestätiget. Ist meine Vertheidigung nicht ganz unglücklich gerathen, so wird es mir weniger schmeicheln, dabey etwa einige Einsicht zu weisen,

sen, als: der erste zu seyn, der etwas zu Erfüllung einer Pflicht gethan hat, die man schon lange dem uns so heiligen Andenken Johann Bernoullis schuldig war.

Ich habe selbst einige Stellen angemerkt, wo ich mit Johann Bernoulli nicht einerley Meynung seyn kann, und das betrifft einzelne Sätze, die Hr d'Alembert nicht berührt hat. Aber was dürfte man wohl von einer Hydraulik erwarten? welche grösstentheils auf der Voraussetzung beruhte: daß die Bewegung des Wassers, das sich **oben** in einem Gefässe befindet, durch das Gewicht des **untern** beschleuniget wird. Muß man bey diesem Vorwurfe Hrn. d'Alemberts nicht an den Wolf denken? der oben am Flusse sich beklagte, das Schaaf unten mache ihm das Wasser trübe:

Cur, inquit, turbulentam fecisti mihi
Istam bibenti? Laniger contra timens,
Qui possum quaeso facere quod quereris Lupe?
A te decurrit ad meos haustos liquor.

PHAEDR.

Mit Herrn Eulers Berechnung der Druckwerke endige ich diese Untersuchungen. Man kann sich schon daraus einen Begriff machen, wie Hr. Euler die Theorie abhandelt. Von seinen übrigen hieher gehörigen Aufsätzen, zeige ich nur die Titel

an, aus eben der Ursache, aus welcher jemand, der beym Bücherschreiben ökonomischer verführe als ich, sich dieser Aufsätze mit seinem grossen Nutzen würde bedient haben, weil man Hrn. Eulers Rechnungen selten besser vortragen kann als er selbst thut, und sie daher nur abschreiben muß. Bey der gegenwärtigen konnte ich doch das nicht thun, sondern habe besonders 682 u. f. §. zeigen müssen, wie die Reihen, deren sich Hr. Euler bedient, gefunden werden.

Daß ich zum blossen Abschreiben viel zu bequem bin, wird man aus der Art sehen, wie ich die grosse Menge der angeführten Schriftsteller gebraucht habe. Diese Anführungen können zugleich dem dienen, der sich die Geschichte der Wissenschaft entwerfen wollte. Er braucht zu dieser Absicht, nur die Nahmen nach der Zeitrechnung vom Castelli bis zum Euler zu setzen.

Wenn man mir verstattet zu tiefern theoretischen Untersuchungen, durch Darstellung ihres praktischen Nutzens zu reitzen, so muß man mir auch verzeihen, daß ich manche Ausübungen eher gezeigt habe, als ich ihre Gründe vollständig beweisen konnte, z. E. einige Methoden, die Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen zu messen. Ich be-

ziehe

ziehe mich daher oft auf folgende Stellen, wo die Kenntnisse ergänzt werden, von denen ich frühzeitig einigen Gebrauch zu machen suchte. Ich hohle hier eine solche Erinnerung nach, die ich bey der Untersuchung, wie hoch Wasser durch den Fall springt, am gehörigen Orte nicht anbringen konnte, weil der 235. Absatz lange abgedruckt war, ehe ich den 493. und 542. geschrieben hatte, und ich also in dem erstern auf die letztern nicht verweisen konnte.

Man wird hieraus ersehen, daß an dem Buche währender Ausarbeitung ist gedruckt worden. Den übeln Folgen, die hieraus leicht entstehen können, vorzukommen, habe ich, was zu einerley Gegenstande gehörte, immer viel eher fertig gehabt, als es mir konnte abgefodert werden.

Ist indessen, vornehmlich aus dieser Ursache etwa was stehen geblieben, von dem ich sagen muß:

Emendaturus si licuisset erat,

so findet es wohl bey billigen Lesern am leichtesten Verzeihung in einem Buche, dessen Gegenstand unter die schwersten der angewandten Mathematik gehört, zu dessen vollständigerer und zuverlässiger Kenntniß noch viel mehr Erfahrungen und Untersu-

chungen nöthig sind, als man bisher angestellt hat, und über den man bisher zwar vortreffliche einzelne Abhandlungen, aber keinen Lehrbegriff hatte, daraus sich, was von der Bewegung des Wassers bekannt ist, im Zusammenhange übersehen, beurtheilen und anwenden liesse.

Die mühsamen Rechnungen, welche oft müssen angestellt werden, sind eben nicht das, was ich hiebey für das schwerste halte. Mehr Mühe, und manchmahl Mißvergnügen, haben mir die physischen Sätze verursacht, auf welche ich die Rechnungen gründen musste. Zwar, seitdem die ganze Mathematik in Algebra ist verwandelt worden, führt man sehr oft weitläuftige Rechnungen aus Formeln, die man ohne grosse Untersuchung annimmt, und wenn diese Formeln mit der Natur nicht übereinstimmen, so hat man nichts gethan, als sich die Zeit mit Rechnen vertrieben. Archimed versprach die Erde zu bewegen, aber einen Platz bedung er sich aus, auf dem er feste stehen könnte. Beobachtet man diese Vorsichtigkeit der Alten nicht, so zeigt man einem mathematischen Spötter (zum Glücke giebt es derselben nicht viel,) manchmahl in den künstlichsten Integrationen, nur die ätherischen

Myria-

Vorrede.

Myriaden aus Lucians wahrhafter Geschichte, Riesen, auf einem Schlachtfelde, das sich vom Monde bis zum Morgensterne ausbreitet, aber von Spinnen gewebt ist. Eine sichere und brauchbare Kenntniß der Natur giebt weder der Philosoph, der nicht rechnen kann, noch der Rechner, der nicht philosophiren will. Die Geschichte der Natur ist bey jenem ein Altweibergeschwätz, bey diesem eine Historie à la Voltaire.

Da ich von den Wasserrädern so viel gesagt habe, und doch vielleicht noch mehr von ihnen zu sagen wäre, so begreift man, daß für andere hydraulische Maschinen in diesen Anfangsgründen kein Platz war. Manche derselben erfodern selbst eigne Bücher. Von der Wasserschraube hat man schon vor Alters einen Folianten gehabt (*), der, wie leicht zu erachten ist, neuere Untersuchungen, Daniel Bernoullis (**), des von mir (319) angeführten Schriftstellers, Bellogradi, und Hrn. Hennerts, dessen Aufsatz von der Kön. Preuss. Akademie gekrönt

(*) Guidi Vbaldi e marchionibus montis de cochlea Libri quatuor. Venet. 1615.
(**) Hydrodyn. Sect. 9. §. 27.

krönt worden ist (*), nicht überflüssig gemacht hat. Wie weit man sich ausbreiten muß, wenn man Maschinen gehörig beschreiben und abhandeln will, zeigen die vier Bände von Belidors Architecture hydraulique, die immer noch das vortrefflichste sind, was wir von dieser Art im Ganzen haben. Man übersieht bey Belidors grossen Verdiensten leicht einige kleine Mängel seiner Theorie, deren ich so viel, als die Sachen, von denen ich hier handele, betreffen, mit angezeigt habe, nicht aus Tadelsucht, sondern damit sein Ansehen nicht in Fehler verleitet.

Eines von den Werken, wo Theorie mit umständlicher Anwendung auf unterschiedene Maschinen verbunden ist, sind Krafts Vorlesungen über die Mechanik und

(*) Bey der ersten Ausgabe konnte ich diese Preisschrift nicht bekommen. Jetzo kann ich sie anführen: Dissertations qui ont remporté les prix adjugés par l'Ac. R. des Sc. et B. L. de Pr. en 1766. Sur la nutrition, et sur la vis d'Archimede. Berl. 1767. 4°. Es ist nebst Hrn. H. Schrift noch eine gedruckt, die concurrirt hat. Karsten macht sehr viel Erinnerungen dagegen. Lehrbegriff der gesammten Math. VI. Theil. Greifsw. 1771. 37 Abschnitt.

und Hydrodynamik (*), sie bestehen aber aus zween starken Quartbänden, mit viel Kupfern, und sind auf Befehl des Königs von Dänemark gedruckt. Daß in des schwedischen Cap. Triewalds mechanischen Vorlesungen, gleichfalls nützliche und zum Theil neue praktische Sachen enthalten sind, weiß ich nur aus Anführungen dieses Buchs.

Eben die Ursache, die mich an umständlicher Betrachtung einzelner Maschinen hinderte, schloß auch einige andere Untersuchungen aus, z. E. vom Widerstande, von elastischen flüssigen Materien. Die Schriften, aus denen man sich hierinnen unterrichten

(*) Foreläsninger over Mekanik; efter Kongelig Allernaadigst Befalning ved trykken meddeelte af Jens Kraft Justizrath og Professor udi Mathematik ved Ridder Akademiet. Soroe 1763. Foreläsninger over Statik og Hydrodynamik, med Maskin-Väsenets Theorier; 1764. Den theoretischen Theil hat man lateinisch Ienseni Kraftii Pot. Dan. R. quondam a Consil. Iustitiae et Prof. Math. in Ac. Equ. Sorana, Mechanica, Latine reddita et aucta a Io. Nic. Tetens Phys. Prof. in Ac. Frideric. Butzouiensi Butz. et Wismar. 1773. 4°. Auch deutsch: Jens Krafts Mechanik, aus der lat. mit Zus. verm. Uebers. des Hrn. Pr. Tetens ins Deutsche übersetzt, und hin und wieder verbessert von Joh. Christian August Steingruber. Dresd. 1787. 8°

richten kann, lernt man selbst aus meinem Buche kennen, und man wird sie nach dieser Vorbereitung ohne Schwürigkeit zu brauchen im Stande seyn, wenn man sonst mit ihren Verfassern über die physischen Sätze eins ist, die sie zum Grunde legen.
Göttingen, im May 1769.

Vorrede
zur zweyten Ausgabe.

Die Lehren von Bewegung des Wassers, schienen mir immer die schwersten und unsichersten der angewandten Mathematik, und, soviel Ansehen gilt, bestätigte mich in dieser Meynung das Ansehen der berühmtesten Schriftsteller.

Joh. Hermanns Phoronomia Amst. 1716. sollte das erste etwas vollständige System dieser Lehren seyn, und Alle die es studirt haben, fanden auser den Voraussetzungen, auch in dem Vortrage Schwierigkeiten, der eine verunglückte Mischung von Synthesis, geometrischer Analysis, und algebraischer Rechnung ist. Wolf urtheilt, H. hätte besser gethan, sich allein

der

der Analysis zu bedienen, in der er sehr geübt war. El. Math. T. V. de scriptis mathematicis c. 6. §. 17.

Daniel Bernoullis Hydrodynamica Argent. 1738, gründet sich auf die Erhaltung der lebendigen Kräfte, und wenn ich, ohne an dieser Erhaltung da, wo sie bewiesen ist, zu zweifeln, doch für die Hydrodynamik, einen andern Grund wünschte, so dachte ich wie Daniels Vater, der eben deßwegen auf seine Hydraulik sann.

Dieser Hydraulik, welche mich befriedigte, macht d'Alembert harte, und, wie ich glaube gezeigt zu haben, ungerechte Vorwürfe. Bey d'Alemberts traité des fluides aber, sind mir, wiederhohlter Anstrengung ungeachtet, immer die Voraussetzungen dunkel geblieben, auf denen seine Rechnungen beruhen. Auch bey Eulers Theorie der Druckwerke, die ich 668 §. vortrage, sind mir nicht alle Voraussetzungen deutlich.

Solche Anstösse, die ich in der Theorie fand, veranlassten mich, von Erfahrungen anzufangen, und so viel Gebrauch zu machen, als sich thun ließ.

Ich habe auch mit Vergnügen gesehen, daß meine Arbeit, ohne Zweifel vornehmlich

Vorrede.

lich dieser Einrichtung wegen, Beyfall unter den vielen Gelehrten gefunden hat, die sich seit Erscheinung meines Buches, mit Hydrodynamik beschäfftigt, und sie so sehr bereichert haben. Von diesen Bereicherungen hätte ich einen Gebrauch machen können, der meinen Octavband, wenigstens zu einem Quartanten vergrössert hätte. Dergleichen Vergrösserung war meinen Absichten nicht gemäß, ich habe mich also meistens begnügt, anzuzeigen, was in der Wissenschaft seitdem ist gethan worden. Auch liesse sich Manches nicht umständlicher beybringen, wenn ich nicht im Gange meines Vortrages mehr ändern wollte, als sich thun ließ, wo alles zusammenhängt, jedes an seinem Orte steht, und Ordnung nicht zu ändern ist, als allenfalls in eine ganz neue.

Die wichtigsten Zusätze dieser Ausgabe sind im Verzeichnisse des Innhalts mit * angedeutet. Göttingen den 30. Jan. 1797.

Abraham Gotthelf Kästner.

Innhalt

Innhalt.

Erster Abschnitt.

Druck stehendes Wassers. Erfahrungen von der Geschwindigkeit fliessenden Wassers. Daraus hergeleitete Sätze, und Anwendung derselben auf Gefässe und Flüsse.

	Abschn.	Seite.
Druck des Wassers auf Wände seiner Behältnisse	4	2
Mittelpunct des Druckes	20	8
* Nach Belidor und Klügel	24	10
Druck mit Gestalt des Gefässes	26	10
Auf die Seitenfläche eines senkrechten Prisma	29	14
Auf Pyramiden	30	14
Auf runde Behältnisse	31	16
Auf Schutzbreter	39	19
Von Dämmen	40	22
Von Festigkeit der Röhren	45	25
Festigkeiten von Materien zu vergleichen	62	39
Euler über Canonen	72	44
Schwierigkeiten bey der Vergleichung	74	46
Erfahrungen wie Wasser aus Gefässen fliesst	80	55
Geschwindigkeit aus der Weite, auf die es sprützt	83	57
Das Wasser muß über der Oeffnung immer gleich hoch bleiben	90	60
Erhält die beständige Geschwindigkeit in unmerklich kurzer Zeit	91	61
Geschichte der Bemühungen zu finden wie Geschwindigkeit mit Wasserhöhe zusammenhängt. Castelli	92	62

Innhalt.

	Abs.	Seite
Torricelli und a.	93	63
Gulielminis Versuche	95	65
* Bossut, Langsdorf, Vince	100	70
Die Wassermengen in gleichen Zeiten verhalten sich wie der Höhen Quadratwurzeln	101	72
Leichte Versuche dieses zu zeigen	102	72
Mariottes Versuche	103	74
Berechnungen für Wassermengen, bey ungleichen Höhen aus ungleichen Oeffnungen, in ungleichen Zeiten	108	77
Polenis Versuche, de castellis, *delle pescaje*	111	80
Zusammenziehung des Wasserstrahls	115	82
Bey gleicher Höhe, aus gleicher Oeffnung, ungleiche Wassermenge	136	92
Aus Röhren mehr Wasser als aus Oeffnungen	140	94
Bey einerley Röhre, oder Oeffnung, findet (101) statt	144	97
Absicht der Kegelstücke beym Poleni	145	97
Andre Versuche desselben	146	97
Berechnung der Geschwindigkeit aus Versuchen	149	100
Fall in einer Secunde in pariser Maasse	153	102
im bononischen	163	111
im englischen	173	129
Berechnung der Geschwindigkeit bey einem Versuche Polenis	155	104
Wie mit gleicher Geschwindigkeit ungleiche Wassermengen ausfliessen	156	105
Wie sich die Wassertheilchen beym Ausfluss lenken	156	106
Bey allen Versuchen, sind die Oeffnungen klein gewesen	158	108
Gulielminis Versuch die Geschwindigkeit zu bestimmen	160	109

Statt

Innhalt.

	Abs.	Seite
Statt seiner mühsam berechneten Tafel, Logarithmen bequemer	162	110
Die Geschwindigkeit gehört der Wasserhöhe	165	113
Formel für die auslaufende Wassermenge	166	114
Anwendung auf prismatische Gefässe die sich ausleeren	169	117
* Wasseruhren, und Youngs Untersuchungen	172	123
Betrachtungen über die Theorie und das parallele Sinken der Schichten	173	123
Daniel Bernoullis Erfahrungen	174	129
Mariottes Versuch	179	135
Das Wasser senkt sich in prismatischen Gefässen nach den ungeraden Zahlen	180	137
Wie viel aus einem beständig vollen Gefässe in der Zeit liefe, in der es sich ausleert	181	138
Noch Versuche zu Prüfung der Theorie	182	139
Abweichung von diesen Gesetzen	183	141
Ausfluß aus runden Gefässen	184	145
Gefäß in dem sich das Wasser in gleicher Zeit gleich viel senkt	185	146
Ausfluß durch lothrechte Oeffnungen von beträchtlicher Grösse	186	148
Durch ein Rechteck	187	152
Mittlere Geschwindigkeit, und Mittelpunct der Geschwindigkeit	189	153
Wenn das Rechteck bis an die Oberfläche reicht	193	156
Gebrauch der Parabel	194	156
Von Guido Grandis parabolischer Tafel	195	157
Ausfluß durch Dreyecke	196	159
Durch geradelinichte Oeffnungen	202	162
Durch krummlinichte	203	162
Durch kreisförmige	204	163

Innhalt.

	Abs.	Seite
Wenn des Kreises oberste Stelle in der Wasserfläche ist	205	163
Wenn der Kreis tief unter dem Wasser ist	207	165
Ueber das Reiben	217	173
Was man nöthig hätte zu berechnen, wie hoch Wasser vermöge seines Falls springt	224	179
Mariottes Erfahrungen	227	184
Desselben Regel	230	186
* Gregor Fontanas Erinnerungen	235	189
Vom Laufe der Flüsse	236	191
Künstlicher Querschnitt	237	192
Geneigte Canäle	242	194
Wenn die Geschwindigkeiten in einem Querschnitte fast gleich werden	254	200
Horizontale Canäle	264	205
* Erläuterung, wie Wasser in der Oberfläche keine Geschwindigkeit hat	266	203
Die Donau	268	210
Praktische Arten die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen.		
Mit einem Körper der auf der Oberfläche schwimmt	270	213
Zu untersuchen ob das Wasser in Oberfläche und Tiefe gleich schnell ist	270 III	214
Wie viel eine gegebene Kraft ein Pendel aus seiner Lage bringt	271	216
Vergleichung der Geschwindigkeiten vermittelst eines Pendels	278	218
Elvius Art die wirkliche Geschwindigkeit vermittelst des Pendels zu finden	284	220
Erfahrungen über Geschwindigkeiten von Flüssen	285	221
* Stollenröschе, Geschwindigkeit der Flüsse läßt sich nicht wie Fall auf schiefer Ebene berechnen	285 III.	224
Manfredis Vorschlag	287	224
Hydrometrische Flasche	291	228

Pitots

Innhalt.

	Abs.	Seite
Pitots Röhre	292	230
Vermischte Bewegung des Wassers, lebendige, todte Höhe, Ausfluß aus untergetauchten Gefässen	296	233
Huetius, Stärke des Windes zu messen	296 II.	234
* Brunings Tachometer	IV.	236
* Woltmanns hydrometrischer Flügel	V.	238
Fernere Lehrsätze von der Geschwindigkeit des fliessenden Wassers	297	239
Castellis Regulator, das Wassermaaß	302	242
* Ximenes über Aufschwellen der Flüsse	XV.	247
Theoretische Untersuchungen über Höhen der Querschnitte.		
Höhe in einem geneigten Canale	303	248
In einem senkrechten	XI.	252
Höhe wenn der Fluß immer eine Breite behält	304	253
Figur des Wassers in einem senkrechten Canale	XII.	256
In einem schiefen überhaupt	305	257
Im schiefen (254) vorausgesetzt	306	258
Figur des Wassers das aus einer horizontalen Oeffnung im Boden eines Gefässes fällt	308	259
Newtons Cataracte	IV.	261
Austheilung des Wassers aus horizontalen Canälen	309	261
Wie sich eines Flusses Geschwindigkeit mit seiner Richtung ändert	311	268
Von vereinigten Flüssen	312	269
Zusammensetzung der Bewegung auf Flüsse anzuwenden	314	272
* Die Arve hat den Rhonefluß zurückgetrieben	314	273
* Vom Po, und Ableitungen aus ihm	315	274
* Ueber Schlünde der Flüsse	XVIII.	279

Innhalt.

Zweyter Abschnitt.

Stoß des Wassers. Unterschlächtige Wasserräder. Oberschlächtige.

	Abs.	Seite
Stoß wie das Quadrat der Geschwindigkeit	316	281
Pautons Meynung untersucht	319	284
Den Satz dnrch Versuche zu prüfen	320	288
Mariottes Versuche	321	289
Versuche der ersten pariser Akademisten. Der Stoß gleiche einer Wassersäule deren Höhe die Wasserhöhe ist. Erinnerungen dagegen	325	293
* Neuere Untersuchungen aus den Abh. von Turin	325. VI.	297

Gestalt des zusammengezognen Wasserstrahls.

Uebergang zu Dan. Bernoullis Theorie	326	298
Kräfte bey einer krummlinichten Bewegung nach zwo gegebenen Richtungen zu zerlegen	327	299
Anwendung auf Stoß des Wassers	328	309
Er gleicht einer Wassersäule deren Höhe die doppelte Höhe der Geschwindigkeit	329 III.	316
Dan. Bern. ältere, und Newtons Theorie. D'Alembert findet was man will, einfache oder doppelte Höhe	330	318
Art die Theorie durch Versuche zu prüfen	331	319
Lehnsatz, von einem Winkelhebel	332	321
Dan. Bernoullis und Krafts Versuche	333	323
	334 I....VII.	324
Punct, wo man sich den Stoß vereinigt vorstellt	334	327
* Zuliani	334	328

Wie man sich verhält, wenn nicht alle

Reihen

Innhalt.

	Abs.	Seite
Reihen von Wassertheilen gleich geschwinde gehn.	335	328
Vom schiefen Stosse.		
Wie sich das Verfahren (328) hie anbringen liesse	336	329
Gesetze des schiefen Stosses bey festen Körpern auch hie angenommen	337	332
Schiefer Stoß	338	332
Ungewißheit in Schätzung des senkrechten	344	338
Berechnung, die gelten möchte, wenn die Fläche nicht den ganzen Strahl auffängt	345	340
Stoß auf eine Fläche die sich selbst bewegt	346	341
* Langsdorfs Untersuchungen	350	345
Unterschlächtige Räder.		
Gleichförmige und ungleichförmige Wirkung	351	347
Der gleichförmigen Grösse bey einem unterschlächtigen Rade	355	350
Wenn sie am grösten wird? nach Parent.	356	355
Momente der stossenden Kraft, der Wirkung und des Stosses	365	359
Von Vergleichung der Wirkungen, aus Elvius	372	362
Mit Erfahrung verglichen	380	365
Dreyerley Wasserräder.		
I. Die Schaufeln in der Richtung des Halbmessers	381	370
II. Schief gegen denselben	383	371
Geometrischer Lehnsatz von Lagen der Ebenen	384	372
III. Horizontale Räder	387	382
* Andere Untersuchungen über unterschlächtige Räder	388	384
Klügel		II.
Gerstner		IX. 386

Innhalt.

	Abs.	Seite.
Langsdorf	XIII.	388
Evans	XIV.	388
Oberschlächtige Räder	389	391
Sie treibt Gewicht des Wassers, unterschlächtige den Stoß	390	392
Berechnung	391	393
Halboberschlächtiges Rad	401	405
Fernere Untersuchung der O. R. nach Elvius	402	406
Vergleichung zweyer Räder, wie die Wirkung durch zu schnellen Gang des Rades vermindert wird	408	412
Ueber die Schaufeln des oberschlächtigen Rades	409	418
Wo sie anfangen auszugiessen	417	422
Wie sich das Wasser in ihnen wegen der Schwungkraft stellt	418	425
Wo Wasser wegen der Schwungkraft verschüttet wird	427	433
Wo die Schaufeln horizontal liegen	429	436
Wie langsam das Rad gehen muß, damit mehr Wasser zufliesst, als die Schaufeln fassen	430	441
* Stoß auf runde Körper	434	446
* Vergleichung mit dem Widerstande	435	456
* Neuere Erfahrungen über Stoß und Widerstand	V.	458
* Beweise von Methoden Geschwindigkeit der Flüsse zu messen. Gulielmini	436	463
Elvius	437	

Dritter Abschnitt.

Theoretische Untersuchungen von der Geschwindigkeit fliessenden Wassers.

Joh. Bernoullis Grund der Hydraulik.

Uebertragen der bewegenden Kraft aus einer Wasserschicht in die andre	440	465

Kraft,

Innhalt.

	Abs.	Seite
Kraft, welche erfodert wird, die Geschwindigkeit, die Wasser in einem Gefässe hat, in die zu ändern, mit der es ausfliesst	441	469
Ob nöthig ist, sich die Aenderung der Geschwindigkeit stufenweise vorzustellen	454	479
Ausfluß aus immer vollem Gefässe durch Oeffnung im Boden	455	481
Der Strudel	III.	482
Vergleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit	467	492
Die Geschwindigkeit nähert sich schnell der grösten	470	495
Man kann sich statt des Strudels eine bewegende Kraft zum Uebergange aus einer Geschwindigkeit in die andere vorstellen	472	498
Ausfluß aus immer vollem Gefässe mit willkührlich schiefer Röhre	473	499
Horizontale Röhre	490	510
Gefäß mit willkührlich schiefer Röhre, das sich ausleert	496	513
Ohne Röhre	513	521
Enge Röhre	522	525
Horizontale Röhre	531	529
Daß die Röhre enge seyn soll, sogleich in die Differentialgleichung gebracht	535	531
Bewegung durch ein Gefäß mit zwo Röhren	536	533
Wie die veränderliche Geschwindigkeit zu suchen wäre	537	536
Bey der beständigen Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfliesst, kömmt nichts auf Menge, Lage, Krümmung u. s. w. der Röhren an, alles nur auf Wasserhöhe, und Weiten des Gefässes und der letzten Röhre	538	536

Innhalt.

	Abs.	Seite
Druck ausfliessenden Wassers auf des Gefässes Boden	544	538
Beschleunigende Kraft desselben	549	541
Wie man sich vorstellen kann, das Gefäß immer voll zu erhalten	555	543
Röhren von willkührlicher Gestalt	558	545
Hydrostatische Kraft	573	553
Hydraulische	580	557
Wie die beständige Geschwindigkeit bey zwey Gefässen gleich seyn kann	598	562
Fälle, wo die centrische Linie gerade ist	599	563
Beständige Geschwindigkeit in diesen Fällen	601	564
Aenderung der Geschwindigkeit, wenn die Richtung des einfliessenden und des ausfliessenden Wassers etwas geändert wird	602	565
Joh. Bernoullis unrichtige Gedanken über Polenis Versuche	604	566
Die Formel (597) für eine horizontale Röhre	605	568
Druck durchfliessenden Wassers, auf die Seiten des Canals	609	570
Wie hoch Wasser in einer eingesetzten Röhre erhalten wird	626	577
Daniel Bernoulli hat diese Hydraulicostatik zuerst angegeben	628	578
Druck, wenn die Geschwindigkeit beständig ist	629	
Derselbe, wenn die centrische Linie gerade ist	630	579
Wie der Druck auf zwo gleich hohe Stellen zweyer unterschiednen Gefässe gleich seyn kann	631	
Druck im Anfange der Bewegung	634	580
Vorsichtigkeit bey den Versuchen	636	581
Allgemeine Formel für veränderliche Geschwindigkeit des Ausflusses	637	583

Anwen-

Innhalt.

	Abs.	Seite
Anwendung auf Gefässe, wo die centrische Linie vertical ist. Ausfluß durch horizontale Röhren	640	584
Druck auf eine Stelle eines horizontalen Canals bey unveränderlicher Geschwindigkeit	641	584
Daniel Bernoullis Versuche hierüber	643	586
Was vom Drucke zu urtheilen ist, wenn der Canal sich gegen den Ausfluß erweitert	645	588
Ob das Verneinte in einer analytischen Formel allemahl den entgegengesetzten physischen Umstand andeutet?	646	
Beyspiele, von anziehender Kraft und Erwärmung	647	589
Joh. Bern. Meynung von (645), Daniel B. Versuch darüber und Erklärung des Versuchs.		
Heber, wo das Wasser zu der höhern Oeffnung ausfliesst	648	590
Wenn die Geschwindigkeit des Ausflusses ohne Ende wächst	649	596
Ueber d'Alembert Erinnerungen gegen Bernoullis Theorie	651	598
Eulers Theorie der Druckwerke	668	615
Regeln für die Vorrichtung der Druckwerke	712	
Folgerungen daraus, wegen der nöthigen Festigkeit der Röhren	735	
Vergleichung der eulerischen Theorie mit Joh. Bernoullis	737	658
Wie sich eine Schwürigkeit gegen einen Ausdruck Eulers heben liesse	743	660
Allgemeine Begriffe von Hrn von Segner hydraulischer Maschine	748	662
Von Eulers allgemeinen Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung flüssiger Materien	751	666

Innhalt.

	Abs.	Seite
Von einigen Schriften über Theorie der Hydraulik, Wasserbaukunst und verwandte Gegenstände.		
Hermanns Phoronomie	756	670
Dan. Bernoullis Hydrodynamik	757	671
v. Segner Exercitationes hydraulicae	758	672
D'Alembert Traité des fluides	759	673
Newtons Cataracte	764	676
Mac Laurins Theorie	765	677
* Karsten Hydraulik	767	679
* Dessen Theorie von Bew. d. W.	768	680
* Klügel von Feuersprützen	772	682
* Helfenzrieder von F.	II.	683
* Hesse von F.	III.	683
* Silberschlag vom Wasserbaue, Preisschrift	773	683
* Hydrotechnik	II.	684
* Eytelwein	III.	
* Böse vom Wasserbaue	774	685
* Fuchs		686
* Tetens Reisen	775	686
* Woltmanns Beyträge	II.	686
* Wiebeking Wasserbau	776	687
Rheincharte	II.	
Wasserbaukunst	III.	
* Bernhard Hydraulik	777	688
* Bossut Hydrodynamik	778	
* Prony Archit. Hydr.	779	
Carl Chr. Langsdorf von Salzwerken	778	689
Joh. Wilh. Langsdorf von Salzw.		
Carl Chr. Langsd. Mechanische Untersuchung	779	690
Lehrbuch der Hydraulik		
Büsch Wasserbau	780	
Buat Hydraulik von Lempo	781	691
Zallinger von Wasserrädern	782	692

Vom

Vom Drucke des Wassers auf die Wände seiner Behältnisse.

Ausführung von Hydrostat. 28; 29.

1. Erklär. Von einem Gefässe, in dem Wasser befindlich ist, heisse ich hier eine **Wand**, jede ebene oder krumme Fläche im Umfange des Gefässes, die nicht wagrecht ist. Der Boden des Gefässes muß wagrecht seyn. Setzte man einen Kasten mit Wasser so, daß was gewöhnlich sein Boden heisst, gegen den Horizont schief stünde, so würde ich diesen Boden hier als eine Wand betrachten.

2. Zus. Eine **ebene Wand** des Gefässes läßt sich also am allergemeinsten so vorstellen. AD 1. Fig. sey eine wagrechte Linie, DC auf sie senkrecht, aber nicht auch mit ihr in einer Horizontalfläche, so geben die Linien AD, DC, eine Ebene, die gegen den Horizont geneigt ist, wenn man nicht DC für vertical annimmt. Diese Ebene sey auf einer Seite mit einer willkühr-

lichen Linie AB begränzt; so stellt DABC eine Wand vor, die an einem Ende durch die gerade Linie DC, am andern durch die gerade oder krumme AB, begränzt würde; diese AB muß gegeben seyn, wenn die Figur der Wand gegeben seyn soll, wäre die Wand an beyden Enden mit krummen Linien begränzt, so dürfte man sich nur auf der andern Seite von CD, eine andere krumme Linie ZY 2. Fig. vorstellen.

3. Zus. Die unterste Gränze einer Wand müsste nicht eben allemahl eine gerade Linie wie AD seyn. Man stelle sich eine viereckichte prismatische Röhre vor, die lothrecht aufgerichtet ist. In ihre untere Oeffnung stecke man eine Kugel, die grösser ist als daß sie ganz in die Röhre hinein gienge. Was von der erhabenen Fläche dieser Kugel in die Röhre hinein kömmt, und so die Oeffnung verschliesst, das wird von jeder der vier Seitenwände der Röhre so geschnitten, daß der Durchschnitt jeder Wand mit der Kugelfläche ein Bogen eines Kreises ist (Geom. 49. S.). Wenn man die Untersuchung in der einfachern und leichtern Voraussetzung, daß die unterste Gränze der Wand eine gerade Linie ist, vollendet hat, wird man leicht sehen, was in solchen Fällen, wie hier angegeben worden, zu thun ist.

4. Aufg. Eine Wand eines Gefässes befinde sich in der Ebene ADC, 1. Fig. wo AD wagrecht, und DC darauf senkrecht ist. Die Figur ADCB mache einen Theil dieser Wand

aus.

aus. Diese Figur wird ausser den genannten Linien, noch durch eine wagrechte CB; und eine gegebene gerade oder krumme Linie BMA begränzt. Die wagrechte Oberfläche des Wassers in diesem Gefässe, reiche bis an K einen Punct der Linie DC. Man sucht den Druck des Wassers auf die Figur ABCD.

Aufl. I. Die Neigung der Wand zu bestimmen, ziehe man durch C eine horizontale Linie CG auf CB senkrecht, so ist die Ebene BCG wagrecht, und CB ihr Durchschnitt mit der Wand, auf den CG in der wagrechten Ebene, und CD in der Wand, senkrecht sind, also GCD der Wand Neigungswinkel. Durch K ziehe man KL und CG parallel, so ist LKH eben der Winkel, und die Ebene GCD vertical (Geom. 47. S. 4. Zus.). In ihr ist auch KL; fällt nun eine Verticallinie, von L, einem willkührlichen Puncte der nurgenannten Linie herab, so muß solche Verticallinie in der verticalen Ebene durch KL seyn, also CD irgendwo schneiden. Das geschehe in H; und CG werde von ihr in G geschnitten, so ist $GHC = R - GCH$; Es sey $GHC = \eta$ so ist der Neigungswinkel $= R - \eta$.

II. Nun kann man $CH = u$; als eine Absciße $HM = y$ als eine Ordinate ansehen, den Druck auf das Element Hm berechnen, und integriren.

III. Es sey $DA = b$; $DC = c$; $CK = e$; und zwischen u und y eine Gleichung gegeben. So ist $HK = u + e$; $LH = (u + e) . \cos \eta$;

Hm = y. du; Also der Elementardruck auf Hm; = (u + e). y. cos η. du (Hydrost. 28.) wo der veränderliche in cos η multiplicirte Factor; uydu + eydu ist. Dieser Elementardruck werde so integrirt, daß das Integral für u = o verschwindet, weil man den Druck des Wassers nur rechnet so weit er die Ebene CBAD betrifft, und derselbe offenbahr mit ihr verschwindet. So giebt sich der Druck auf die Ebene CBMH; und auf die ganze Ebene CBAD; wenn man im Integrale u = c setzt.

IV. Reicht die Oberfläche des Wassers nur bis an CB so setzt man in dem jetzt erwähnten Integrale, e = o.

5. Zus. Wäre die Figur BYZA, 2. Fig. wo ich AZ; BY wagrecht annehme, so müsste man sie durch CD in zwey Stücken theilen, für deren jedes der Druck auf die beschriebene Art besonders berechnet würde.

6. Wären diese beyde Stücke ähnliche Hälften, so dürfte man nur den Druck auf das eine verdoppeln.

7. Für e = o (IV.) ist der Druck luy. cos η du.

8. Wollte man den Druck auf die Figur DCBOD 7. Fig. berechnen, die unten von irgend einer andern gegebenen Linie, als von der wagrechten AD begränzt wäre, so stelle man sich die Gränze BMO gerade oder krumm, wie sie beschaffen ist, durch OA fortgesetzt vor, und zie-

he OS auf AD senkrecht. Eben wie in (4) berechnet man die Drucke auf SAO; SOD, deren Summe den Druck auf AOD giebt, diese von dem Drucke auf DABC abgezogen, lässt den Druck auf DOBCD. So lassen sich die Fälle berechnen von denen (3) redet.

9. I. Exempel. Die Ebene (4) sey ein Rechteck, wo $y = b$; so ist der Elementardruck $(u + e).\ b.\ du.\ \cos\eta$ integrirt $(\frac{bu^2}{2} + ebu).\ \cos\eta$, und $u = c$ gesetzt, $(c + 2e).\ \frac{1}{2}b.\ c.\ \cos\eta$.

Was in den Cosinus multiplicirt ist, lässt sich so ausdrucken: $(e + \frac{1}{2}c).\ b.\ c.$ Da ist b. c die Fläche des Rechtecks, und $e + \frac{1}{2}c$ die Länge von K bis an die Mitte der Linie CD.

Diese Länge, mit $\cos\eta$ multiplicirt, ist die Wasserhöhe über des Rechtecks Mitte. Diese Wasserhöhe mit des Rechtecks Fläche multiplicirt, giebt also den Druck.

10. Nähmlich der Druck beträgt so viel als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche das Rechteck wäre, die Höhe so groß als die Höhe des Wassers über des Rechtecks Mitte.

11. Reicht das Wasser nur bis an BC, so ist $e = 0$. Ein Rechteck leidet vom Wasser das bis an seine oberste Gränze reicht, einen Druck, so stark als das Gewicht einer Wassersäule, die das Rechteck zur Grundfläche hätte, und halb so hoch wäre, als das Wasser über des Rechtecks unterster Grundfläche AD, steht.

12. II. Ex. Die Ebene sey ein bey C rechtwinklichtes Dreyeck, DCB 3. F. wo CB = f; b = o; also $y = \frac{c-u}{c}.f$ und in (7) der Elementardruck $\frac{f}{c}.\cos\eta.(cudu - u^2\,du)$, das Integral $\frac{f.\cos\eta}{c}.\left(\frac{cu^2}{2} - \frac{1}{3}u^3\right)$. für das ganze Dreyeck; $f.\cos\eta.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right).c^2 = \frac{f.c}{2}.\frac{1}{3}a$ oder den Druck so groß, als das Gewicht einer Wassersäule, die das Dreyeck zur Grundfläche hatte, und $\frac{1}{3}$ so hoch wäre als das Wasser über D steht.

13. Ein gleichschenklichtes Dreyeck davon BDC die Hälfte wäre, wenn man sich nähmlich an der andern Seite von DC noch ein solch Dreyeck an DC gesetzt vorstellt, hätte statt BC zur Grundlinie 2 BC = 2 f; auch den doppelten Innhalt dessen in (12) und litte auch den doppelten Druck, also bliebe für dasselbe auch die Regel, daß es den Druck einer Wassersäule leidet, die über ihm auf die Höhe $\frac{1}{3}$ a stünde.

14. III. Ex. Die Ebene sey ein halber Kreis, CMD 4. Fig. dessen Durchmesser CD = c; b = o; $y = \sqrt{(cu - u^2)}$ also $udu = \frac{1}{2}cdu - ydy$; dieß giebt des Elementardrucks veränderlichen Factor (4; III.) $\frac{c+2e}{2}.ydu - y^2\,dy$, davon das Integral

tegral $\frac{c+2e}{2}$. Abschnitt CHM $-\frac{1}{3}y^3$; also für den völligen Halbkreis; $\frac{c+2e}{2}$. Halbkreis CMD. Heisst also $1:\pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise, so ist der völlige Druck auf diesen Halbkreis $= \frac{c+2e}{2}.\frac{c^2\pi}{8}.\cos\eta$ (Geom. 44. S.).

15. Und verdoppelt, für den ganzen Kreis CTDV; $\frac{(c+2e).c^2.\pi.}{8}\cos\eta$.

16. IV. Ex. Die Ebene sey ein Quadrant KTD, dessen wagrechter Halbmesser $KT=KD=c$; $KP=u$; $QP=y$; $b=o$; $y^2=cc-uu$, $-ydy=udu$, der veränderliche Factor $-y^2dy+eydu$; dessen Integral e. Abschn. KTQP $-\frac{1}{3}y^3+$ Const; und $o=-\frac{1}{3}c^3+$ Const also, wenn sich KTQP in $KTD=\frac{c^2\pi}{4}$ verwandelt, der Druck auf den Quadranten $(\frac{c\pi}{4}+\frac{1}{3}c).c^2.\cos\eta$.

17. Und auf den Halbkreis TDV; verdoppelt.

18. V. Ex. Die Ebene sey ein Quadrant TCK; den unten ein wagrechter Halbmesser $KT=CK=c$ begränzt, $CH=u$; $HM=y$ $=v$

$= \sqrt{(2cu - u^2)}$; $udu = cdu - ydy$; der veränderliche Factor $(e + c)$. $ydu - y^2 dy$; das Integral $(e + c)$. Abschn. $CHM - \frac{1}{3}y^3$, und für $CHM = CTK = \frac{c^2\pi}{4}$; der Druck auf den Quadranten: $(\frac{(e+c).\pi}{4} - \frac{1}{3}c).c^2.\cos\eta$.

19. Und auf den Halbkreis TCN; verdoppelt.

Der Mittelpunct des Drucks, centrum pressionum, vel grauitationum; *centre d' impression.*

20. Erkl. Die Ebene BYZA 2. Fig. leidet einen gewissen Druck, den man nach Vorhergehendem berechnet hat: giebt es nun auf ihr einen Punct V; an den man eine Kraft, so stark als dieser Druck, und in einer Richtung, die des Drucks Richtung entgegengesetzt ist, mit dem Erfolge anbringen kann, daß der Druck dadurch aufgehalten wird, daß er nähmlich die Ebene, wenn sie gleich beweglich wäre, nicht forttreibe, so heisst dieser Punct **der Mittelpunct des Drucks.**

21. Zus. Wenn die Ebene durch CD in ähnliche Hälften getheilt wird, so befindet sich der Mittelpunct des Drucks in dieser Linie.

22. Der Elementardruck auf Mn ist senkrecht auf diese Ebene. Man kann ihn also wie ein Gewicht ansehen, das sich an CH wie am

Arme eines um C beweglichen Hebels befände, und da ein gewisses Moment hätte. Die Summe aller dieser Momente muß so groß seyn, als das Moment, das der Druck auf die ganze Ebene hat, wenn man ihn vereinigt, als ein Gewicht in V betrachtet (Stat. 45.).

23. Aufg. Den Mittelpunct des Drucks zu finden.

Aufl. Die Grössen im Theile CBAD sollen wie in (4) heissen; der Druck auf diesen Theil, den man aus vorigen findet, verdoppelt sey = 2. P. cosη und CV = m; so ist der Druck auf Mu das doppelte des Drucks auf Mh und sein Moment kömmt heraus, wenn man ihn mit u multipliciret. Man integrire also $2\cos\eta.(u+e)uydu$ so daß das Integral für u = o verschwindet, und setze alsdann u = c; was heraus kömmt sey $2.\cos\eta.S$, so ist $m = \frac{S}{P}$.

24. Ex. I. Dieß auf ein Rechteck anzuwenden, stelle man sich vor, das Rechteck bey dem man diesen Mittelpunct finden will sey das in (9) verdoppelt, oder $(u+e).uydu$ sey hier $(u+e)\,b\,u\,d\,u$, davon das Integral b. $(\frac{1}{3}u^3 + \frac{eu^2}{2})$ also $S = b.c^2.\frac{2c+3e}{6}$ und $P = \frac{c+2e}{2}.bc$, folglich $m = \frac{2c^2+3ec}{3c+6e}$.

II. Des Puncts V Tiefe unter der Wasserfläche ist $= m + e = \frac{2.c^2 + 6.e.c + 6.e^2}{3.c + 6.e}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(c+e)^3 - e^3}{(c+e)^2 - e^2}$.

So giebt Belidor diese Tiefe Arch. hydr. T. I. P. I. §. 414.

III. Setzt man die Wasserhöhe über der Linie AD Mittel $= h = e + \frac{1}{2}c$ So kömmt die Tiefe (II) $= h + \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{3.h}$. So giebt sie Klügel in der 190; VII angeführten Schrift.

25. Diese Methode auf andere Flächen anzuwenden, erfordert nur andere Berechnungen die jeder leicht für sich anstellen kann. Liesse sich die Ebene BAZY nicht in ähnliche Hälften theilen, so müsste man verfahren, wie wenn einer solchen Fläche Schwerpunct gesucht wird (An. Un. 637.). Man müsste nähmlich des Punctes V Weite von einer willkührlichen Axe BY, und auch von einer andern darauf senkrechten suchen. In solche Weitläuftigkeiten will ich mich nicht einlassen, hier unbrauchbare Sätze zu erfinden.

Druckungen, wo die Gestalt des Gefässes mit betrachtet wird.

26. Aufg. BADC, f. F. sey ein verticaler Durchschnitt eines Körpers, der folgende Gestalt

stalt hat: Ein horizontalliegendes Rechteck habe zwo Seiten in der wagrechten Ebene, in welcher AD befindlich ist, mit AD parallel und gleich, seine beyden andern Seiten, welche auf jene senkrecht sind, seyn, jede $=b$. Auf jeder dieser beyden letztern als auf einer Grundlinie, stehe ein Rechteck gegen den Horizont geneigt, das eine dieser Rechtecke habe DC, das andere AB zur Seite; ich will sie in der Folge die Rechtecke an *DC* und an *AB* nennen; so ist der Körper an den Seiten herum in diese beyden Rechtecke und in zwey Trapezia eingeschlossen, deren jedes $=$ ABCD ist, und ABCD ist sein Durchschnitt den eine Verticalfläche macht, die auf den beyden Seiten des Rechtecks deren jede $=b$ ist, senkrecht steht.

Dieser Körper sey bis an die Horizontalfläche in der BC ist mit Wasser gefüllt, man sucht den Druck auf das Rechteck an AB.

Aufl. Durch O, einen willkührlichen Punct in AB, gehe die Verticallinie EOX; so ist XOA der Winkel η (4) daher

in (9)	c	b	a
hier	AB	b	EX

und der gesuchte Druck AB. b. $\frac{1}{2}$ EX.

27. Wäre das Rechteck an AB zugleich die Wand eines andern Körpers, der eben wie der vorige beschaffen wäre, nur daß sein Durchschnitt eben wie der vorige verstanden, TSAB wäre, und stände in diesem letzten Körper das

Wasser

Wasser bis an YO, so druckte es die Wand an AB mit einer Gewalt AO. b. $\frac{1}{2}$ OX nach einer Richtung, die dem vorigen Drucke entgegengesetzt wäre; Es ist aber AO = AB. OX : EX also dieser Druck = AB. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{OX^2}{EX}$ und verhält sich zum vorigen wie $OX^2 : EX^2$. Ihn also von dem vorigen abgezogen, so leidet die Wand eigentlich niederwärts, oder nach der Richtung des vorigen, den Druck $\frac{b.\ AB}{2.EX}$. $(EX^2 - OX^2)$, der sich also wie der Unterschied dieser beyden Quadrate verhält, wenn das Gefäß, das ich zuerst betrachtete, immer gleich voll bleibt, in dem andern aber, YO bald höher bald niedriger ist.

Man begreift, daß es nur auf die gemeinschaftliche Wand an AB ankömmt, und die Gefässe übrigens Seitenflächen haben möchten, was für welche sie wollen. Weil es indessen gut ist der Einbildungskraft eine gewisse Gestalt von ihnen darzustellen, so wird wohl die angegebene die bequemste dazu seyn.

28. Aufg. Auf einer schiefen Ebene 6 F. die durch das Dreyeck OLK vorgestellt wird (Stat. 97.), liegt ein Prisma von folgender Gestalt: Seine Grundflächen in geometrischem Verstande, stehen vertical, eine davon ist AKEB, die eine Seitenfläche, auf der es liegt, ist auf der Grundfläche senkrecht, und ein Rechteck dessen eine Seite AK die andere = g ist: so wird

ihr

ihr gegenüber eine Seitenfläche zu oberst liegen, die ein Rechteck ist, dessen beyde Seiten g und BE sind, und die beyden übrigen Seitenflächen sind zwey andere Rechtecke, deren jedes g zur Seite hat, eines aber noch AB, und das andere KE, das leztere liegt auf der schiefen Fläche höher als das erste.

Dieses Prisma nun sey voll Wasser; man sucht den Druck auf die beyden zulezt genannten Seitenflächen.

Aufl. I. Aus (9) ist er für die an AB; $=$ AB. g. $\frac{1}{2}$ AB; und für die an EK; $=$ EK. g. $\frac{1}{2}$ EK; weil er nun auf beyde senkrecht, also mit dem Horizont parallel ist, so treibt der Druck auf die Fläche an EK, das Prisma hinaufwärts, der andere niederwärts, und da dieser stärker ist, so wird das Prisma vermöge dieses Drucks mit einer horizontalen Gewalt $\frac{1}{2}$ g. $(AB^2 - EK^2)$ niederwärts getrieben.

II. Es sey $OLR = \varkappa = R - BAK$; $AB = h$, $BE = f = KN$, so ist $AK = \frac{f}{\cos \varkappa}$; $AN = f. \tang \varkappa = AB - EK$ also $EK = h - f. \tang \varkappa$, woraus man die Grundfläche BEKA (Geom. 42. S. 18. Z.); also das Prisma (Geom. 60. S. 3.) $\frac{2h - f. \tang \varkappa}{2}$ f. g. findet. Das Gewicht dieses Prisma voll Wasser, heisse Q.

III.

III. Der Druck (I) findet sich

$$\tfrac{1}{2}\,g.\,(h^2 - (h - f.\,\text{tang}\,\varkappa)^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}.\,f\,g\,\text{tang}\,\varkappa.\,(2f - h.\,\text{tang}\,\varkappa) = Q.\,\text{tang}\,\varkappa.$$

IV. Es sey q des prismatischen Gefässes Gewicht. Ein fester Körper, dessen Gewicht $Q + q$ wäre, würde von einer horizontalen Kraft $(Q + q).\,\text{tang}\,\varkappa$ erhalten (Stat. 103.). Eine horizontale Kraft, die den nur beschriebenen flüssigen erhalten soll, muß nicht nur das Gewicht $Q + q$, sondern auch den wagrechten Druck (III) erhalten und also $(2.\,Q + q)\,\text{tang}\,\varkappa$ seyn.

Druck auf ein senkrechtes Prisma.

29. Aufg. Von einem hohlen senkrechten Prisma (Geom. 2. T. 4. Erkl.) stehe eine Grundfläche wagrecht, und es sey voll Wasser. Man sucht den Druck auf seine ganze Seitenfläche.

Aufl. Sie besteht aus soviel Rechtecken als des Prisma Grundfläche Seiten hat, die allen gemeinschaftliche Wasserhöhe ist die Höhe des Prisma. Also ist der hier gesuchte Druck auf alle Seiten zusammen (9) des Prisma ganze Seitenfläche, mit seiner halben Höhe multiplicirt.

Druck auf Pyramiden.

30. Aufg. Ein Gefäß voll Wasser, sey eine umgekehrte hohle Pyramide, deren Grundfläche wagrecht steht. Man sucht den Druck auf ihre ganze Seitenfläche.

Aufl. I. Bey jedem der Dreyecke, welche zusammen der Pyramide Seitenfläche ausmachen, giebt ein Perpendikel aus der Pyramide Spitze auf seine Grundlinie zwey rechtwinklichte Dreyecke; aus 12. findet man den Druck auf jedes dieser beyden, und folglich auf das Dreyeck das eine Seitenfläche der Pyramide ausmacht, die Wasserhöhe giebt sich dadurch wie tief die Spitze unter der Grundfläche ist, sie ist also hier die Höhe der Pyramide.

II. Das Perpendikel fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks, nachdem die Winkel dieses Dreyecks beschaffen sind. Im ersten Falle wird das Dreyeck in zwey rechtwinklichte zertheilt, und der Druck auf die Seitenfläche der Pyramide, ist die Summe der Drückungen auf diese beyde Dreyecke; der Unterschied aber im andern Falle.

III. Die Drückungen auf die dreyeckichten Seitenflächen (1) zusammengerechnet geben den gesuchten Druck.

IV. Wenn die Grundfläche eine ordentliche Figur und die Spitze lothrecht unter derselben Mittelpunct ist, so sind alle die Dreyecke (1) gleichschenklicht, und gleich, und der ganze Druck (aus 13.) ist die völlige Seitenfläche der Pyramide, mit $\frac{1}{3}$ ihrer Höhe multiplicirt.

V. Man kann sich vorstellen von einer solchen Pyramide werde eine kleinere ähnliche abgeschnitten, berechnet man alsdenn den Druck

auf

auf die kleine und auf die grosse, jede besonders, so giebt der Unterschied den Druck auf die Seitenfläche der abgekürzten Pyramide.

Druck auf runde Behältnisse.

31. Aufg. Die Linie BA 2. F. drehe sich um die lothrecht stehende Axe CD, und beschreibe so ein rundes Gefäß das mit Wasser gefüllt werde. Man sucht den Druck auf desselben runde Fläche.

Aufl. Es sey CB = f; DA = b; CH = u; HM = y; der Bogen BM = s; so ist $2y\pi$ der Umfang des Kreises, den HM beschreibt, und das Element der krummen Fläche des Gefässes, $= 2y\pi ds$, und der Druck darauf $= 2uy\pi ds$, welches so integrirt werden muß, daß es für $u = o$ verschwindet. Im Integrale $u = c$ gesetzt, giebt den Druck auf das Ganze.

32. I. Ex. Der senkrechte Cylinder.

AB ist hier eine gerade Linie mit CD parallel, also $y = b = f$, $s = u$; der Elementardruck $2b\pi udu$; integrirt $b\pi u^2$ und auf den ganzen Cylinder, $\frac{1}{2}c.\ 2bc\pi$, oder: die halbe Wasserhöhe in seine krumme Fläche multiplicirt.

33. II. Ex. Ein abgekürzter Kegel.

BA ist eine gerade Linie $= \sqrt{(c^2 + (f - b)^2)}$ die ich m nennen will, und $s : m = u : c$ (Geom. 29. S.) also $s = \frac{mu}{c}$; auch, wenn man sich durch M, A, mit DC Parallelen vorstellt, und die

die alsdenn entstehenden ähnlichen Dreyecke betrachtet, $f - y : u = f - b : c$, daher $y = f - \frac{(f-b).u}{c}$ und der Elementardruck $(2uf - \frac{2.(f-b)u^2}{c}).\frac{\pi m du}{c}$; integrirt $\frac{2\pi m}{c}.(\frac{1}{2}fu^2 - \frac{(f-b)u^3}{3c})$

daher für den abgekürzten Kegel

$2\pi mc.(\frac{1}{2}f - \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}b) = 2\pi mc.(\frac{1}{6}f + \frac{1}{3}b)$

Die vorhergehende Rechnung ist so eingerichtet, als wäre $f > y$, und $> b$ oder als wäre der abgekürzte Kegel unten enger als oben. Wenn er aber auch unten weiter als oben ist, bleibt alles noch eben so. Wenn $f = b$, so hat man den Cyliuder (32).

34. III. Ex. Ein ganzer Regel.

Wenn seine Spitze zu unterst gekehrt ist, so ist in (33) f der Grundfläche Halbmesser, $b = o$; $c = a$ seiner ganzen Axe, $m = l$ seiner ganzen Seite, und der Druck $= 2\pi l.a.\frac{1}{6}f = 2f\pi.\frac{1}{2}l.\frac{1}{3}a$ oder des Kegels krumme Fläche (Geom. 64. S. 3. Zus.) in $\frac{1}{3}$ der Axe, oder der Wasserhöhe multiplicirt.

Steht des Kegels Spitze oben, so ist $f = o$; und der Grundfläche Halbmesser $= b$; also der Druck $2\pi l.a.\frac{1}{3}b$, noch einmahl so groß als zuvor.

35. IV. Ex. Ein Abschnitt einer Kugel

werde vom Bogen TD beschrieben, es sey also

PD = c, der Halbmesser = r, man nehme eine willkührliche PL = u; so ist das zugehörige y = $\sqrt{(2r.DL - DL^2)}$, und dDL = −du, daher $\sqrt{(dy^2 + du^2)}$ oder $ds = \frac{rdu}{y}$ und der Elementardruck $2u\pi rdu$, integrirt πru^2, und für den ganzen Abschnitt, $2\pi rc. \frac{1}{2} c$ = des Abschnittes Fläche mit der halben Wasserhöhe multiplicirt. (Geom. 65. S.).

36. Diese halbe Wasserhöhe ist die Hälfte des Halbmessers bey der halben Kugel, und der Halbmesser selbst bey der ganzen. Die Flächen sind, der halben und der ganzen Kugel ihre.

37. Das Wasser könnte höher stehen, als die Fläche des Gefässes reicht, z. E. wenn eine lange Röhre, unten mit einer Kugel, wie man zu Thermometern braucht, voll Wasser wäre, und man desselben Druck auf die Kugel suchte. In diesem Falle wäre der Elementardruck ein Product aus der runden Fläche Elemente, nicht in u, sondern, in die nun davon unterschiedene Höhe des Wassers über diesem Elemente, welche aus der Gestalt des ganzen Behältnisses gegeben seyn müsste. Also würde das Integral eben so, nur durch eine weitläuftigere Rechnung gefunden.

38. Anmerk. Im Bisherigen sind alle hydrostatische Wahrheiten enthalten, die in Belidors Architectura hydraulica I. B. III. Cap. 3, 4, 5, 6. Abtheil. fast 5 Bogen der deutschen Uebersetzung anfüllen. Beym abgekürzten Kegel (bey ihm 385. S.

hier

hier 33.) hat er sich geirrt. Er würde recht haben, wenn ein Paar unendlich nahe Seiten des abgekürzten Kegels auf der Fläche desselben zwischen sich ein Rechteck abschnitten, sie enthalten aber zwischen sich ein trapezium parallelarum basium. Die Untersuchung, was für eine Neigung eine schiefe Fläche haben müsse, damit auf ihr die grösste Menge Wasser in der kürzesten Zeit hinaufsteigen könne, aus Belidors 391. 393. §. schien mir hieher gar nicht zu gehören, und wenn ich Belidors weitläuftige Dunkelheit wohl verstehe, ist er darinne nicht einmahl glücklich gewesen. Noch eine Anwendung von (9) ist folgendes.

39. Aufg. An einem Teiche oder andern Wasserbehältnisse, ist in einer seiner Wände am Boden eine Oeffnung durch die das Wasser abfliessen kann. Sie ist mit einem Schußbrete verschlossen, dessen Breite = b; Höhe = c; das Wasser im Behältnisse hat die Höhe = e über des Schußbrets oberstem Ende. Man sucht die Gewalt mit der das Schußbret muß aufgezogen werden.

Aufl. I. Das Schußbret steht vertical, also ist $\eta = 0$ (4) und des Wassers Druck darauf $\frac{c+2e}{2}$. bc (9). Weil dieser aber auf des Bretes Fläche senkrecht, und folglich horizontal ist, so ist er eigentlich der Erhebung des Bretes nach einer Verticallinie nicht hinderlich. Eine Folge davon aber ist, daß sich das Bret in den Nuthen in denen es auf- und niedergeht, reibt, und wenn dieses Reiben, wie man insgemein annimmt, eine gegebene Verhältniß zum Drucke

hat (Hdh. Mech. I. Th. 3. Abschn. 55. §.), so wird man es aus dem Drucke berechnen können; Es wird z. E. nach der gewöhnlichen Voraussetzung $\frac{c+2e}{2.3}$. bc seyn. Und dazu des Schutzbrets Gewichte addirt, so hat man die Gewalt mit welcher man das Schutzbret erheben muß.

II. Ex. b = 5 Fuß; c = 8; e = 0 so ist der Druck 40. 4 Cubikf. Wasser = 11200 Pfund wenn der Cubikfuß 70 Pf. gerechnet wird. Die Friction also $3733\frac{1}{3}$ Pf. Das Schutzbret ist so hoch als das Wasser.

III. Belidor giebt dieses Exempel 375. §. Sein Uebersetzer macht davon eine ganz unrichtige Anwendung: er stellt sich vor, das Schutzbret zu erheben, sey so viel Gewalt nöthig, als der Druck des Wassers und die Friction zusammen betragen, also 14933 Pf. Wie falsch dieses sey, würde er leicht eingesehen haben, wenn er bedacht hätte, was für einen Druck die Fläche dieses Bretes leiden müsste, wenn es im Wasser stünde, und auf beyden Seiten damit umgeben wäre; der Druck des Wassers auf beyde Seiten betrüge 22400 Pf. wird man glauben daß so viel Gewalt nöthig sey, ein solches Bret vertical aus dem Wasser heraus zu ziehen?

IV. Wenn das Schutzbret so hoch als das Wasser ist, wie in II; und nun aufgezogen wird, so wird immer je höher es herauf kömmt, ein geringerer Theil des Bretes, von Wasser das

in

in geringerer Höhe darüber steht, gedrucket. Es sey das Gewicht eines Cubikfusses Wasser $= p$; so ist der Druck auf das Bret wenn solches ganz zu unterst stehet $= \frac{a^2 bp}{2}$. Ist aber nun das Schußbret so weit erhoben, daß sein unterstrs Ende nur die Tiefe x unter der Wasserfläche hat, oder um die Höhe $a - x$ gestiegen ist, so ist der Theil der Fläche des Bretes der vom Wasser gedruckt wird bx, und der Druck darauf $\frac{bx^2 p}{2}$. Der Druck verhalte sich zur Friction $= 1 : n$; so ist bey diesem veränderlichen Stande des Bretes die Friction $\frac{nbx^2 p}{2}$. Heisst also q das Gewicht des Bretes, so ist $q - \frac{nbx^2 p}{2}$ die bewegende Kraft mit der es sinken will, wenn man es in diesem Augenblicke nicht mehr hielte. Wäre aber nicht $q > \frac{nbx^2 p}{2}$ so würde es nicht sinken, sondern müsste mit einer Gewalt, welche die Friction zu überwinden nöthig ist, hinunter gestossen werden; diese Gewalt muß beym Hinuntergehen immer grösser werden, weil das Reiben wächst. Aus der entgegengesetzten Ursache ist beym Heraufziehen immer weniger Gewalt nöthig. Die beschleunigende Kraft, mit welcher das Bret in jedem Augenblicke niederwärts getrieben wird ist $1 - \frac{nbx^2 p}{}$

$\frac{nbx^2p}{2q}$ (Hdh. Mech. I. Abth. 49.) woraus man den Fall des Bretes berechnen könnte, wenn es der Mühe werth wäre (Hdh. Mech. I. Abth. 69.).

Von Dämmen.

40. Aufg. BHD 8. Fig. sey der Durchschnitt eines Dammes, mit einer lothrechten Ebene die auf des Dammes Ebene senkrecht steht. Die Neigung der Ebene des Dammes sey HBD $= \beta$; das Wasser stehe von B bis an die wagrechte Linie NO; man sucht seinen Druck auf den Damm.

Aufl. Die Länge des Dammes nach einer Linie gemessen die durch B auf der Ebene HBD senkrecht stünde, heisse c; so ist der Theil des Dammes den das Wasser drückt, ein Rechteck, dessen Grundlinie c, die andere Seite BO; und da das Wasser die Höhe BN $=$ h über der Grundlinie hat; der Druck ist also BO. c. $\frac{1}{2}$h (9) $=$ $\frac{h^2 c}{2. \sin \beta}$ weil $\sin \beta = \frac{h}{BO}$.

41. Dieser Druck ist nach der auf BH senkrechten Linie NP gerichtet. Man stelle ihn durch diese Linie vor, und zerlege ihn in den lothrechten QP, und wagrechten NQ; weil PNQ $=$ R $- \beta$ und NPQ $= \beta$ also $\frac{NQ}{NP} = \sin \beta$ so ist der wagrechte Druck $\frac{h^2 c}{2. \sin \beta} . \sin \beta = \frac{h^2 c}{2}$; vermöge desselben würde der Damm horizontal fort-

fortgeschoben werden, wenn er diesem Drucke ausweiche, der lothrechte $\frac{h^2 c}{2. \sin \beta} . \cos \beta = \frac{h^2 c}{2}$. cot β druckte den Damm auf den Horizont an.

42. Peter von Bleiswyck in s. Specimine physico mathemat. inaugur. de Aggeribus; Leiden 1745; ist vornehmlich beschäfftiget zu untersuchen, wie schwer ein Damm seyn müsse, der mit dem Boden sonst nicht zusammen hienge, und nur durch seine Last sich erhielte, daß ihn der erwähnte wagrechte Druck des Wassers nicht fortschieben könnte. Er berechnet in dieser Absicht, was für Gestalten die Profile solcher Dämme, aus Materie, deren eigne Schwere bekannt ist, haben müsste. Wenn ich diesen Schriftsteller recht verstehe, scheint er mir seine Untersuchungen nicht gehörig angestellt zu haben. Er sucht nähmlich einen Damm dessen Last so groß ist als der vorerwähnte wagrechte Druck. Würde sich ein solcher Damm oder ein noch viel schwererer auf einem vollkommen glatten Boden mit dem er nicht zusammen hienge, gegen den horizontalen Druck des Wassers halten? So wenig als einen schweren Mann, der auf Schrittschuhen auf dem Eyse stehet, die Last seines Körpers gegen einen geringen horizontalen Stoß hält. Diese Betrachtung sollte einem Holländer doch nicht entwischt seyn. Der lothrechte Druck des schweren Dammes, und der wagrechte des Wassers sind einander nicht entgegengesetzt, also wird

der Damm diesem Drucke des Wassers, nicht wie ein schwerer, sondern nur wie ein träger Körper wiederstehen. Sind aber der Boden, und des Dammes untere Fläche, nicht vollkommen glatt, so verursacht die Last des Dammes ein Reiben, man müsste aber bey Berechnung dieser Last nicht vergessen, was die Materie des Dammes von ihrer Schwere im Wasser verlieret, und nach dieser Betrachtung zu dem übrigen Gewichte noch den vorhin erwähnten lothrechten Druck des Wassers auf den Damm setzen; beyden zusammen wäre das Reiben proportionirt (Höh. Mech. III. Abschn. 8, u. f.). Dieses würde vermuthlich ganz andere Bestimmungen geben als Bleiswyk hat. So hat Albert Brahms die Sache richtig betrachtet; Anfangsgr. der Deich- und Wasserbaukunst I. Th. 31 §.

43. Bestünde der Damm etwa aus Bretern, die man durch Strebepfeiler KL gegen den Druck des Wassers unterstützen wollte, so wäre der bequemste Ort, diese Strebepfeiler anzubringen im Mittelpuncte des Drucks (20), also dergestalt daß $OK = \frac{2}{3} OB$ (24). Dieß hat Bleiswyk richtig erinnert a. a. O. §. 33, obwohl wie er anführt, die unwissenden Bauleute es nicht beobachten.

44. **Anm.** Die Dämme müssen nicht nur den Druck stillstehenden Wassers, sondern auch die Gewalt anstossender Wellen aushalten, wovon ich hier nichts sagen kann. Wie ihre Gestalt in dieser Absicht beschaffen seyn muß, untersucht Hr. Joh. Mich. Hube;

Hube; in der Abhandlung: wie ein festerer und stärkerer Damm als sonst gebräuchlich gewesen aufgeführt werden kann, welche bey der naturforschenden Gesellschaft in Danzig 1760. den fürstlich Jablonowskischen Preiß erhalten hat; 15. u. f. §. Diese Schrift befindet sich in der Sammlung der über die fürstl. Jablonowsk. Aufgaben gekrönten Preißschriften. Danzig 1767.

Von der Festigkeit der Röhren.

45. Ein Gefäß dessen Höhe NH ist 10. Fig. habe am Boden eine Röhre, deren Länge NP ist, ihr Ende OP sey verschlossen, und ihr Halbmesser sehr geringe in Vergleichung mit der Höhe des Gefässes: man fülle das Gefäß mit Wasser, welches auch in die Röhre treten wird. Jede Stelle in der runden Wand der Röhre wird alsdenn nach einer Richtung, die auf diese Stelle senkrecht ist, hinauswärts von der Röhre, dergestalt gedruckt werden, als stünde senkrecht über dieser Stelle eine Wassersäule, deren Höhe, die Höhe des Wassers im Gefässe ist. Eben damit ich diese Höhe für alle Stellen der Röhre gleich groß annehmen darf, fodere ich, daß der Röhre Durchmesser in Vergleichung mit der Höhe des Gefässes sehr gering ist. So ist klar, daß jede Stelle der Röhre auswärts getrieben wird, und die Röhre an selbiger Stelle eine Oefnung bekommen wird, wo das Wasser herausdringt, wenn diese Stelle mit der umliegenden, nicht wenigstens so stark zusammenhängt, daß dadurch diejenige Gewalt aufgehalten wird,

welche der Druck des Wassers anwendet, sie herauszutreiben.

46. Von der Gestalt einer solchen Stelle würde man etwa folgendermassen einen bestimmten Begriff bekommen: Ein Kreis, dessen Hälfte die 9 F. vorstellt, sey ein Querschnitt der Röhre, also C in der Axe der Röhre, welche Axe auf der Ebene des Kreises senkrecht steht. Man nehme in ihm einen willkührlichen Bogen AEB; durch die Halbmesser CA; CB; und die Axe der Röhre lege man zwo Ebenen, welche auf des Kreises Ebene senkrecht stehen, und ein Stück von der Wand der Röhre, zwischen sich enthalten werden. Die Grösse dieses Stückes bestimmt man völlig, wenn man sich einen andern Querschnitt der Röhre in einer willkührlichen Weite von vorigen vorstellt. Alsdenn ist das Stück der Wand zwischen folgenden Gränzen enthalten: der Bogen AB; ein anderer der ihm parallel und gleich; eine gerade Linie durch A, und eine andere durch B; jede mit der Axe der Röhre parallel, und so lang als beyder Querschnitte Entfernung. Dieses Stück wird also die Stelle der Röhre seyn, von der ich geredet habe. ABba 12. Fig. mag es andeuten. (Man begreift leicht, daß bey Figuren, die nur meine Gedanken erläutern sollen, nichts darauf ankömmt, die Röhren der 12. oder 10. Fig. so groß zu zeichnen, daß die 9. F. ein Querschnitt von ihnen seyn könnte, also wird das Unproportionirliche, welches die Sparsamkeit des Platzes erfo-

erfodert, hier wohl nicht anstössig seyn). Wenn nun dieses Stück ABba ohne Aenderung seiner Gestalt, aus der Röhre soll herausgetrieben werden, so muß es in den Gränzen aA; AB; Bb; ba; von den übrigen der Röhre abgesondert werden. Also scheint es, als müsste man betrachten wie stark es bey AB; ab; imgleichen wie stark es bey Aa; Bb; mit der übrigen Wand zusammenhängt. Was nun den Zusammenhang bey AB betrifft, so ist klar, daß man sich solchen so vorstellen kann, als würden die Theile des Stücks die an AB liegen, von den Theilen der Wand die an AB liegen, und gegenseitig, diese von jenen angezogen, welches nach Linien geschieht, die mit aA parallel sind. Wird nun das Stück durch den Druck des Wassers herausgetrieben, so sondern sich die erwähnten Theile jeder von den anliegenden mit denen er zusammenhieng nach einer Richtung ab, welche auf die Richtung nach der sie zusammenhängen senkrecht ist; denn die Kraft die sie zusammenhängt, würkt nach der Länge der Röhre, und die Kraft die sie trennt, auf die Länge der Röhre senkrecht. Dieser trennenden Kraft ist jene zusammenhängende nicht hinderlich, weil ihre Richtungen einander gar nicht entgegengesetzt sind. Zur Erläuterung erinnere man sich an den bekannten Versuch, wie gläserne, marmorne, u. d. g. Platten zusammenhängen. Sie glitschen leicht eine an der andern ab, obgleich viel Gewalt nöthig ist, sie senkrecht von einander zu reissen.

Sol-

Solchergestalt hat man den Zusammenhang des Stücks mit der übrigen Röhre, in AB; ab; nicht in Betrachtung zu ziehen. Aber wie es in Aa mit AVva; in Bb; mit BWwb zusammenhängt, das muß weiter erwogen werden.

47. Dieses kann man sich nun so vorstellen. Wenn der Bogen AB in gleiche Elemente wie Ii 9. Fig. getheilt ist, so drucke auf jedes solche Element, nach der Richtung des Halbmessers, hinauswärts eine Kraft = g; Man suche also was aus allen diesen Kräften zusammen, für eine Kraft entsteht, den Bogen in A und B von dem übrigen Kreise abzureissen, und wie groß sein Zusammenhang in A und B mit dem übrigen Kreise seyn muß, dieses Abreissen zu verhindern.

48. Will man dieses auf das Stück ABba 12. F. anwenden, so darf man sich nur die Kraft g in allen Elementen eines unendlich schmahlen Rechteckes angebracht vorstellen, von dessen Seiten eine = Ii, die andere = Aa ist. Man darf also nur, was für 47. gefunden wird, mit der Länge Aa multipliciren.

49. Die Aufgabe (47) läßt sich folgendergestalt auflösen:

I. CEM halbire den Bogen AEB oder den Winkel ACB; weil die beyden Hälften EA; EG, von gleichen Kräften, auf gleiche Art gedruckt werden, so werden sie, wie gleiche und gleich beschwerte Arme eines Hebels im Gleichgewichte seyn, wenn der Punct E nicht weichen

kann,

kann, und so wird der Bogen AEB, zum vorausgesetzt, daß er sich durch die Kräfte die in ihn würken, nicht flächer drucken oder gar zerbrechen lässt, in seiner Stelle bleiben, wenn er auch gleich bey A und B mit dem übrigen Umfange nicht zusammenhängt. Ich will also erstlich suchen, wie stark eine Kraft seyn müsse, die man in E nach der Richtung EC anbrächte, diesen krummlinichten Hebel AEB so zu erhalten, daß seine Arme EA, EB unter sich im Gleichgewichte bleiben, und alle die Kräfte zusammen, die, jede in jeder Stelle des Hebels, senkrecht auf ihn würken, mit der Kraft nach EC im Gleichgewichte sind.

II. El sey ein unbestimmter Theil des Bogens EH, und EK der gleiche Theil des Bogens EB; der Winkel ECI = ECK heisse ζ; der Halbmesser CE = r; also sey der Bogen El = rζ und sein Element li = rdζ; dieses Element wird also nach Cl von einer Kraft grdζ getrieben, und das gleiche bey K, von einer gleichen Kraft nach CK. Man zerlege die Kraft nach Cl; in eine nach Cl und eine nach ll eben so, lässt sich die Kraft nach CK; in eine nach Cl; und eine nach lK zerlegen; es ist klar, daß die Kräfte nach Cl; CK; gleiche Kräfte nach Cl; und auch gleiche nach ll, lK; geben werden; aber die Kräfte nach Cl stimmen zusammen und geben eine Kraft, die ihrer Summe gleich ist; die nach ll; lK; sind einander entgegengesetzt, und heben einander auf, weil man annimmt der Bogen sey so fest, daß sich

seine Gestalt IEK nicht ändern läßt. Wie man also diese letztern zu suchen nicht nöthig hat, so entsteht aus der Kraft nach CI; die Kraft $\frac{\text{rgd}\zeta.\,\text{CI}}{\text{CI}} = \text{rgd}\zeta.\,\text{cos}\zeta$ nach CI oder nach CE; weil nun $\text{d}\zeta.\,\text{cos}\zeta = \text{d sin}\zeta$ (An. Un. 281.) so ist diese Kraft = gr. sin ζ für den Bogen EI; oder die Kräfte g, die in alle Stellen des Bogens EI wirken, geben zusammen eine Kraft gr. sin ζ nach CE. Also geben diese Kräfte in den Bogen IEK zusammen eine Kraft 2 gr. sin ζ nach CE; Und wenn ich ECA = ECB = φ setze, so geben diese Kräfte am Bogen AEB zusammen eine Kraft 2 gr. sin φ nach CE; so groß ist also die Kraft nach CE (!) oder, mit dieser Kraft wird der Punct E nach EM getrieben, wenn ihn keine Kraft nach EC; und kein Zusammenhang des Bogens AEB mit dem übrigen Umfange in A und B zurückhält.

III. Unter diesen Umständen wird der Bogen AEB, ohne Aenderung seiner Gestalt, dergestalt fortgetrieben werden, daß sein mittelster Punct sich auf der Linie CE weiter hinaus bewegt; er ist alsdenn nicht groß genug den Winkel ACB so zu begränzen wie er jetzo thut, seine beyden Endpuncte liegen nun zwischen den verlängerten Linien CA, CB; In dem ersten Augenblick also da er abreißt, sondern sich seine beyden Endpuncte, von dem Endpuncte des übrigen Kreises, nach Richtungen ab, die auf CA, CB, senkrecht stehen. Sollte nun dieses Abreissen, durch

den

den Zusammenhang des Bogens mit dem übrigen Kreise verhindert werden, so müssten die Kräfte, die es hindern sollten, auch bey A und B auf die dasigen Halbmesser senkrecht stehen, die Richtungen dieser Kräfte liessen sich also durch die Tangenten an A, B, ausdrücken, die CM in D schneiden.

IV. Man stelle sich also vor, der Punct D werde nach ED mit einer Kraft 2 gr. sin φ getrieben (II), nach DA, DB, trieben ihn gleiche Kräfte jede $=q$; bestimmt man nun q so, daß diese drey Kräfte im Gleichgewichte sind, so findet sich, wie stark der Zusammenhang des Bogens AEB, mit dem übrigen Kreise, wie groß die Festigkeit des Kreises seyn muß, damit durch die Kräfte g, der Bogen AEB nicht abgerissen wird. Wäre diese Festigkeit noch stärker, so würde deswegen doch der Punct D nicht nach DC getrieben werden, denn sie ist nur ein leidender Widerstand (Stat. 29.).

V. Man zerlege also die Kraft q nach DA, in eine nach $DL = q.\ \sin\varphi$ und eine nach $LA = q.\ \cos\varphi$; eben so die Kraft q nach DB, in eine nach $DL = q.\ \sin\varphi$ und eine nach $LB = q.\ \cos\varphi$; (weil $DAL = R - CAL = ACL$) die nach LA, LB, heben sich auf, der anderen beyden Summe $2q.\ \sin\varphi$ muß der Kraft nach DM gleich gesetzt werden. Dieses giebt $q = gr$.

Oder, kürzer so:

$2.\ g.\ r.\ \sin\varphi : q = \sin ADB : \sin ADC = 2.\ \sin ADC.\ \cos ADC : \sin ADC = 2.\ \sin\varphi : 1.$

VI.

VI. Man hat hiebey den Bogen AB blos als eine Linie ohne einige Breite betrachtet. In der Anwendung wird man sich einen Ring zwischen zween Kreisen vorstellen, die um einen Mittelpunct mit CA; CF, beschrieben sind, und q wird die Kraft seyn, mit welcher das Stück AFGB sowohl bey AF als bey BG mit den übrigen zusammenhängen muß.

VII. Dieser Ring aber wird folgende Betrachtungen veranlassen: wenn die Kraft g, auf A nach CA wirkt, so kann man mit gleichem Rechte sagen, sie wirke nach eben der, nur verlängerten Richtung auf F, ohngefähr wie, wenn AF ein Stab wäre, eine Kraft die diesen Stab in A nach der Richtung AF drückte, auf den Punct F eben so wirken würde, als wenn sie diesen Punct F, unmittelbar nach der verlängerten AF, drückte. Solchergestalt ist es einerley, ob man sich vorstellt die Kräfte g wirken auf den Bogen AB oder ob man sagen will sie wirken auf den Bogen FG.

Wenn man nun die Kräfte als auf den Bogen AB wirkend betrachtet, und annimmt er hänge bey A und bey B, an seinem übrigen Kreise mit einer Kraft = g. CA so bleibt dieser Bogen mit seinem übrigen Kreise, und alsdenn auch das keilförmige Stück AFGB mit dem übrigen Ringe vereinigt, ohne daß von A weiter hinaus nach F zu, oder von B weiter hinaus nach G zu, einiger Zusammenhang nöthig ist.

Betrachtet man aber die Kräfte als auf den Bogen FG wirkend, und nimmt an er hänge in F und G, mit seinem übrigen Kreise, mit einer Kraft = g. CF zusammen, so folgt wieder aus V; daß dieser Bogen mit seinem Kreise, und folglich das keilförmige Stück AFGB mit dem übrigen Ringe beysammen bleiben wird, wenn auch gleich von F nach A zu, und von G nach B zu sonst kein Zusammenhang wäre. Das keilförmige Stück bleibt nähmlich in seiner Lage, ohne von den Kräften g herausgetrieben zu werden, es mag allein in A und B; oder allein in F und G gehalten werden.

Wenn die Breite des Ringes in Vergleichung mit CA nichts merkliches beträgt, so wird es einerley seyn, ob man seine Festigkeit durch g. CA; oder durch g. CF ausdrücken will.

Ist aber die Breite beträchtlich, so sind beyde Ausdrückungen nicht gleichgültig. Man wird also hier eine Bestimmung der Festigkeit ohngefähr zu geben, das arithmetische Mittel zwischen den Festigkeiten des äusern und des innern Bogens nehmen, und des breiten Ringes Festigkeit $\frac{1}{2}$ g. (CA + CF) setzen.

VIII. Wenn man also die Breite des Ringes beyseite setzt, oder sie nach VII; in die Rechnung bringt, so läßt sich das bisherige, auf eine Röhre deren Länge k wäre, nach (48) so anbringen: die Kraft welche eine solche Röhre ihrer Länge nach spalten sollte, müßte grk seyn.

50. Daniel Bernoulli Hydrodynamicae Sect. II. §. 18. nimmt folgendes als einen in der Mechanik erwiesenen Satz an, ohne Beweiß und Erläuterungen beyzubringen: Eine Röhre NO, wie in (45) beschrieben worden, werde von dem Wasser im Gefässe NH 10. Fig. dergestalt gedehnt, als ob sie 11. Fig. in eine ebene Platte QS ausgebreitet wäre, und an ihr soviel Gewicht T hienge, als das Wasser hätte, das einen Kasten ausfüllen könnte, dessen drey Seiten, die Höhe des Wassers NH, die Länge der Röhre NO; und ihr Halbmesser wären.

51. Weil g. in 47. gegenwärtig das Gewicht einer Wassersäule andeuten kann, deren Höhe NH = h, und die Grundfläche eine willkührliche Stelle der Röhre ist, so erhellt, daß Bernoullis Satz (50) mit (49. VIII.) einerley seyn wird, wofern man annimmt es gehöre einerley Gewalt dazu die Röhre durch den Druck von innen heraus, senkrecht auf ihre Fläche zu zersprengen und die Platte ourch das Gewicht zu zerreissen. Bernoulli nimmt dieses stillschweigend an. Ich will den Gebrauch den man von den bisherigen Lehren unter dieser Voraussetzung machen kann zuerst anzeigen.

52. Vorläufig muß ich erinnern, daß es einerley seyn wird, ob die Röhre NO wagrecht an das Gefäß gesetzt ist, wie die 10. Fig. darstellt, oder ob man eine Röhre senkrecht an das Gefäß gesetzt hätte, die mit dem Gefässe einerley

Axe hätte, oder wie sich der letzte Fall sinnlicher vorstellen liesse, ob man sich einen Cylinder, oben und unten mit einem Boden vorstellen wollte, dessen Axe lothrecht wie die Boden wagrecht stünden, in den obern Boden ein hochhinaufgehendes Gefäß eingefügt wäre, wie das dessen Höhe in der 10. F. NH ist, und alsdenn dieses Gefäß und der Cylinder voll Wasser gegossen würde. Man könnte alsdenn das Gefäß eine Röhre, den Cylinder eine Trummel nennen, und versuchen wie hoch das Wasser in der Röhre stehen könnte, ohne daß die Trummel in ihrem runden Umfange an irgend einem Orte zerbörste.

53. Der Trummel Halbmesser heisse r; und man setze sie zerberstet an einer gewissen Stelle, wenn das Wasser über diese Stelle die Höhe h hat. Man wird sich diese Stelle ohngefähr so einbilden können, wie das Stück ABba der 12. F. in (46) ist betrachtet worden, wovon ich AB die Breite Aa die Länge nennen will; wenn sich das Stück in der Trummel befindet, so geht die Länge nach einer verticalen Richtung, die Breite nach einer horizontalen, und wenn die Trummel keine allzugrosse Oeffnung bekömmt, so wird man h für die Höhe des Wassers sowohl über AB als über ab annehmen dürfen. Die Festigkeit der Trummel, die Stärke vermöge der das herausgetriebene Stück in Aa und in Bb mit dem übrigen Umfange der Trummel zusam-

men-

menhingen, wäre alsdenn h. r. Aa (49. VII. und 51.).

54. Soll nun eine andere Trummel den Halbmesser R, haben, und zerbersten, wenn über einer gewissen Stelle von ihr das Wasser die Höhe H hätte, bekäme sie hiebey eine Oeffnung, deren Länge so groß als die Länge der vorigen, = Aa wäre, so würde die Festigkeit dieser Trummel auf eben die Art durch H. R. Aa ausgedrückt werden.

55. Bestehen beyde Trummeln aus einerley Materie, von gleicher Dicke, so kann man wohl annehmen, daß der einen Theile der Länge nach so stark zusammenhängen als der andern ihre, das ist, daß auf die beschriebene Art ein Stück von der Länge Aa aus der einen herauszutreiben, so viel Gewalt gehört, als ein gleich langes Stück aus der andern herauszutreiben. Auf die Breite AB kömmt hier nichts an, weil die Grösse des Bogens AB in der Festigkeit nichts bestimmt (49. V.). Also ist h. r = H. R und wenn man h, r, aus einer Erfahrung hat, so lässt sich eine der übrigen beyden Grössen aus der andern berechnen.

56. Ex. Mariotte (*) bediente sich einer bleyernen Trummel; sie hatte einen Fuß im Durchmesser, das Bley war $2\frac{1}{2}$ Linie dicke. Sie trug 100. Fuß hoch Wasser, ohne eine Oeffnung zu bekommen, doch ward ihre Wand auswärts

(*) Du Mouv. des eaux V Part II. Disc. Oeuvres de M. Mariotte. Haag. 1740. p. 472.

wärts gebogen. Er ließ das Bley an einer Stelle abschaben, bis es noch nicht völlig eine Linie dicke blieb. Da ward es an dieser Stelle auswärts gebogen, und bekam eine drey Zoll lange Oeffnung (die Länge in der Bedeutung §3. genommen) wodurch alles Wasser auslief. Ich würde also $h = 100$; $r = 1$ setzen, und wenn ich berechnen wollte, wie hoch eine Trummel deren Halbmesser $\frac{1}{2}$ Fuß, das Bley an ihr eben so dick wäre; würde ich $R = \frac{1}{2}$ annehmen, und $H = 200$ Fuß finden. Es würde einerley seyn, ob man sich hiebey eine Trummel oder eine wagrechte Röhre wie NO 10 Fig. vorstellte (52).

57. Die Längen der Oeffnung habe ich in 51; 50, einerley gesetzt, weil die Röhre allemahl geborsten ist, so klein auch die Länge ihrer Oeffnung wäre, und weil man also hier nicht darnach fragt, wie lang ihre Oeffnung wird, obgleich sonst eine kurze Oeffnung eher zu verstopfen wäre als eine lange. Wollte man diese Längen in Betrachtung ziehen, und l, L, nennen, so verhielten sich die Festigkeiten wie h. r. l : H. R. L.

58. Die bisherige Untersuchung brauchbarer zu machen, kann man noch folgendes verlangen. Wenn h und r durch eine solche Erfahrung für eine Trummel oder Röhre, von einer gegebenen Dicke sind gefunden worden, daraus H oder R für eine zu berechnen deren Wand eine andere Dicke hat; z. E. aus Mariottens Versuche zu berechnen, wie hoch eine bleyerne Röhre deren

Durchmesser 6 Zoll wäre, das Wasser tragen könnte, wenn das Bley um sie 2 Linien dick wäre.

59. Da auch die Versuche mit Röhren kostbar sind, so werden sich die Rechnungen auf wohlfeilere Versuche gründen lassen, wenn man Bernoullis Vergleichung der Röhre mit der Platte annehmen darf (51), dieses will ich mit Versuchen erläutern, die Bernoulli selbst, in dieser Absicht beygebracht hat.

60. Ein runder Kupferdrat, der $\frac{2}{11}$ pariser Linien im Durchmesser hatte, zerriß von 18. Nürnberger Pfunden. Eine bleyerne Platte (etwa von der Gestalt der 11. Fig.) die nach RS; $\frac{5}{4}$ Lin. lang, und $\frac{1}{131}$ Lin. dick war, zerriß von 7 Lothen.

61. Bey dem Gebrauche, den B. von diesen Versuchen macht, setzt er wieder stillschweigend voraus daß sich bey einerley Materie, die Gewalt die man anwenden muß sie zu zerreissen, wie die Fläche verhält, die man von einer gleichen absondern muß; daß z. E. einen Drath zu zerreissen, dessen Durchmesser noch einmahl so groß wäre, 4. 18 Pfund erfodert würden, weil man alsdenn ein paar Flächen von einander sondern müsste, deren jede viermahl so groß wäre, als eine der beyden die B. trennte. Diese Voraussetzung gründet sich darauf, daß ein Theilchen der Materie von dem mit welchen es zusammenhängt zu trennen eine gewisse Kraft erfodert wird, daß sich also die ganze Kraft die erfodert wird eine Menge solcher gleichen Theilchen von ei-

ner gleichen Menge anderer zu trennen, wie die Menge der Theilchen verhält; die Menge aber verhält sich ohnstreitig wie die Fläche. Was bey dieser Voraussetzung zu erinnern ist will ich nebst andern Schwürigkeiten weiter unten vortragen.

62. Ist also bey einer gewissen Materie, ee die Fläche, die von n Pfunden abgerissen wird, und wird eben so, bey einer andern Materie die Fläche EE von N Pfunden abgerissen, so werden sich durch diese beyden Erfahrungen, die Festigkeiten beyder Materien mit einander vergleichen lassen. Wenn man z. E. sagt: Kupfer sey fester als Bley, so versteht man hier ohnstreitig, daß ein paar Kupfertheilchen, stärker zusammenhängen, als ein paar Bleytheilchen, wenn beyde Paare in gleichen Flächen an einander liegen, und wieviel die Gewalt grösser ist, mit der die Kupfertheilchen zusammenhängen, so vielmahl grösser ist des Kupfers Festigkeit. Nun ist aus 61. anzunehmen, daß bey der andern Materie, ein Paar Flächen, jede = ee, mit $\frac{N.\ ee}{E.E}$ Pfunden würde getrennt werden. Es verhält sich also die Festigkeit der ersten Materie, zur Festigkeit der andern, wie $n : \frac{N.\ ee}{EE}$ das ist wie $\frac{n}{ee} : \frac{N}{EE}$, oder die Festigkeit einer Materie, verhält sich wie das Gewicht das sie zerreisst, durch die abgerissene Fläche dividirt. Festigkeit,

Gewicht, Fläche, sind hier nähmlich ohngefähr so was, wie beschleunigende Kraft, bewegende Kraft und Masse (Höhere Mech. I. Abschnitt III. C.).

63. Nimmt man bey Bernoullis Versuche die kleinen Buchstaben zum Kupfer, die grossen zum Bley, und nennt die Linie = 1; das Pfund = 1, die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise = 1 : π; So ist

n	e. e	N	E. E
18	$\frac{1}{121} \cdot \pi$	$\frac{7}{32}$	$\frac{5}{4.131}$

also die Verhältniß der Festigkeiten

$= \frac{18.121}{\pi} : \frac{7.4.131}{5.32}$; der letzte Bruch läßt sich mit 4 aufheben, und die Verhältniß durch $\frac{18.40.121}{\pi.917} : 1$ ausdrucken.

Nun ist

log (720. 121) = 4,9401179
log (π. 917) = 3,4595192

1,4805987

gehört zu 30, 24; Sovielmahl wäre Kupfer fester als Bley. Bernoulli setzt: mehr als 28 mahl.

64. Wenn man aus der ersten Materie in (62) eine Platte wie 11. Fig. macht, deren Länge RS = k; die Dicke = c; so wird die Fläche dieser Platte die durch das Gewicht T abgerissen würde = ck seyn, und also fände sich T

=

$= \frac{c.k.n}{e.e}$ Pfund. Die eigene Last der Platte, wenn solche etwa was zum Abreissen beytrüge, wird hie beyseite gesetzt.

65. Krümmt man also diese Platte in eine Röhre wie NP 10. Fig. daß QR den Umfang der Grundfläche der Röhre giebt, so wird diese Röhre ihrer ganzen Länge nach bersten, wenn T (64) so viel beträgt, als das Gewicht des Wassers, das den Raum hrk ausfüllt (51) oder: das Wasser darf über ihr nicht höher als auf die Höhe h stehen, wenn sie nicht bersten soll.

66. Diese Höhe findet man so: Ein Würfel dessen Seite $= a$; voll Wasser wiege m Pfund, so wiegt der Raum hrk mit Wasser gefüllt $\frac{mhkr}{a^3}$ Pfund, dieses Gewicht $= T$ gesetzt (64) giebt $h = \frac{nca^3}{mree}$.

67. Ex. Wie hoch wird eine kupferne Röhre, 1 Fuß im Durchmesser, und $\frac{2}{11}$ Linien dick, Wasser halten, wenn der Cubikfuß Wasser 70 Pfund wiegt?

Also

a	m	r	c	e^2	n
1	70	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11.144}$	$\left(\frac{1}{11.144}\right)^2 .\pi.$	18

Das letzte aus (60). Also im Werthe von h (66) der Dividendus $= \frac{18.2}{11.144} = \frac{1}{44}$; Di-

$$\text{visor} = 70.\tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{11.144}\right)^2.\pi.\text{wo } 11.144$$

$$= 1584$$

log 1584 = 3,1997552
verdoppelt = 6,3995104
von log π = 0,4971499

0,0976395 − 6
addirt log 35 = 1,5440680

log Divis. = 0,6417075 − 5
log Divid. = − 1,6434527

log h = − 2,2851602 + 5
= + 2,7148398

Dieser Logarithme gehört zu 518,6; also würde das Wasser eine Höhe NH von 518 Fuß haben können, ohne daß die Röhre NP börste.

68. Soll eine Röhre, deren Halbmesser = R; die Dicke ihrer Wand = C ist, die Wasserhöhe H tragen, so ist aus (66) $H = \frac{na^3.C}{m.e.e.R.}$ folglich $H = \frac{r.h.C}{c.R}$.

69. Ex. das Bernoulli ebenfalls beybringt. Eine Canone, deren Caliber 3 Zoll, sey 3 Zoll dick, oder, wenn der Ring 9 Fig. ihr Durchschnitt wäre, so sey CA = $\frac{3}{2}$ Zoll = $\frac{1}{8}$ Fuß und AF = 3 Zoll = $\frac{1}{4}$ Fuß. Wollte man nun H für diese Canone berechnen, so brauchte man, wegen der beträchtlichen Breite des Ringes nach

49. VI; statt R hier $\frac{CA + CF}{2} = CA + \frac{1}{2}AF$

=

$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; und weil auch $C = \frac{1}{4} = R$; so ist (67) $H = \frac{1}{2}$. 518. 11. 72 = 518. 11. 36 = 205. 128. So viel Fuß hoch Wasser trüge die Canone ohne zu bersten, mehr als 6000 mahl so viel als die Atmosphäre trägt, wenn man annimmt, diese halte das Wasser 30 Fuß hoch. Die Gewalt mit der sich das entzündete Pulver ausdehnt, muß also mehr als 6000. stärker als der Druck der Atmosphäre seyn, wenn die Canone davon springen soll.

70. Bey einer gegebenen Materie, ist $\frac{n \cdot a^3}{m\,e\,e}$ $= b$ eine beständige Grösse, die man einmahl für allemahl berechnen könnte, da denn $h = \frac{bc}{r}$ ist.

71. Ex. Beym Bleye wäre aus (60) den Fuß = 1 und das Pfund = 1; gesetzt, $ee = \frac{5}{4.131.144.144}$ $n = \frac{7}{32}$; ferner $a = 1$; $m = 70$ also $b = 131.51,84$ davon der Logarithme 3,8319363 allemahl zu $\log c - \log r$ addirt, $\log h$ giebt. Vermöge des Logarithmen findet sich auch $b = 6791$ Fuß, wollte man nun h für eine bleyerne Röhre berechnen, die 1 Fuß im Durchmesser, 1 Linie zur Dicke hätte, so wäre $c = \frac{1}{144}$ $r = \frac{1}{2}$ und $h = \frac{b}{72}$ welches sich 94,32 findet. Diese Röhre würde also über 94 Fuß hoch Wasser tragen. Bernoullt hat

seine

seine Rechnung vermuthlich aus der Höhe die eine kupferne Röhre trüge und der Vergleichung der Festigkeiten des Kupfers und des Bleyes hergeleitet und deßwegen fast 99. Fuß gefunden, weil er die Festigkeit des Bleyes etwas zu groß angenommen hat (63). Er bemerkt daß seine Rechnung ziemlich mit Mariottes Versuche (56) übereinstimmt. Aber diese Uebereinstimmung ereignet sich nur von ohngefähr, denn Mariotte setzt zwar den Cubikfuß Wasser 70 Pf. hat aber ohnstreitig keine Nürnberger Pfund gebraucht. Wie viel Gewicht Mariotte dem Cubikfuß gegeben, habe ich so berechnet. Er giebt a. a. O. dem cylindrischen Fusse 55 Pf. das ist: einem Cylinder der einen Fuß zum Durchmesser und auch zur Höhe hat, dessen Innhalt also $\frac{a^3 P}{4}$ ist wenn 1 : P die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bedeutet, wird dieses Cylinders Gewicht 55 Pf. gesetzt, so giebt die Proportion $\frac{a^3 P}{4} : a^3 = 55 : m$; $m = \frac{4 \cdot 55}{P} = 70,13$ wo man zu Erleichterung der Rechnung $\frac{1}{P}$ aus Geom. 44. S. 5. Zus. nehmen kann.

72. Warum in der Formel für die Festigkeit (49, V) die Grösse des Bogens AEB nicht befindlich ist, davon ist der Grund leicht einzusehen. Die Festigkeit bestehet in dem Zusammenhange der Stelle des Bogens die abgerissen

wird,

wird, mit der Stelle wovon sie abgerissen wird, und ist daher einerley, es mag die abgerissene Stelle das Ende eines grossen oder eines kleinen Bogens seyn, daher bestimmt die Grösse des Bogens nichts in der Gewalt die ihn abreisst, so wenig als die Breite der Platte (64). Hr. Euler hat eine Untersuchung über die Dicke, die bey den Canonen nothwendig ist, angestellt, (Erläut. Artillerie 240 Seite) bey der er die Kraft nach CM 9 fig. für die Summe aller der Kräfte annimmt, mit denen das Pulver, indem es sich entzündet und ausbreitet, auf alle Puncte des Bogens AEB wirkt oder er setzt diese mittlere nach CM gerichtete Kraft $= g \cdot 2r\Phi$; daß dieses nicht verstattet ist, erhellet daraus, weil Kräfte nach CI und CK, einander zum Theil aufheben, und nur bey Kräften, deren Richtungen parallel sind, die mittlere Kraft, mit ihrer Summe einerley ist, eine Wahrheit, die Hr. E. unzählichemal gebraucht hat. Im Vorbeygehen kann dieses als eine Probe angemerkt werden, wie sehr der menschliche Verstand der Gefahr zu irren ausgesetzt ist, wie leicht er, mit einer ganz geringen Unachtsamkeit, was ihm am allergemeinsten und bekanntesten ist, übersehen kann. Daher leitet Hr. E. aus seiner Rechnung 243 S. den sonderbaren Satz her: daß die Canonen der Gefahr zu zerbersten an zween einander gegenüberstehenden Orten am meisten unterworfen sind; das ist: daß eine Canone der Gefahr zu zerbersten an jeder Stelle

ihres Umfangs am meisten unterworfen ist, denn jede Stelle hat ja eine gegenüberstehende.

73. Von vorhergehender Untersuchung, ist in Daniel Bernoullis Hydrodynamik, a. a. O. der Satz (50) nebst den Versuchen (60) und den Anwendungen davon (67; 69; 71;) befindlich. Daß ich überall die Art, wie dieses alles gefunden werde, in mehr Licht gesetzt habe, wird nicht nur dienen, diese Lehren leichter zu fassen, sondern auch, sie zu prüfen. Denn, wie ich schon erinnert habe, wird hiebey allerley stillschweigend angenommen, wovon ich nunmehro zu reden habe.

74. Zuerst, dasjenige wieder vorzunehmen, was ich bey 61; angezeigt habe, so ist die dasige Voraussetzung wohl keinem Zweifel unterworfen, wenn die beyden Flächen plötzlich von einander abgesondert werden. Metalle aber dehnen sich, ehe sie reissen; wenn Bernoullis Drath anfangs $\frac{2}{11}$ Linien im Durchmesser gehabt hat, so wird er, ehe er zerrissen ist, an der Stelle wo er gerissen ist, sich dergestalt ausgedehnt haben, daß er daselbst einen kleinern Durchmesser gehabt hat. Es entsteht also die Frage, was man in (61) für die von einander gerissenen Flächen, nehmen soll; ob die grössere Fläche vor der Ausdehnung, oder die kleinere nach der Ausdehnung, unmittelbar vor dem Reissen. Denn, wenn man etwa die letztere, als die eigentlich von einander gerissenen Flächen, vorziehen wollte, so müsste man überlegen, daß auch das Me-

tall

tall zu dehnen eine Kraft gehört, und daß man folglich das Gewicht, von dem das Metall reisst, nicht völlig auf die Absonderung der zulezt genannten Flächen, sondern zum Theil auf die Ausdehnung zu rechnen hat. Musschenbrök hat diese Schwierigkeit eingesehen, und seine Versuche entscheiden hierinne nichts, einige stimmen besser mit der ersten Fläche, andere mit der lezten überein. Er ist doch geneigter die lezten vorzuziehen. Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum. Experiment. 51. In dissertat. physic. et geometricis (Lugd. Bat. 1729.) pag. 498.

75. Bey den Versuchen (60) habe ich folgendes anzumerken: der kupferne Faden heisst beym B. filum aeneum, und er hat nicht deutlicher angegeben, ob dieser Drat von reinem Kupfer, oder, wie ich vermuthe, von einer Art zusammengesezten Metalls gewesen. Daß es solch Metall gewesen, wie zu den Stücken gebraucht wird, ist doch auch nicht glaublich, und daher würde bloß deßwegen die Anwendung (69) nicht gar zu sicher seyn, wenn auch die Art wie dabey mit dem breiten Ringe verfahren wird, in 49, VI, mit gehöriger Schärfe erwiesen wäre. Ist B. Faden von Kupfer gewesen, so stimmt seine Verhältniß der Festigkeiten des Kupfers und Bleyes gar nicht mit Musschenbröks häufigen und sorgfältigen Versuchen überein. M. zerreist a. a. O. exp. 48; 61; pag 496; 501; zweene gleich dicke Faden von Kupfer und von

Bley

Bley, mit $299\frac{1}{4}$; $29\frac{1}{4}$ Pf. Da diese Zahlen ohngefähr 300; 30; sind, so geben sie die Festigkeit des Kupfers und des Bleyes ohngefähr wie 10: 1; die Faden waren $\frac{1}{10}$ eines rheinländischen Zolles dick. Diese Verhältniß folgt auch wie 10: 1 aus noch zwey andern Paaren mit gleich dicken Fäden, aber dünner als die jetzt erwähnten, angestellter Versuche, exp. 49; 62; und 51; 64; aber exp. 49; 63; geben sie wie 6: 1. Wenn also auch im Vorhergehenden die Theorie völlig richtig ist, so sind doch zu ihrem Gebrauche noch andere Versuche nöthig.

76. Die Frage 58; ist also nach Bernoullis Gedanken in 66; schon beantwortet, wenn man annimmt, die Festigkeit verhalte sich wie die Dicke der Wand; dieses aber darf man annehmen, wenn die (59) angezeigte Vergleichung richtig ist; denn die Kraft mit welcher die Platte zerrissen wird, verhält sich wie die Fläche die von einer gleichen abgesondert wird (61) das ist: wie die Dicke der Platte, oder der Wand.

77. Eben das nimmt auch Mariotte a. a. O. 1. Regle an.

78. 1. Aber Musschenbrök ist auf die Gedanken gerathen, die Festigkeit eines Metalles könne in einer andern Verhältniß als in der Verhältniß der Dicke stehen. Er hat nur zweene Versuche dieserwegen angestellt (*), da eine bleyer-

(*) Petri van Musschenbroek Introd. ad cohaeren-

bleyerne Platte $\frac{2}{200}$ eines Zolles dick, 10 Pf. 6 Unzen 2 Quentchen, eine übrigens ähnliche, die aber $\frac{2}{100}$ eines Zolls dick, war 45 Pfund, jede in der Mitte, getragen hat. Er schliesst daraus, die Festigkeit der Platten habe sich wie das Quadrat der Dicken verhalten, welches doch sein Versuch in keiner grossen Schärfe erweiset, denn die doppelte Dicke, trug mehr als das vierfache Gewicht. Indessen gründet er auf diesen Satz folgendes von der Dicke der Röhre. Er betrachtet den Druck des Wassers auf den Kreis der um eine Röhre herum gehet, wie etwa wenn man sich den ganzen Kreis vorstellt, zu dem VW in der 12 F. gehört. Wenn die Höhe des Wassers über jeder Stelle des Umfanges dieses Kreises = A, und sein Durchmesser = D ist, so ist aus der Hydrostatik der Druck auf den ganzen Umfang = A. D. P. und der Druck auf einen andern Umfang einer andern Röhre, wo a; d; auch Wasserhöhe und Durchmesser bedeute, = a. d. P; also verhalten sich beyde Drucke wie A. D: a. d; Nun setze man, die Erfahrung habe gelehrt, daß die erste Röhre, deren Wand die Dicke C gehabt, zersprungen ist, oder eigentlich, daß sie bis zum Zerspringen das Wasser so hoch hat tragen können; soll nun die andere Röhre, wenn es sich mit ihr eben so ver-

rentiam corporum firmorum post Prop. 119. In dissertationibus physicis et geometricis (Lugd. Bat. 1729.) p. 665 seq.

verhält, die Dicke c haben, so müssen sich beyder Röhren Festigkeiten verhalten, wie die Drücke des Wassers, so vielmahl nähmlich die eine stärker gedruckt wird, so vielmahl muß sie fester seyn. Da nun M. annimmt, die Festigkeiten verhalten sich wie die Quadrate der Dicken, so setzt er A. D: a. d = C^2: c^2 folglich $\surd$ A. D: $\surd$ a. d = C: c; welches sich bekanntermaassen so ausdrucken läßt: craſſities eſſe in ratione compoſita, ex ſubduplicata diametrorum et ſubduplicata altitudinum; so redet auch M. in seiner dritten Regel, der er zwo andere vorhergesetzt, nähmlich die Dicken verhalten sich bey einerley Höhe (A = a) wie die Quadratwurzeln der Durchmesser, und bey einerley Durchmesser (D = d) wie die Quadratwurzeln der Höhen.

II. Mit Worten hat M. seine Regel völlig mit seiner Theorie übereinstimmend ausgedruckt, aber als er seine dritte Regel auf einen Ausdruck in Buchstaben bringen will, begeht er einen sonderbaren Fehler. Er schliesst so:

bey einerley Höhe C: c = $\surd$ D: $\surd$ d
bey ein. Durchm. C: c = $\surd$ A: $\surd$ a

also, die ähnlichliegenden Glieder mit einander multiplicirt C^2 : c^2 = $\surd$ D. A: $\surd$ d. a. Offenbar aber, können C, c, in der zweyten Proportion mit C: c in der ersten nicht einerley seyn, ausser in dem ganz besondern Falle wenn D: d = A: a daher konnten die Producte nicht Quadrate geben, und nach dieser Formel verhielten

sich

sich die Dicken, wie die Biquadratwurzeln aus den Producten der Höhe mit den Durchmessern, oder sie wären in ratione composita ex subquadruplicata altitudinum et diametrorum. Er hätte für seine dritte Regel so rechnen sollen: Es gehören zusammen

C	D	A
c	d	a
u	D	a

also $c : u = \sqrt{d} : \sqrt{D}$ | 1 Regel

$u : C = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ | 2 Reg.

$c : C = \sqrt{a.d} : \sqrt{A.D}$ | 3 Reg.

III. Wie sehr seine ungereimte Formel seinen eignen Worten widerspricht, hat M. so wenig bemerkt, daß er vielmehr nach ihr eine ganze Tafel berechnet hat. Er nimmt nähmlich aus Mariottens Versuche (56) $D = 1$, $A = 100$; $C = 2$ Linien, deren 10 auf einen Zoll und 120 auf einen Fuß gehn; und nun berechnet er in solchen Linien bis auf ihre zehntausend Theile, die Dicken von Röhren von 1 bis 9 Zoll im Durchmesser, wo jede solche Röhre Wasser auf 10 bis 100 Fuß tragen soll. Die Wasserhöhen ändern sich immer um 5 Fuß, und sind also 10, 15, 20, 25 = = Fuß. Daß so viel Zahlen, die M. mühsam gefunden hat, alle falsch sind, wenigstens mit seiner eignen Theorie nicht bestehen können, wird also aus dem erwähnten leicht abzunehmen seyn. So setzt er, bey der Wasserhöhe von 75 Fuß, für Röhren, die 1; 4;

9; Zoll im Durchmesser haben, die Dicken, 1, 0000; 1, 4142; 1, 7320 Linien, die beyden letzten Zahlen, sind die Quadratwurzeln aus 2; 3; und er hat also angenommen, wenn die Durchmesser sich wie 1; 4; 9; verhalten, so verhalten sich die Dicken wie $\sqrt[4]{1}$; $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[4]{9}$ anstatt daß er hätte nach seinen eignen Worten annehmen sollen: sie verhalten sich wie $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$ oder wie 1; 2; 3;. Musschenbr. Tafel also ist gar nicht zu brauchen, wenn es auch richtig ist, daß die Festigkeiten der Metalle sich wie die Quadrate der Dicke verhalten, welches ohne Zweifel noch mehr Versuche erfordert.

IV. Uebrigens trifft es zum Glücke zu, daß die Verhältniß der Festigkeiten A. D: a. d die er annimmt, mit der in §4 gefundenen, und bisher gebrauchten H. R: h. r einerley ist. Denn sonst wird diese Verhältniß aus M. Art sie zu finden wohl nicht sehr zuverlässig seyn. Wenn ich nach der Gewalt frage, von der eine Röhre an einer gewissen Stelle berstet, so frage ich wohl schwerlich nach der Gewalt, mit welcher ein ganzer Kreis um die Röhre, in allen Stellen seines Umfangs zusammen, auswärts gedrücket wird. Ich verlange nicht die Summe aller dieser Drückungen, sondern die Drückung auf die Stelle wo die Röhre berstet. Wenn man aber in zwo Röhren, die Drückungen auf gleiche Stellen mit einander vergleicht, so verhalten sich solche wie die Summen der Drückungen

gen auf die Peripherien der Kreise um jede Röhre; daher findet M. bey zwo Röhren eben die vorhin gefundene Verhältniß, man wird aber doch ohne solche Betrachtungen wie ich in 49. angestellt habe, die Sache nicht wohl deutlich einsehen. Musschenbrök hat wie er selbst erinnert, nicht Zeit genug gehabt, diese Untersuchungen, die sich am Ende seiner Abhandlung befinden, gehörig anzustellen, es ist daher dieses Versehen desto eher zu vergessen, da sich ähnliche, in ziemlicher Menge in erwähnter Abhandlung finden. Ich erwähne dieses nicht, einen Naturforscher zu verkleinern, dem man Verehrung schuldig wäre, wenn er auch sonst keine Verdienste hätte, als daß man ihm eine so vortreffliche Sammlung, so mühsamer, scharfsinniger und kostbarer Versuche von der Festigkeit der Materien zu danken hat; weil es aber, bey mittelmässigen Gelehrten, um ohne viel Mühe sich das Ansehen tiefer Kenntnisse zu geben, gewöhnlich ist, daß sie grossen Männern, nicht nur Erfahrungen glauben, sondern auch Sätze nachsagen, die sie nicht prüfen können, so wird dergleichen Warnung nicht überflüssig seyn. In Musschenbroeks Introductione ad philos. natural. die Hr. Lulofs zu Leiden 1762 in 2 Quartbänden heraus gegeben, befindet sich am Ende des 1. Th. im 21. C. die Untersuchung der Festigkeit, mit viel neuen Versuchen vermehrt; aber von der Festigkeit der Röhren ist daselbst

gar

gar nichts erwähnt. Man ſ. auch Hermann. Phoron. L. II. c. 2.

79. In den divers ouvrages de mathematique et de phyſique, par Meſſieurs de l' Ac. Roy. des Sc. (Paris 1693. fol.) findet ſich S. 16. ein kurzer 1680. von Römern lateiniſch verfaſſter Aufſatz de craſſitie et viribus tuborum *cet.* Der vierte Satz dieſer Schrift behauptet auch: die Stärke der Röhren, deren Zerſprengen zu widerſtehen verhalte ſich wie die Dicke des Metalls. Der Grund iſt: Die Kräfte der einzelen Ringe in welche ſich die Röhre zerlegen lieſſe, verhielten ſich, wie die Quadrate ihrer Dicken, oder wie die Flächen die beym Zerberſten müſſe von einander geſondert werden; (vires ſingulorum annulorum in quos tubus reſoluitur ſunt vt quadrata craſſitierum ſuarum, vel vt ſuperficies in disruptione ſeparandae) Wie ſich R. die Ringe vorgeſtellt hat, daß die Flächen die von einander müſſe getrennt werden, ſich wie die Quadrate der Dicken verhalten, erläutert er nicht weiter. Vermöge dieſes Satzes nimmt er eben die Regeln an, die ich vorhin aus dem Muſſchenbrök angeführt habe, und lehrt nach ſelbigen richtig die Dicken berechnen wenn die Regeln zum voraus geſetzt werden. Er erwähnet hiebey, einen Verſuch zu Verſailles da eine bleyerne Röhre von 16 Fuß im Durchmeſſer, bey $6\frac{1}{3}$ Linien Dicke, zulängliche Feſtigkeit gehabt habe, das Waſſer 50 Fuß hoch zu halten. Mehr Umſtände hiervon giebt er auch nicht an. Man

kann

kann daher auch diese Erfahrung nicht mit des Mariotte seiner, zusammenhalten, etwa dadurch die Vergleichung der Dicken mit den Festigkeiten zu prüfen.

Man sehe auch Parent des resistances des tuyaux. Mem. de l' Ac. des Sc. 1707; p. 105. Von der Stärke der Röhrenwände, Langsd. Lehrb. XI. C.

Erfahrungen, die Gesetze betreffend, nach denen Wasser aus Gefässen fliesst.

80. Wenn an dem Gefässe der 10 F. dessen Höhe NH ist, die Oeffnung der Röhre bey PO verschlossen wäre, das Gefäß mit Wasser bis H gefüllt, und nun PO geöffnet würde, so würde das Wasser daselbst mit einer Gewalt herausdringen, die ohnstreitig vom Drucke der darüber stehenden Wassersäule, die die Höhe NH hat, herrührte. Dieses würde erfolgen, es möchte PO das Ende einer Röhre wie NO ist, oder eine Oeffnung unmittelbar in der Wand des Gefässes wie bey N seyn. Eben so begreift man, wenn das Gefäß statt der Seitenöffnung eine unten im Boden hätte, daß das Wasser durch diese Oeffnung mit einer Gewalt würde herausgetrieben werden, die von dem Drucke des über der Oeffnung stehenden Wassers herrührte. Will man die Oeffnung in der Seite annehmen, so muß man sie so klein setzen, daß die Wasserhöhe durchgängig über ihr = NH heissen kann.

Nimmt die Seitenöffnung einen beträchtlichen Theil von der Höhe des Gefässes ein, so wird in ihren untern Theilen das Wasser von einer längern Wassersäule gedrucket, als in ihren obern, und man müsste alsdann in jedem Theile den Druck besonders betrachten. Bey einer Oeffnung im Boden würde die Grösse in dieser Absicht keinen Unterschied machen.

81. Man wird also bey Wasser, das zu einer Oeffnung eines Gefässes herausfliesst, darauf fallen, daß sich seine Geschwindigkeit, und die Menge, die in einer gegebenen Zeit herausfliesst, nach der Höhe des Wassers im Gefässe, über der Oeffnung richten müsse. Wenn diese Höhe grösser ist, so wird die gemeinste Erfahrung jeden lehren, daß das Wasser schneller durch die Oeffnung im Boden läuft, weiter durch die Oeffnung in der Seite herausspritzt.

82. Die Seitenöffnung verstattet die Lehre vom Wege geworfener Körper hier anzubringen.

In der höhern Mechan. I. Abschnitt 174 u. f. §. und der dortigen 10 Fig. sey HA die Richtung nach der man das Wasser, wo es an der Seite herausdringt, durch die Lage der Röhre zu springen nöthigt, der Winkel, den diese Richtung mit dem Horizonte macht, dorten HAB, $= \eta$, sey hie γ die Geschwindigkeit des herausdringenden Wassers gehöre der Höhe c zu, u dorten (178) heisse hie $= x$; so ist $y = x.\text{tang}\,\gamma$

$-\frac{x^2}{4c.\ \mathrm{col}\,\gamma}$ die Weite des Wurfs $2c.\ \mathrm{sin}\,2\gamma$ (daſ. 179) halbe Weite $c\,\mathrm{sin}\,2\gamma$ und derſelben zugehörige Ordinate, des Wurfs gröſſte Höhe $c.\,\mathrm{sin}\,\gamma^2$ (daſ. 185) der Widerſtand der Luft wird hier nicht betrachtet. So kann man Waſſer oder Queckſilber die Parabeln vorzeichnen, nach denen es herausſprützen muß wenn man c als bekannt annimmt. S. Graveſands Elem. Phyſ. T. I. §. 1614. edit. 3.

83. Hier, wo ich die Geſchwindigkeit des herausſprützenden Waſſers, noch nicht als bekannt annehmen darf, giebt ſich ein leichtes Mittel ſie zu finden. Für $\gamma = 0$; iſt $y = -\frac{x^2}{4c}$, verneint, weil es unter die Horizontallinie durch A in der dortigen Figur fällt. Man ſetze alſo DH 13 Fig. ſey ein Gefäß, aus dem durch die Seitenöffnung N, Waſſer in der Parabel NB ſprütze, AB ſey wagrecht, und A genau lothrecht unter N ſo iſt $NA = -y$; $AB = x$; alſo $NA = \frac{AB^2}{4c}$. Miſt man alſo AB; AN; ſo hat man $c = \frac{AB^2}{4.NA}$.

Weil die Oeffnung doch niemals ein Punct, gewöhnlich ein ſehr kleiner Kreis iſt, ſo verſteht man unter NA die Entfernung des Mittelpuncts dieſes Kreiſes vom Horizonte.

84. Erstes Exempel. Beym Graves. a. a. O. §. 1585; war NA = 18 Zoll AB = 35, 5 Zoll; also $c = \frac{35,5 \cdot 35,5}{4 \cdot 18}$; wo 4. 18 = 72; die Rechnung mit Logarithmen giebt

2 log 35, 5 = 3, 1004566
log 72 = 1, 8573325

1, 2431241

gehört zu 17, 50 Zoll. Das Wasser schoß also mit einer Geschwindigkeit heraus, die es durch einen Fall von der Höhe 17, 5 Zoll hätte erhalten können.

85. Die Höhe des Wassers über der Oeffnung NH 13. Fig. war 18. Zoll; also gehörte in diesem Versuche die Geschwindigkeit beynahe der angegebenen Wasserhöhe zu. In der Oeffnung bey N befand sich ein Röhrchen, mehr als $\frac{1}{2}$ Zoll weit, auswärts mit einem Bleche verschlossen, das ein Loch hatte, dessen Durchmesser $\frac{1}{12}$ eines Zolles war (Graves. 1584. §.).

86. Zweytes Exempel. Kraft, (Experimenta de vi venae aqueae contra planum incurrentis; Comment. Acad. Imper. Sc. Petropolit. Tom. VIII. p. 253.) fand (experim. 1.) AB = 4542; NA = 2017; die Einheit ist $\frac{1}{2000}$ des londner Fusses. Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser herausspritzte, gehörte also der Höhe $c = \frac{4542^2}{4.2017} = 2556,4$ wie man auf die nur gezeigte Art durch die Logarithmen sehr bequem

quem

quem findet, zumahl wenn man logarithmische Tafeln hat, die bis 100000 gehen. Kraft setzt 2557.

87. Die Wasserhöhe war 3738; Es ist aber

log 3738 = 3,5726393
log c = 3,4076283

0,1650110

Dieser Unterschied der Logarithmen gehört als Logarithme zu 1,462, also war hier die Wasserhöhe fast anderthalbmahl so groß als das, was die Rechnung für die Höhe giebt, welcher die Geschwindigkeit zugehörte. Das Wasser sprang durch eine messingerne glatte Röhre, deren Durchmesser = 89 war. Ein Theil von ihr gieng in das Gefäß hinein, der andere ragte heraus.

88. Daß die Höhe der Geschwindigkeit zur Wasserhöhe in beyden Exempeln so unterschiedene Verhältnisse hat, davon lassen sich allerley Muthmassungen angeben. Gleiche kleine Fehler, die bey Abmessung der Linien unvermeidlich sind, würden beym zweyten nicht so beträchtliche Folgen haben als beym ersten, weil beym zweyten die Linien länger sind. Gegentheils scheint der Widerstand der Luft beym zweyten beträchtlicher, sowohl weil das Wasser, mit mehr Geschwindigkeit als beym ersten herausdringt (Hdh. Mech. I. Abschn. 108.), als auch weil das Wasser einen längern Weg durch die Luft geht. Endlich musste sich das Wasser im zweyten Exempel

in der Röhre, durch die es ging, reiben, und das veränderte vielleicht seine Geschwindigkeit. Gravesand brauchte eben in der Absicht, dieses Reiben zu vermindern, die durchlöcherte Platte. (El. Phys. 1591.) Kraft hatte aber eine Ursache, die (123) soll angeführt werden, die Röhre zu wählen.

89. Kraft bringt a. a. O. noch andere Versuche bey; Im zweyten hatte er die Röhre von beyden Seiten inwendig und auswendig, verkürzt, und fand die Höhe der Geschwindigkeit 2579, grösser als vorhin (86), dieses scheint den Gedanken vom Reiben (88) zu bestätigen, in der kurzen Röhre ist das Reiben nicht so stark gewesen und das Wasser schneller herausgegangen. Kraft sagt aber bey diesem und den folgenden gar nichts von der Wasserhöhe, und man müsste also nur voraussetzen, sie sey allemahl so groß gewesen als beym ersten, wenn man annehmen wollte, die Gewalt, die das Wasser heraustrieb, sey bey allen Versuchen einerley gewesen. In seinem dritten Versuche hat er den äusern Theil der Röhre gar abschneiden lassen, und nur den innern, wie solcher beym zweyten war, behalten. Da war die Röhre noch kürzer, das Reiben noch geringer, und die Geschwindigkeit der Höhe 2753 zugehörig.

90. Wenn dergleichen Versuch, das Wasser mag nun springen oder nur durch eine Oeffnung im Boden herauslaufen, eine Zeitlang mit ungeänderter Geschwindigkeit dauren soll, so muß

die

die Wasserhöhe so lange immer einerley bleiben. Dieses kann für beynahe wahr angenommen werden, wenn die Oeffnung in Vergleichung mit einem horizontalen Querschnitte des Gefässes sehr gering ist. Gravesands Gefäß war 18 Zoll lang und breit, sein Querschnitt hielt also 324 Quadratzoll, und da konnte das Wasser durch eine Oeffnung, die $\frac{1}{12}$ Zoll im Durchmesser hatte, eine ziemlich lange Zeit laufen, ehe seine Oberfläche im Gefässe merklich tiefer sank. Sonst muß man das abgehende Wasser immer mit andrem ersetzen, und das muß so geschehen, daß dadurch keine neue Bewegung im Wasser des Gefässes erreget wird. Kraft meldet nur, daß er dieses durch gelindes Zugiessen bewerkstelliget habe.

91. Wenn das Wasser seitwärts herausschiesst, so lehrt die Erfahrung, daß die ersten Tropfen eben den krummen Weg nehmen, in dem ihm die folgenden nachgehen. Weil nun dieser Weg auf die Geschwindigkeit ankömmt (82) so hat das zuerst herausschiessende Wasser einerley Geschwindigkeit mit dem folgenden, und die Geschwindigkeit nimmt also nicht nach und nach zu, wie etwa bey fallenden Körpern, wenigstens braucht das Wasser die Geschwindigkeit, mit der es herauszuschiessen fortfährt, zu erhalten, keine merkliche Zeit. Dan. Bernoulli Hydrodyn. Sect. 4. exp. 10 bemerkt, daß Wasser, welches aus einem sehr weiten Gefässe, durch eine seitwärts angebrachte Röhre gesprungen,

besonders wenn die Röhre da, wo das Wasser herausgesprungen, etwas weiter gewesen, als wo sie ins Gefäß eingesetzt war, im Anfange zwischen A und B (13 F.) niedergefallen, doch in grösserer Menge, näher bey B, aber dieses habe eine so kurze Zeit gedauert, daß sich solche nicht angeben lasse.

92. Wie eigentlich die Geschwindigkeit des herausdringenden Wassers, mit seiner Höhe zusammenhänge, hat man auf unterschiedene Art durch Erfahrungen auszumachen gesucht. Der erste, soviel man weiß, der hierin etwas beträchtliches geleistet hat, ist Dom Benedict Castelli, ein Benedictiner vom Monte Casino um 1640. Er nahm an, die Geschwindigkeit des Wassers verhalte sich wie seine Höhe, und glaubte solches auch durch einen Versuch zu bestätigen, in dem er sich aber, wie man nachgehends gefunden, geirrt hat. Ob also gleich der Satz, den er zum Grunde legte, falsch war, so hat er doch das Verdienst, zuerst gewiesen zu haben, wie man die Bewegung des Wassers durch einen solchen Satz berechnen kann, der die Geschwindigkeit vermittelst der Wasserhöhe bestimmt, es mag nun seiner oder ein richtigerer seyn. Der Marchese Poleni in seinem Buche de motu aquae mixto §. 23; erinnert dieses zu Castellis Ehre gegen einen Tadler des Castelli, Raphael Fabretti. Castellis kleines Buch della misura dell' acque correnti, nebst einigen dazu gehörigen Schriften von ihm, macht den Anfang der Nuo-

va

va raccolta d' autori che trattano del moto dell' acque, die zu Parma seit 1766 in 7 Quartbänden herausgekommen. Castelli bediente sich schon zu Abmessung der Zeit bey der Bewegung des Wassers, des Pendels. Er hatte vom Galiläi gelernet (Raccolta Vol. I. pag. 50) daß ein Faden drey römische Fuß lang, mit einer bleyernen Kugel von 2 oder 3 Unzen Secunden schlage, man möge ihn grosse oder kleine Schläge thun lassen. Nach bekannten Vergleichungen von Fußmaassen, (z. E. in Crusens Contoristen,) hält der römische Fuß 130, 6 pariser Linien, daher ist derr römische Fuß $\frac{13060}{13913}$ des rheinländischen, und 3 römische Fuß betragen 2, 8161 rheinländische Fuß. Des Galiläus Pendel als ein einfaches betrachtet, ist also viel kürzer als das Secundenpendel (Höh. Mech. II. Abschn. 45.). Aus Höh. Mech. II. Absch. 48. lässt sich durch die Logarithmen leicht berechnen, daß es 0, 9431 einer Secunde schlägt, oder 60 Schläge von ihm nur 56, 586 Secunden, eine Zeit geben, die um 3, 414 Secunden, kürzer ist als eine Minute.

93. Evangelista Torricelli, in seinem 1644 gedruckten Buche del moto dei gravi widersprach dem Castelli, und behauptete, die Geschwindigkeit des Wassers verhielte sich wie die Quadratwurzel seiner Höhe. Er berufte sich dieserwegen auf einen Versuch des Raphael Maggioto; Joh. Bapt. Baliano in s. Buche de motu naturali grauium 1646. suchte davon einen

Beweis zu geben. Joh. Bapt. Barattini im 2. B. seiner Architettura dell' Acque 1663. nahm des Castelli Satz an. Mariotte bestätigte durch Versuche des Torricelli Lehre besonders in s. Buche du mouvement des eaux, das nach seinem Tode 1686 herausgekommen ist. Der P. Francesco Eschinardo in s. Buche dell' Impeto 1684, glaubte beydes sey wahr; bey Wasser, das zur Oeffnung eines Gefässes herausläuft, verhalte sich die Geschwindigkeit wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe, aber wie diese Höhe selbst, wenn es in einem Canale fliesst, der von oben bis unten offen ist, wie in Graben, dadurch es aus Sümpfen u. d. g. abgeleitet würde. Geminiano Montanari war auch Castellis Meynung, Dominicus Gulielmini aber behauptete Torricellis Satz durch einen Versuch, Varignon in den Memoires der pariser Ak. d. W. 1703; Hermann in der Phoronomie; gaben Beweise davon. So erzählt Poleni (92) die Geschichte dieser Lehre.

Den Satz des Torricellius: Bey Wasser, das aus einer Oeffnung im Boden eines cylindrischen immer vollen Gefässes ausfliesst, verhalte sich die Höhe wie das Quadrat der Geschwindigkeit, sucht Ge. Friedr. Richter zu beweisen. Noua litteraria anni 1720. Auct. Io. Gottlieb Krausio. Lipſ. p. 150.

94. Vom Gulielmini gehören besonders zwo Schriften zu gegenwärtiger Absicht. Mensura aquarum fluentium, und de natura fluminum;

Sie

Sie befinden sich beyde lateinisch, die leßte zugleich italiänisch in der zu Genf 1719. in 4. herausgekommenen Sammlung von G. Werken. Dominici Guilielmini Opera omnia, mathematica, hydraulica, medica, physica. Italiänisch stehen sie im I. u. II. B. der Nuova raccolta, nebst Eustachius Manfredis Anmerkungen über das leßte. Der Versuch, der Torricellis Saß bestätiget, am Anfange des zweyten Buchs de mens. aqu. fluent. ist folgender.

95. Er brauchte ein cylindrisches Gefäß vier bononische Fuß oder 48 Zoll hoch und zweene Fuß weit, die Höhe war in 16 gleiche Theile von 3 zu 3 Zoll getheilt, längst der Höhe waren über einander an den Theilungsstellen 16 gleiche runde Löcher, in denselben gleiche hölzerne Röhren, etwas über einen Zoll im Lichten, so viel als möglich geglättet, jede Röhre war mit einer kupfernen Platte verschlossen, die in der Mitte ein rundes Loch hatte, dessen Durchmesser $\frac{1}{4}$ Zoll war, des Loches Mittelpunct befand sich genau in des Cylinders Axe. Man brauchte ein Pendel, das $28\frac{5}{7}$ bononische Zoll lang war, füllte das Gefäß, erhielt es unter dem Herauslaufen immer voll, und wog das Wasser, das jedesmahl in der Zeit von 15 Schlägen des Pendels herausgelaufen war. So liefen 123 bononische Unzen Wasser durch das unterste Loch, als über ihm 48 Zoll hoch Wasser stand. Man öffnete nach diesem das ganz oberste Loch, das vom Gefässe noch 3 Zoll über sich

hatte, das Wasser lief dadurch heraus und es blieben über dem untersten Loche noch 45 Zoll hoch Wasser stehen; da liefen aus dem untersten Loche 118 Unzen heraus. Das zweyte Loch von oben herunter, das 6 Zoll vom Gefässe über sich hatte, geöffnet, ließ über dem untersten Loche noch 42 Zoll hoch Wasser, und da liefen aus diesem untersten 116 Unzen. So öffnete man immer mehr und mehr Löcher von oben herunter, damit das Wasser über dem untersten auf einer geringern Höhe stehen blieb, bis man auf eine Wasserhöhe von 24 Zoll über dem untersten Loche kam. Da fiel es schwer, das Wasser, das nur bis an die Hälfte des Gefässes reichte, immer in einer Höhe zu erhalten, man verschloß also das unterste Loch, füllte das Gefäß, und öffnete das Loch, das sich 24 Zoll unter des Wassers Oberfläche befand. Aus ihm flossen 93 Unzen heraus. Dieses war mehr als man erwarten konnte, wenn sich die Menge des herausfliessenden Wassers wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe verhielt, und diese Verhältniß traf doch bey der Wassermenge zu, die aus dem untersten Loche geflossen war. Man urtheilte also, diese neue Oeffnung müsse ein wenig weiter seyn als die untere, und versicherte sich davon durch genaue Prüfung des Durchmessers. Man verminderte die Wasserhöhe über dieser zweyten Oeffnung nachgehends auf die vorhin beschriebene Art, und fand, daß sich die Menge des bey jeder andern Höhe, herausgelaufenen Wassers

zu 93 Unzen, immer beynahe verhielt, wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe zur Quadratwurzel von 24.

96. Nachstehende Tafel stellt dieses vor. In der ersten Columne stehen unter A; D, die Wasserhöhen, in der zweyten unter B, E, die Wassermengen, die ihnen vermöge der Erfahrung zukommen, in der dritten unter C die Wassermengen, die den Wasserhöhen von 48 bis 27 zukommen, wenn man setzt, die Wassermengen verhalten sich, wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen, und der Höhe 48, gehören 123 Unzen zu; Unter F stehen eben so die Wassermengen, die den Höhen von 24 bis 3 nach der angezeigten Verhältniß zu gehören, wenn 24 Zolle, 93 Unzen zukommen. Unter C, F, befinden sich also die Wassermengen nach einer Voraussetzung berechnet, deren Vergleichung mit den beobachteten unter B, E, lehret, daß die Voraussetzung richtig ist, weil die geringen Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung, von kleinen Fehlern der Erfahrungen selbst herrühren können.

A	B	C
48 Zoll	123 Unzen	123 Unzen
45	118	119
42	116	115
39	110	111
36	106	106
33	103	102

30 Zoll	97 Unzen	$97\frac{1}{2}$ Unzen
27	92	92
D	E	F
24	93	93
21	87	87
18	81	$80\frac{1}{2}$
15	74	74
12	66	66
9	56	57
6	47	$46\frac{1}{2}$
3	34	33

97. Die Zahlen der dritten Columne zeigen, wie viel Wasser bey jeder Wasserhöhe herausgelaufen seyn müsste, wenn sich die Menge des herausgelaufenen Wassers, wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe verhält, die erste Menge von 123 Unzen aber angenommen wird. Ob G. diese Zahlen richtig berechnet hat, das liesse sich so bequemer prüfen, als vermuthlich G. die Rechnung geführt hat, denn er scheint an den Vortheil der Logarithmen hier und bey andern Rechnungen nicht gedacht zu haben: Wenn die veränderliche Wasserhöhe H; die Wassermenge Q heisst, so ist $\sqrt{48} : \sqrt{H} = 123 : Q$. also $Q = \frac{123}{\sqrt{48}} . \sqrt{H}$

Nun ändert sich nur H; also bleibt der Logarithme dessen, was in $\sqrt{H}$ multiplicirt ist, unveränderlich, er heisse L; so ist

$$\log Q = L + \tfrac{1}{2} \log H.$$

Exem:

Exempel H = 30;

log 123 = 2, 0899051
½ log 48 = 0, 8406206

L = 1, 2492845
½ log 30 = 0, 7385616

log Q = 1, 9878461

giebt Q = 97, 24; G. hat 97½ also kömmt diese Rechnung dem Verfuche, der 97 Unzen giebt, noch näher als Gulielminis seine. Er scheint aber kein kleiner Gewicht, als die ganze Unze, in Betrachtung gezogen zu haben, welches auch wohl verstattet ist, da die geringste Wassermenge doch 34 Unzen betrug.

98. Verführe man eben so bey der Wasserhöhe von 24 Zoll, so wäre

L = 1, 2492845
½ log 24 = 0, 6901056

log Q = 1, 9393901

gäbe Q = 86, 97

die Erfahrung aber gab 93; daraus erhellt, daß diese Oeffnung grösser seyn muß, als die vorige. Man kann auch berechnen, wieviel der Unterschied beträgt, wenn man annimmt, die Wassermenge richte sich bey dieser Oeffnung eben so nach der Quadratwurzel der Höhe, wie bey der vorigen. Weil nähmlich, bey der Wasserhöhe von 24 Zoll eine Oeffnung, die der vorigen gleich gewesen wäre, 86, 97 gegeben hätte, die wirkliche Oeffnung aber 93 gab, so verhalten sich beyde Oeffnungen = 86, 97 : 93 und

ihre Durchmesser, wie die Quadratwurzeln hievon (Geom. 44 S. 1. Zus.). Durch die Logarithmen finde ich $\sqrt{\frac{93}{86,97}} = 1,034$; war also der untersten Oeffnung Durchmesser genau 0, 25 Zoll, so war der obern Durchmesser 0, 2585 Zoll. Dieser geringe Unterschied konnte den beträchtlichen Unterschied in der Wassermenge verursachen.

99. Für die zweyte Reihe von Erfahrungen, von 24 bis 3 Zoll muß man also sagen:

$\sqrt{24} : \sqrt{H} = 93 : Q$; da ist für $H = 3$

$\log 93 = 1,9684829$

$\frac{1}{2}\log 24 = 0,6901056$

$L = 1,2783773$

$\frac{1}{2}\log 3 = 0,2385606$

$\log Q = 1,5169379$

giebt $Q = 32,88$

die Erfahrung gab 34

100. I. Langsdorf, Lehrbuch der Hydraulik 1. Cap. 6. §. führt Erfahrungen von Bossut an, wo die Höhen durch alle einzelne pariser Fuß gehn. Die äussersten sind

Höhe	1	15
Wassermenge	2722 Cubikzoll	10471

$\log 10471 = 4,0199882$

$\frac{1}{2}\log 15 = 0,5580456$

$3,4318426$

gehört

gehört zu 2703, 6; Der Unterschied von 18, 4 Cubikz. ist bey mehr als zwey tausenden verzeihlich. Langsdorf hat andre dieser Versuche berechnet, und sie mit der Voraussetzung übereinstimmend gefunden. Ich erwähne sie, da sie viel neuer sind, als Guilielminis seine, und man bey ihnen noch vollkommnere Hülfsmittel vermuthen darf, als der Italiäner hatte.

Langsdorf bringt a. a. O. 9 §. eigne Versuche bey, die auch übereinstimmen.

II. The Bakerian Lecture, Observations on the Theory of the motion and resistence of Fluids, with description of the construction of experiments in order to obtain some fundamental Principles, by the Rev. Sam Vince M. A. F. R. S. Philos. Transact. 1795. P. I. art. 2. Richtige Erinnerungen, daß sich die Gesetze der Bewegung flüssiger Materien nicht aus bloßer Theorie herleiten lassen, Versuche mit Ausflusse von Wasser, erst durch eine enge Oeffnung im Boden des Cylinders, dann, durch eine unten an sie gesetzte Röhre; die Versuche stimmten nicht mit dem Satze überein, daß sich die Mengen des ausfliessenden Wassers, wie die Quadratwurzeln der Höhen über den Stellen des Ausflusses verhalten. Den Stoß des Wassers, und Widerstand flüssiger Materien zu finden, Vorrichtungen, die im wesentlichen schon bekannt sind. Versuche mit denselben will Hr. V. zu andrer Zeit bekannt machen.

101. Aus den Versuchen vor Hrn. Vince, hat man ziemlich allgemein angenommen, daß die Wassermengen, die in gleichen Zeiten herauslaufen, sich wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen verhalten. Je mehr nun Wasser in einer gegebenen Zeit herausläuft, desto schneller muß es laufen. Und also wird dieser Satz wohl so viel heissen: daß sich die Geschwindigkeit des herauslaufenden Wassers wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe verhält.

102. I. Daß dieses Gesetz von der Geschwindigkeit gilt, mit der das Wasser würklich herausprützt, zeigt s'Gravesande durch ein paar leichte Versuche (*) DH 13. Fig. ist ein Gefäß bis an H voll Wasser, C mitten in seiner Höhe, daß AC = CH; Man macht Oeffnungen in N, O, jene so weit unter C als diese darüber, daß CN = CO = c; wenn das Wasser aus N bis B sprützt, so sprützt es aus O eben dahin. Also gehören die Geschwindigkeiten des Wassers in N, O, den Höhen $\frac{AB^2}{4.NA}$; $\frac{AB^2}{4.OA}$ (83) diese Höhen verhalten sich also wie $\frac{1}{NA} : \frac{1}{OA} =$ $OA : NA = \frac{1}{2}AH + c : \frac{1}{2}AH - c = HN : HO$; aber HN, HO, sind die Wasserhöhen über N, O; Nun verhalten sich die Geschwindigkeiten in N, O, wie die Quadratwurzeln der ihnen zugehörigen

(*) El. Phys. §. 1622; 1624.

hörigen Höhen des Falls, und folglich auch wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen.

Wenn man dieses annimmt, so gehört nach (83) der Geschwindigkeit in C, die Höhe $\frac{c.AC}{NA}$, und wenn f die Weite bedeutet, auf welche das Wasser aus C sprützt, so ist, auch aus (83)

$$f^2 = 4.CA.\frac{c.AC}{NA} = \frac{4.CA^2}{NA}.\frac{AB^2}{4NA} = AB^2.\frac{CA^2}{NA^2};$$

weil nun $CA > NA$, so ist allemahl $f > AB$; oder, das Wasser sprützt aus dem Mittel C; weiter, als aus jeder Stelle N, darunter, und folglich nach dem vorhin erwähnten, weiter als aus jeder Stelle darüber.

II. Die Parabeln also, welche das Wasser aus C und aus O beschreibt, müssen einander durchkreuzen, weil sich die erstere von der lothrechten Linie HA weiter entfernet als die letztere. Und wenn Wasser aus einer Stelle zwischen C und N sprützt, wird es weiter sprützen, als das aus N oder als das aus O, und so werden sich die Parabeln dieses Wassers und das aus O durchkreuzen.

Wäre also die ganze Stelle von N bis O offen, so würden sich die Parabeln des herausspringenden Wassers auf mancherley Arten durchkreuzen. Dieses untersucht Grandi del mov. dell' acqu. L. II. Prop. 11. Ich sehe keinen prak-

tischen Nutzen davon, und die theoretische Bestimmung kann auch nicht so ganz richtig seyn, weil die anziehenden Kräfte der Wassertheilchen unter sich darinnen viel ändern werden, anderer Ursachen zu geschweigen. Indessen dient dieses, einige Rechenschaft von dem zu geben, was jeder mit einer geringen Aufmerksamkeit in Wasser, das aus einer etwas beträchtlichen Oeffnung herausschiesst, wahrnehmen kann.

103. Des Mariotte Schrift (93; 58) ist auch von Dr. Joh. Christoph Meinig zu Leipzig 1723 in 8. deutsch übersetzt herausgekommen: Mariotte Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik. Der Uebersetzer hat Anmerkungen beygefügt, unter denen die nützlichsten diejenigen sind, die Varignons Berechnungen über diese Lehren enthalten, die Uebersetzung liest sich sehr unangenehm und ist fast unbrauchbar, theils weil sie in dem damahligen Modedeutschen verfasst ist, und noch mehr, weil der Uebersetzer vieles nicht verstanden hat. Mariotte führt in dieser Schrift auch Versuche an, die das Gesetz (101) bestätigen (*) und brauchte es, zu berechnen, wieviel Wasser bey jeder Wasserhöhe aus einer gegebenen Oeffnung fliesst. Hier sind einige von seinen Erfahrungen.

Eine vertical stehende Röhre AD 14 F. (**) war unten wieder aufwärts gekrümmt und hatte bey

(*) III. Partie II. Discours 1. 2.; Experience p. 420.
(**) daselbst p. 421.

bey G eine Oeffnung von drey pariser Linien im Durchmesser, so daß die beyden Spitzen eines Zirkels, die drey Linien von einander entfernt waren, gleich in diese Oeffnung hinein giengen, ohne an den Rand irgendwo anzustossen, aber auch ohne Platz bis an den Rand leer zu lassen; oben um C hatte diese Röhre einen Kasten, in den etwa 20 Pinten Wasser giengen; man verschloß die Oeffnung bey G, und füllte Röhre und Kasten mit Wasser, daß des Wassers Oberfläche im Kasten, BC; 13 Fuß über der Horizontalfläche durch die Oeffnung, GFDE, war; Nun ließ man das Wasser bey G herausspringen; Man hatte in drey Gefässen 14 Pinten abgemessen und veranstaltet, daß dieselbe dergestalt in den Kasten nach und nach gegossen wurden, daß das Wasser immer bey B, einem Merkmahle an des Kastens Seite blieb, wenn beym Eingiessen das Wasser etliche Linien tiefer sank, so goß man ein wenig geschwinder, daß es wiederum eben soviel höher als das Merkmahl stiege. In dem Augenblicke, da man den Daumen, den man über die Oeffnung G gehalten hatte, weggezogen, setzte man ein Secundenpendel in Bewegung, der, welcher die Oeffnung zugehalten hatte, machte sie im Anfange einer Secunde frey, und fing an zu zählen 1, 2, 3, die welche das Wasser eingossen, hatten Acht, daß das Wasser genau bey dem Merkmahle war; wenn man zu zählen anfing, und sie wurden mit ihren 14 Pinten, zwi-

schen

schen 0 und der 60 Secunde fertig. Den Zweifel, daß das Wasser ungleich eingegossen würde, zu vermeiden, stellte M. diesen Versuch auch so an. Man goß 7 Pinten in den Kasten, die von einem Zeichen H bis an ein anderes L reichten, so daß BL = BH; Es ist klar, daß alsdenn in der Zeit, in welcher das Wasser von L bis H sank, eben soviel heraüslief, als wenn man es eben so lange Zeit, beständig bey B in der Höhe von 13 Fuß erhalten, denn wenn es die Zeit über geschwinder lief, die es von L bis B sank, so lief es gegentheils die Zeit über langsamer, die es von B bis H sank.

104. Auf diese Art fand sich, daß aus der Oeffnung, deren Durchmesser 3 Linien war, und über welcher das Wasser 13 Fuß hoch stand, in der Zeit einer Minute, 14 pariser Pinten herausliefen, die Pinte wiegt 2 Pfund, und 35 Pinten machen einen Cubikfuß.

105. Nach dem Verfahren in (98) kann man hier sagen $\sqrt{13} : \sqrt{H} = 14 : Q$ so ist Q die Menge von Pinten, die in einer Minute, aus einer gleichen Oeffnung bey der Wasserhöhe H herausdringen. Es ist auch $\log 14 - \frac{1}{2} \log 13 = 0,5891564$, welcher unveränderliche Logarithme zu $\frac{1}{2} \log H$ addirt, $\log Q$ giebt.

106. Mariotte erinnert, bey grossen Höhen von 35 Fuß, habe er durch die Erfahrung etwa $\frac{1}{17}$ oder $\frac{1}{18}$ weniger gefunden, als die Rechnung nach (105) gäbe, und bey geringer Höhe von 6 bis 7 Fuß, ein wenig mehr. Er leitet

dieses

dieses daher, daß sich das Wasser am Rande der Oeffnung mehr oder weniger reibt, auch in der Luft mehr oder weniger Widerstand findet, hält aber diese Unterschiede für so unbeträchtlich, daß man nach der gegebenen Regel rechnen könne. Der Vortheil, den die Logarithmen hier geben, ist ihm nicht eingefallen.

107. Verbindet man dieses mit der Betrachtung, daß sich die Kreisflächen wie ihrer Durchmesser Quadrate verhalten, so beantwortet sich folgendes:

108. **Aufg.** Eine runde Oeffnung, deren Durchmesser $= d$; hat beständig Wasser auf die Höhe a über sich, und es läuft aus ihr eine Menge Wasser $= q$ in der Zeit t; Nun bedeuten D, A, Q, T, eben das für eine audre Oeffnung. Man sucht die Verhältniß $q : Q$.

Aufl. Man setze O sey die Wassermenge, die in der Zeit T, durch die Oeffnung, deren Durchmesser d ist, läuft, wenn über ihr das Wasser auf der Höhe A erhalten wird, daß also die ähnlichen Grössen so unter einander stehen

d	a	q	t
D	A	Q	T
d	A	O	T

Nun ist klar, daß durch die Oeffnung, deren Durchmesser d ist, wenn die Wasserhöhe $= a$ bleibt, in der Zeit T, die Wassermenge $\frac{q \cdot T}{t}$ laufen wird.

Also

Also ist $\frac{q.T}{t} : O = \sqrt{a} : \sqrt{A}$

$$O : Q = d^2 : D^2$$

$$\frac{q.T}{t} : Q = d^2 \sqrt{a} : D^2 \sqrt{A}$$

oder

$$q : Q = t.d^2 \sqrt{a} : T.D^2. \sqrt{A}.$$

Sind die Oeffnungen keine Kreise, so setzt man statt der Verhältniß $d^2 : D^2$ die Verhältniß der Flächen der Oeffnungen.

109. Also ist für $Q = q$; $td^2 \sqrt{a} = T.D^2 \sqrt{A}$. So läßt sich diese Formel mit Erfahrungen vergleichen, die Mariotte anführt (*). Er bediente sich zweyerley Oeffnungen, einer von 3, der andren von 6 Linien im Durchmesser, ich kann daher, weil es nur auf die Verhältniß d:D ankömmt, $d = 1 : D = 2$ setzen. Die erste (1. experience) gab bey $a = 5\frac{1}{2}$ Fuß in 93. Secunden, 14. Pinten, jede zu 2 Pfunden, die andre eben soviel Wasser (3. experience) für $A = 12\frac{1}{3}$ Fuß in $15\frac{1}{2}$ Secunde. Es soll also $93. \sqrt{5,5} = 15,5.4. \sqrt{\frac{37}{3}}$ seyn oder $\frac{93}{62} = \sqrt{\frac{37}{16,5}}$ der Quotient linker Hand ist $= 1,5$; der Logarithme dessen rechter Hand gehört zu 1,4974. Ich habe diese beyden Versuche aus etlichen, die M. anführt, ohne Wahl genommen, daher man die Formel (108) als durch Mariottens Versuche bestätigt annehmen kann.

110.

(*) III. Partie III. Discours p. 428.

110. Wenn es auch Mariottens Erzählung nicht lehrte (*), daß diese Versuche mit solchen Vorrichtungen angestellt worden, wie es die 14. F. ohngefähr zeigt, daß sich nähmlich am obern Ende A einer langen Röhre AE, ein grosser Kasten KL als ein Wasserbehältniß befunden, in dem man das Wasser immer auf gleicher Höhe erhielte, so würde man doch dieses schon muthmassen, weil sich ohne einen solchen Kasten eine enge hohe Röhre nicht wohl immer gleich voll hätte erhalten lassen, eine sehr weite aber von 24 Fuß und höher, auch wohl nicht wird seyn gebraucht worden; Gulielmini, der sich eines weiten Cylinders bediente (95), hatte ihn nur 4 Fuß hoch. Das muß ich nur noch beyfügen, daß die Oeffnung unten an der Röhre, aus welcher das Wasser gelaufen ist, nicht so weit war, als die Röhre, da der Röhre Durchmesser, z. E. ein halber Fuß, der Oeffnung ihrer etliche Linien war. Man wird also aus Mariottens Versuchen auch noch die Folgerung herleiten:

Wenn auf die erwähnte Art, Wasser aus einem Kasten vermittelst einer verticalen Röhre, durch eine enge Oeffnung fliesst, so verhalten sich die Wassermengen, in gleicher Zeit, und bey gleichen Wasserhöhen wie der Wasserhöhen, Quadratwurzeln, eben als ob die Oeffnung am Kasten ohne die verticale Röhre wäre, wie in (101).

Man begreift auch, daß statt der Oeffnung die Röhre selbst nur deswegen nicht gebraucht worden, weil sie zuviel Wasser auf einmahl

(*) p. 426.

durch-

durchgelassen hätte, auch sich vielleicht nicht so genau abmessen liesse, wie ein Loch, das man in eine metallene Platte machte, und daß also der Satz noch gelten würde, wenn das Wasser gleich aus der Röhre selbst flösse.

111. Der Marchese Johann Poleni, hat über den Ausfluß des Wassers aus Gefässen so sorgfältige Versuche angestellt, daß ich von denselben hier wenigstens einige anzeigen muß. Sie stehen in einem Buche von ihm, das nach der lateinischen Ausgabe von 1718, unter dem Titel: delle Pescaje in der Raccolta (92) Vol. III. zu finden ist (*).

112. Die Vorrichtung dazu ist folgende: (15 F.) T ist ein grosses Gefäß, aus dem man das Wasser beständig ersetzen will, das aus dem Gefässe S durch die Oeffnung bey N in ein drittes Gefäß P fliesst. Man weiß, wie viel das Gefäß P halte, und wenn man also das Wasser im Gefässe S beständig auf einer bekannten Höhe über desselben Boden erhalten kann, so ist nur noch übrig, die Zeit zu bemerken, innerhalb wel-

(*) Es handelt von der Art Graben, da im Ufer eines Flusses zwischen ein paar Verticalflächen, die mit dem Strohme ohngefähr rechte Winkel machen, vom Flusse abwärts aber convergiren, eine Oeffnung gemacht wird, dadurch ein Theil vom Wasser des Flusses ablaufen kann. Der Italiäner nennt das Pescaje, o cateratte di lati convergenti. Der lateinische Titel ist: de castellis. Lateinisch ist es 1718 herausgekommen.

welcher sich das Gefäß P anfüllt, da weiß man alsdenn, wieviel Wasser aus S bey einer gegebnen Wasserhöhe, durch eine gegebene Oeffnung ausläuft.

113. Das Gefäß T so einzurichten, daß man nach Gefallen daraus viel oder wenig Wasser in S schicken konnte, machte man in seinen Boden bey Y ein rundes Loch, zwanzig pariser Linien im Durchmesser, (Poleni bedient sich hier überall des pariser Maasses). Man hatte eine Stange, RI, unten mit einem Kolben versehen, der sich in eine sehr dünne Spitze I endigte, aber zweene Fuß von der Spitze, bey L, einen Durchmesser von 2 Zollen hatte, und so der Theil IL ein Kegel war. Die Stange war so lang, daß ihr Ende R über das Gefäß T emporragte, wenn man die Spitze in das Loch Y stellte. Nachdem man solchergestalt den Kolben in dem Loche höher hob oder tiefer senkte, lief nach Gefallen mehr oder weniger Wasser, zwischen der Spitze und des Loches Rande durch, und man konnte auch so das Loch völlig verschliessen. Das Gefäß T hatte im Boden drey solche Löcher mit ihren Stangen. Die Figur stellt nur eines vor. Das Wasser, das man solchergestalt aus T in S laufen ließ, fiel zuerst auf eine Menge Reisigbündel, die man ordentlich darunter gelegt hatte; dadurch verlohr es die Geschwindigkeit, mit der es zum Loche Y herausgeschossen war, und trat ganz ruhig über die Oberfläche dessen, das sich schon in S befand. So ließ sich zu beständiger Ersetzung des Wassers, das durch N

immer ablief, aus T in S mehr Wasser bringen, als bey andern dergleichen Versuchen geschehen ist, und die Art, wie dieses Wasser des abgegangenen Stelle immer ersetzte, machte diese Versuche zuverlässiger, als irgend eine andere sie machen kann.

114. Im Gefässe S, war bey N, unweit vom Boden ein Loch, in welches man die kupferne Röhrchen stecken konnte, die bey den Versuchen sollten gebraucht werden. Die ersten, deren man sich bediente, waren hohle abgekürzte Kegel (es versteht sich, daß hier nur solche Kegel und Cylinder gebraucht werden, die man in der Geometrie: senkrechte, nennt) die grössere Grundfläche eines solchen Kegelstücks ward an das Loch bey N dergestalt angebracht, daß die Fläche des Randes auf den Horizont lothrecht stand. So trat das Wasser aus S in diese grössere Grundfläche als in die eine Mündung hinein und lief durch die kleinere Grundfläche, als die andere Mündung, in P heraus. Den Theil von der Axe eines solchen Kegelstücks, der zwischen den Mittelpuncten beyder Grundflächen enthalten ist, nennt Poleni die Länge des Kegelstücks, und die Wasserhöhe ist die kürzeste Linie, vom Mittelpuncte der weitern Mündung bis an die Oberfläche des Wassers in S.

115. Jeden, der auf Wasser, das aus einer runden Oeffnung eines Gefässes herausschiesst, acht gegeben hat, hat die Erfahrung gelehrt, daß der Wasserstrahl in einiger Entfernung

fernung von der Oeffnung einen geringern Durchmesser hat, als die Oeffnung, so daß das Wasser, das aus der Oeffnung herausspringt, keinen Cylinder macht, dessen Grundfläche die Oeffnung wäre. Man unterscheidet also von der Oeffnung Durchmesser, den Durchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahls (diametrum siue amplitudinem venae contractae).

116. Poleni hat diesen Durchmesser in der Weite gemessen, wo er am kleinsten ist, und wo nachgehends, weiter von der Oeffnung, wegen der Aenderungen in der Geschwindigkeit, und den Richtungen der herausspritzenden Wassertheilchen, die Abmessung unsicher würde.

117. In dem Gefässe S war die Wasserhöhe beständig bey allen nächstfolgenden Versuchen 256 Linien, (1 Fuß 9 Zoll 4 Linien) das Wasser stand bis an den untersten Rand einer Oeffnung M in der Seite des Gefässes.

118. P das kleinste unter diesen Gefässen, war ein abgekürzter Kegel, dessen Boden 4 Fuß 4 Zoll 4 Linien, die Mündung 3 F. 5 Zoll 8 L. im Durchmesser hatte, die Höhe betrug 3 F. 5 Zoll 8 L. Poleni berechnet daraus den Innhalt 73035 Cubikzoll (Geom. 63 S. 5 Zus.). So viel hielt es Wasser. Es war in eine Grube gesetzt.

119. Die Versuche wurden bey einer Pendeluhr angestellt, die man in dem Augenblicke in Bewegung setzte, in dem das Wasser aus S

zu laufen anfieng, das Loch, aus dem es laufen sollte, war zuvor mit einem glatten hölzernen Zapfen verschlossen. Das herausgelaufene ward aus T immer ersetzt (113) und in dem Augenblicke, da P voll war, hemmte man die Bewegung der Uhr, und verschloß die Oeffnung an S.

120. Nun hat Poleni an das Loch des Gefässes unterschiedene Kegelstücke, eine Röhre, eine durchlöcherte Platte angebracht, und allemahl die Zeit bemerket, in welcher das Gefäß P gefüllt worden. Mit jedem dieser Ansätze ist der Versuch zweymahl, auch mit einigen dreymahl wiederhohlt worden. Zuerst hat er vier Kegelstücke, eins nach dem andern gebraucht, jedes 92 Linien lang (114) und der Durchmesser der kleinen Mündung, wo das Wasser herauslief, 26 Linien; in der Tafel der Versuche, die ich nachdem darstellen will, heissen diese Kegelstücke I, II, III, IV; Ferner brauchte er V. ein cylindrisches Rohr, 91 Linien lang, auch 26 Linien weit. VI. Eine dünne Platte mit einem runden Loche, im Durchmesser auch 26 Linien. Es kann als ein hohler Cylinder angesehen werden, so lang, so viel die Dicke der Platte beträgt, etwa 1 Linie. Jedes Ende der Kegelstücken und der Röhre, das an das Gefäß kommen sollte, hatte ringsherum einen platten Rand, dessen Ebene mit der krummen Fläche des Kegelstücks oder der Röhre rechte Winkel machte.

121. Weil die Mündungen, zu denen das Wasser in P herausläuft, bey allen diesen Versuchen gleich waren, so ist klar, daß man allemahl den Mittelpunct jeder dieser Mündungen so hat stellen können, daß das Wasser, welches allemahl in S, bis an den untersten Rand von M stand (117) auch über diesem Mittelpuncte allemahl 256 Linien hoch war, welches also für die Wasserhöhe (114) anzunehmen ist. Ueber dem Mittelpunct der Mündung am Gefässe konnte das Wasser nicht bey einem Versuche so hoch als bey dem andern stehen. Diese Betrachtung schien mir hier beyzubringen nöthig, um dem Zweifel, ob die Wasserhöhe allemahl einerley gewesen sey, vorzubauen. Poleni erwähnt sie nicht, man sieht aber leicht, daß eben sie ihn veranlasst hat, die äussern Mündungen alle gleich groß zu machen.

122. So lassen sich Polenis Versuche in folgender Tafel bequem übersehen. Unter M stehen, in Linien ausgedruckt, die Durchmesser der innern Mündungen bey den Kegelstücken, derjenigen nähmlich, die an das Gefäß S gebracht wurden, unter N die Zeiten, in denen sich P gefüllt hat, zwo oder drey bey einem Versuche, nachdem er zwey oder dreymahl ist wiederhohlt worden, unter O die Durchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahls (115) in Linien, man begreift, daß bey solchen Abmessungen die grösste Schärfe nicht zu erhalten ist, das Loch des Gefässes S ist also wenigstens so weit

gewesen, als die innere Mündung des Kegelstücks IV; daher der Cylinder V, wie Poleni erwähnt, es nicht ausfüllt.

	M	N	O
I	42	2 M. 57 S.	25 1/4
		2 59	
II	33	2 57	25
		2 57	
III	60	3	24
		3	
IV	118	3 4	23 1/2
		3 6	
V		3 8	24 1/2
		3 7	
		3 7	
VI		4 36	20 1/2
		4 36	
		4 38	

123. Unter diesen Versuchen zeigen besonders V und VI; was es für ein Unterschied ist, ob bey einerley Wasserhöhe, durch einerley Oeffnungen Wasser durch ein Loch oder eine Röhre läuft. Diese Erfahrungen scheinen Gravesands Gedanken (88) eben nicht vortheilhaft. Bey V bemerke ich, daß Kraft bey seinen Versuchen (89) deßwegen eine Röhre gebraucht hat, weil er die Zusammenziehung des Wasserstrahls vermindern wollte. Man sehe auch unten 128. Wenn Poleni auf die Oberfläche des Wassers

im Gefässe S, dunkeln Wein goß, so zeigte sich desselben Farbe erst eine gute Zeit darnach in dem ausfliessenden Wasser. Diese Begebenheit, die man wohl leicht vorausfehen kann, hat Joh. Ceva schon vor diesem mit Dinte wahrgenommen.

124. Um Versuche mit andern Wasserhöhen anzustellen, machte Polent in S ein Fenster, niedriger als M; so daß die Wasserhöhe 128 Linien war, wenn desselben unterster Rand von M erreicht ward. Bey dieser Wasserhöhe brauchte er erstlich die Platte (123; VI.), denn die Röhre (123; V.) und fand folgendes, wo N, O, die Bedeutungen wie in 123. haben.

	N		O
VII Platte	6 M.	37 S.	20
	6	36	
VIII Rohr	4	24	25
	4	25	

125. Er machte nun alle Fenster wie M; in S zu, füllte das ganze Gefäß S an, nur daß das Wasser nicht überlief, die Wasserhöhe war 542 Linien und man fand folgendes:

	N		O
IX Rohr	2	11	25
	2	10	
X Platte	3	11	$20\frac{1}{2}$
	3	12	
XI Rohr	2	11	
XII Platte	3	13	

126. Die Versuche XI; XII; sind einige Tage nach den VIII; X; gemacht, als Poleni die Gefässe von ihren Stellen wegnehmen wollte. Sie hatten bey einem grossen Wassergraben gestanden, der ein paar Landgüter von einander sonderte.

127. Poleni hat nachgehends ähnliche Versuche mit kleinern Gefässen wiederhohlt. Statt des P brauchte er jetzo eines, das 2560 Cubikzoll hielt. Die Wasserhöhe war 178 Linien. Wenn er einen Versuch mehr als einmahl anstellte, zeigten sich Unterschiede kaum von einer Secunde. So brauchte er XIII; eine dünne eiserne Platte mit einem Loche, das 9 Linien im Durchmesser hatte. XIV. Ein kupferne Platte $\frac{4}{5}$ einer Linie dick, mit einem cylindrischen Loche, dessen Durchmesser 9 Linien war, durchbohrt, XV; Eben diese Platte so zugerichtet, daß das Loch die Gestalt eines Kegelstücks bekam, dessen kleiner Durchmesser 9 Lin. der grössere 10 L. die Länge $\frac{3}{4}$ einer Linie hielt; die grössere Grundfläche nach dem mittlern Gefässe zugekehrt, daß das Wasser durch die kleinere in das untere Gefässe lief. XVI. Dieses Kegelstück umgewandt, daß sich die kleinere Grundfläche nach dem mittlern Gefässe kehrte. XVII. Eine Röhre 9 Linien im Durchmesser, an beyden Enden mit Rändern (120) 18 Linien lang. XVIII. Eine Röhre wie vorige, aber 39 Linien lang. XIX. Eine Röhre 9 Zoll = 108 Linien lang. XX. Eine Röhre 4 Zoll und 9 Linien = 57 Linien lang.

lang. Diese Röhren waren aus Bleche so dick als die Platte (XIV). XXI. An der Röhre (XX) ward das innere Ende, $\frac{3}{5}$ einer Linie lang, in ein solches Kegelstück, wie XIV. gebildet, die übrigen $56\frac{2}{3}$ Linien lang, ungeändert gelassen. XXII. Die wie in XXI. gebildete Röhre umgekehrt, daß das Kegelstück auswärts kam.

	N		O
XIII	1 M.	30 S.	$7\frac{1}{2}$
XIV	1	33	$7\frac{3}{4}$
			$7\frac{1}{6}$
XV	1	15	$8\frac{1}{5}$
XVI	1	30	$7\frac{1}{2}$
XVII	1	$12\frac{1}{2}$	
XVIII	1	10	
XIX	1	$12\frac{1}{2}$	
XX	1	10	
XXI	1	3	
XXII	1	10	

128. Beym XIII. Versuche ist des zusammengezogenen Wasserstrahls Durchmesser $7\frac{3}{4}$ in der Horizontallinie gemessen, wie bey den übrigen allen geschehen ist, aber $7\frac{1}{6}$ in der Verticallinie, etwa 2 Zoll weit vom Loche im Boden des Gefässes. P. hat solche Unterschiede bey andern Wasserstrahlen auch bemerkt, aber nicht genau gemessen. Bey den Röhren unterschied sich des zusammengezogenen Wasserstrahls Durchmesser so wenig von der Röhre ihrem, daß er nichts gewisses bestimmen konnte (123). Die Schwürigkeit des Wasserstrahls Durchmesser ge-

nau anzugeben, entsteht vornehmlich, von einer gewissen kleinen innern Bewegung im Wasserstrahle, und von einem Zittern des Lichts, das von des Wassers Oberfläche zurückgeworfen wird. Diese innere Bewegung wird durch die Röhren etwas verstärkt.

129. Polent hat in der Oberfläche des Wassers, das aus Röhren sprang, etwas wie rauhes bemerkt, und das Wasser ist nicht so durchsichtig gewesen, als wenn es aus bloßen Löchern, wie ein Crystall schoß.

130. Die bisherigen Versuche waren alle mit runden Oeffnungen angestellt. Nun ward XXIII; an das mittlere Gefäß, wo das Wasser herausfloß, eine kupferne Platte angebracht, die ein Loch von $7\frac{2}{3}$ Linien ins Gevierte hatte. Der Wasserstrahl zwo Linien von der Platte mit einer Ebene der Platte parallel geschnitten, gab ein Rechteck, dessen horizontale Seite 7, die verticale $6\frac{1}{2}$ Linien war; 5 Zoll weit von der Platte so geschnitten, gab er eine Figur, die von einer artigen auswärts und einwärts gebogenen krummen Linie umgränzt, 7 Linien hoch 14 Linien breit war.

131. Poleni schüttete auf dieses Strahls linken Theil gleich bey der Platte, Dinte; davon ward das Wasser des linken Theils dieses Strahls gefärbt, der rechte Theil aber schwärzte sich nicht, sondern beyde Theile giengen länger als zween Fuß weit von der Platte

so nebeneinander hin, als wenn eine lothrechte Ebene mitten längst des Strahls hin einen Theil von dem andern absondert (*).

132. XXIV. Noch eine andere Platte mit einem Loche, alles wie 131. ward verfertiget, und senkrecht auf diese Platte, wurden drey andere rechtwinklicht gegen einander gesetzt, die gleichsam drey Seitenflächen einer Röhre vorstellten, zu denen die vierte fehlte. An des Loches untersten horizontaler Seite von $7\frac{2}{3}$ Lin.; ward eine solche rechtwinklichte Platte mit einer gleich langen Seite gefügt, die beyden andern Platten lagen an den beyden lothrechten Seiten des Loches, waren aber einen Zoll breit, daß sie also noch über die Seiten des Lochs hinauf an der Platte hingiengen, in der sich das Loch befand. An die obere horizontale Seite des Lochs war keine Platte gesetzt, und so stellten diese angesetzten drey Platten eine viereckichte Röhre vor, die der 6 Zoll betragenden Länge nach horizontal läge, und da die obere Seitenfläche weggenommen wäre. Indem das Wasser durch diese Röhre herausschoß, war es oben am Loche, etwas mehr oder weniger zusammengezogen, wie Wasser, das zu einem bloßen Loche her-

(*) Wie gefärbtes und ungefärbtes Wasser ohne Vermischung eines neben dem andern hingeht, wenn man jedes aus einer eignen Sprütze durch ein eignes Rohr heraustreibt, die Rohre aber einander durchkreuzen, beschreibt s' Gravesande Elem. Phys. L. III. c. 9. §. 1661. 1662.

herausschiesst, an den Wänden der Röhre war es niedriger, weiter weg von dem Loche aber, hängte es sich dergestalt an die Wände an, daß beym Ausgange aus der Röhre das Wasser in der Mitte am niedrigsten war, an den Wänden aber 2 ganze Linien höher stund, als das Loch war.

133. XXV. Statt dieser an einer Seite offenen Röhre, setzte Poleni eine, die alle vier Seitenflächen hatte, jeder Seitenfläche Breite war $7\frac{2}{3}$ Linien, daß diese Röhre gleich um das Loch herumpasste, ihre Länge betrug 6 Zoll 1 Linie. Das gab also ein hohles Prisma, davon das Loch eine Grundfläche war.

134. Poleni schüttete auf des Wassers, das aus diesem Prisma herauskam, linken Theil, Dinte, wie (131), aber die Schwärze verbreitete sich gleich durch den ganzen Wasserstrahl kaum einen Fuß weit von seinem Ausgange.

135. Diese Versuche geben folgendes

	N	
XXIII	1 M.	38 S.
XXIV	1	24
XXV	1	17

136. Die erste Folgerung, welche diese Versuche geben, ist: Bey einerley Wasserhöhe, fliesst aus gleichen Oeffnungen, nicht immer gleichviel Wasser heraus. Diese Menge ändert sich mit dem Wege, den das Wasser zu diesen Oeffnungen nehmen muß, nachdem es dahin durch

durch das oder jenes Kegelstück, durch einen Cylinder u. s. w. geht.

137. Bis dahin hatte man Versuche angestellt, wieviel Wasser aus einer gegebenen Oeffnung, bey einer gegebenen Wasserhöhe, in einer gegebenen Zeit gelaufen war, und aus einem einzigen solchen Versuche, berechnet, wieviel durch eine andere Oeffnung, bey einer andern Höhe, in einer andern Zeit fliessen müsste (108).

138. Wenn man ein Mittel aus den Zeiten der beyden Erfahrungen 122. I; nimmt, so kömmt 2 M. 58 S. = 178 S; und eben so geben die drey Zeiten der Erfahrungen 122. IV; das Mittel 185 S. Diese beyden mittlern Zeiten sind sehr wenig unterschieden, ob sich gleich die grössern Durchmesser der Kegelstücken in beyden Versuchen ohngefähr wie 1 : 2, 8 also ihre Flächen etwa wie 1 : 7, 8 verhielten, die längern und die kleinern Mündungen für den Ausfluß waren einerley. Auch bey der Röhre V; war die Zeit mit vorigen fast einerley. In einer Fläche also, die enger und enger zugeht, (schliesst Poleni hieraus) vermehrt sich die Geschwindigkeit der Wassertheilchen, die durch sie herausfliessen wollen, dadurch nicht merklich, daß sie beym Durchgehen an sie stossen, hie und da von ihr reflectirt werden. Auch läsft sich dieses schon im voraus muthmassen, weil diese anstossenden, oder reflectirten Wassertheilchen, nach dem Stosse, oder der Zurückprallung, nicht schneller gehen werden, als die, welche schon

gerade

gerade nach der Länge gegen die Oeffnung hinausfliessen, und folglich der letztern Geschwindigkeit nicht vergrössern können, weil ein Körper, der eines vorhergehenden Geschwindigkeit vergrössern soll, selbst geschwinder als derselbe gehen muß. Gleichwohl nahm man bey den sehr kurzen Kegelstücken (127; XV. und XXI.) wahr, daß dadurch viel mehr Wasser auslief.

139. Diese sehr kurze Kegelstücke also beyseite gesetzt, wird man aus den Versuchen mit den übrigen und mit der Röhre annehmen können, daß bey der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus einer gegebenen Mündung herausfliesst, nicht viel auf die Grösse der Mündung ankömmt, wo es hineintritt.

140. Durch längere Cylinder, läuft mehr Wasser aus, bis sie zu lang werden, da alsdenn wieder weniger Wasser ausläuft. Man kann das Loch 127; XIV. für einen kurzen Cylinder annehmen, die Röhren XVII; XVIII; XX; nehmen an Länge zu, und die Zeiten werden bey XIV; XVII; XVIII; immer kürzer, bey XVIII und XX sind die Zeiten gleich lang; bey der langen Röhre XIX aber ist die Zeit wiederum länger als bey den nicht so langen XVIII; XX.

141. Daß aber eine Röhre, die aus dem Gefässe herausgeht, gleichsam die Kraft hat, zu verursachen, daß mehr Wasser ausläuft, als durch das Loch, wo sie an das Gefäß gefügt ist, gelaufen seyn würde; daß der Wasserstrahl, der sich würde zusammengezogen haben, wenn er

gleich

gleich aus dem Loche des Gefäſſes herausgesprützt wäre, ſich nicht zuſammenzieht, wenn er aus dem Ende der Röhre herausfährt, wo doch die Oeffnung eben ſo weit iſt, als das Loch im Gefäſſe war (128), daß er alſo gleichſam innerhalb der Röhre aufſchwellen muß, dieſelbe ringsherum auszufüllen, war um die Zeit, da Poleni dieſe Verſuche anſtellte, wie er glaubt, noch niemanden eingefallen. Poleni iſt ſo beſcheiden, ſelbſt zu meynen, daß Mariotte ſchon etwas dergleichen bemerkt; aber Mariotte redet von verticalen Röhren, nicht von horizontalen. Du Mouv. des eaux III. P. II. diſc. p. 423. Aus den Verſuchen mit der Dinte (131; 134;) folgert Poleni, daß das Waſſer, welches durch Röhren herausläuft, mehr innere Bewegung hat, als das aus einem Loche ſprützt, weil ſich bey jenem die Dinte ſchneller verbreitet.

142. Die Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls hat Newton ſchon in der zweyten Ausgabe der Principior. L. II. Sect. 7. Prop. 36. bemerkt. Die Verhältniß der Durchmeſſer des Lochs und des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls iſt bey ihm = 50:42; beym Poleni 52:41, aber auch Newton gibt zu verſtehen, daß ſeine Abmeſſung vielleicht nicht die gröſſte Schärfe habe. Daniel Bernoulli Hydrodynam. Sect. 4. §. 22. folgert aus ſeinen Verſuchen dieſe Verhältniß = $\sqrt{2}$: 1 = 1,41 : 1. Boſſüt giebt ſie = 100 : 62 für Oeffnung in einer dünnen Platte und = 100 : 81 für eine kurze Anſatzröhre.

143

143. Das Wasser, das zu einerley Oeffnungen oder durch einerley Röhren in gleichen Zeiten ausläuft, verhält sich doch nach 101.

So war bey der Platte im 124; 125. §.

	VIII	X Versuche
Wasserhöhe	128	542
Zeit	397	192

Wenn also des Gefässes Innhalt P (117) heisst, so liefen bey diesen beyden Versuchen in einer Secunde $\frac{P}{397}$ und $\frac{P}{192}$ heraus, und die Wassermengen, die in gleicher Zeit ausliefen, verhalten sich, wie diese beyden Quotienten, das ist wie 192 : 397. Es ist aber

log 397 = 2,5987905
log 192 = 2,2833012

0,3154893
gehört zu 2,067

Ferner log 542 = 2,7339993
log 128 = 2,1072100

0,6267893
halbirt 0,3133946
gehört zu 2,057

also ist beynahe $397 : 192 = \sqrt{542} : \sqrt{128}$.

Bey der Röhre

§.	122	124
Wasserhöhe	256	128
Zeiten	187	265

Die Verhältniß der Wasserhöhe aber ist = 2 : 1
also ihrer Quadratwurzeln = $\sqrt{2} : 1$.

Ferner

Ferner 187. $\sqrt{2}$ oder 187. 1,414 = 264,41 ... also beynahe 265 : 187 = $\sqrt{2}$; 1.

So geben andere Vergleichungen zwischen den angezeigten Versuchen alle beynahe die Verhältniß der Quadratwurzeln der Höhen.

144. Man wird also zu dem Gesetze (101) nur noch die Bedingung fügen müssen, daß die Wassermengen, die man nach demselben mit einander vergleichen will, eine wie die andere durch blosse Löcher, oder durch einerley Röhren laufen.

145. Die Kegelstücke (120) hat Poleni deßwegen gebraucht, um das Wasser durch eine weite Mündung eintreten und zu einer engen herausgehen zu lassen, wie es bey dem Graben (111), von dem sein Buch eigentlich handelt, aus dem Flusse in des Grabens weite Mündung tritt und zu einer engen herausgeht. Er ist auch durch eben diese Versuche in dem Gedanken bestärkt worden, den er schon zuvor gehabt, daß der Ausfluß des Wassers aus des Grabens engerer Mündung nicht sehr geändert wird, wenn sich gleich die Weite der ersten Mündung ändert (193).

146. Noch andere Versuche erzählt Poleni in einem Briefe an Marinoni (*). Sie sind bey

(*) Lettera del Marchese Giov. Poleni all' ill'mo Sig'r Giov. Iacopo Marinoni . . . Vi si e aggiunto un livretto di Giov. Buteone della Misura dell' acqua corrente . . . Volgarizzamento

bey einer Wasserhöhe von 13 pariser Fuß gemacht worden. Die Oeffnungen, durch die das Wasser floß, hatten, eine wie die andere, drey Linien im Durchmesser. In einer Minute gab

I. Ein rundes Loch, in einer dünnen eisernen Platte, 607 Cubikzoll.

II. Ein Loch von angegebener Grösse ward in eine messingene Platte gebohrt, die ein wenig mehr als $\frac{1}{4}$ einer Linie dick war, alsdenn schliff man auf einer Seite der Platte die Ecke, die des Lochs runde hohle Fläche mit der Ebene der Platte machte, ab, bis in die halbe Dicke der Platte hinein, so entstand, wie sich Poleni ausdrückt, ein hohles Kegelstück, dessen Grundfläche einen Halbmesser hatte, so groß als des Kegels Höhe. (Die Seite dieses Kegels nähmlich machte mit der Ebene der Platte und mit der Axe des anfangs gebohrten Lochs, das sich als ein Cylinder betrachten läßt, Winkel von 45 Gr.). Auf der andern Seite der Platte ward nichts geändert. Die Platte war also nun mit einer Oeffnung durchbohrt, die von der ersten Seite bis in die halbe Dicke der Platte hinein

to dell' edizione latina dell' anno 1724. . . In der nuova Raccolta; Vol. III. p. 507.

Io. Buteonis, Delphinatis, opera geometrica. Lugd. 1554; Quart, enthalten 68 . . 72. das Büchlein de fluentis aquae mensura. Vom Buteo, dieser Sammlung seiner Werke, und besonders dem Geometrischen darinn, rede ich in meiner Geschichte der Mathematik, I. Band (Gött. 1796) 468. S.

ein cylindrisch war, von dieser Mitte der Dicke der Platte bis hinauswärts an die andere Seite sich nach der Gestalt des erwähnten Kegelstücks erweiterte. Die erste Seite nach dem Gefässe, aus dem das Wasser lief, hineinwärts gekehrt, gab 627 Cubikzoll.

III. Die andere Seite, in der sich des Kegelstücks grössere Grundfläche befand, hineinwärts gekehrt, gab 713;

IV. Eine cylindrische Röhre 13 Linien lang, gab 809 Cubikzoll.

V. Diese Röhre um zwo Linien verkürzt und eines ihrer beyden Enden inwendig so ausgefeilt, daß es die Gestalt eines Kegelstücks wie (II.) bekam. Durch dieses Ende trat das Wasser aus dem Gefässe in die Röhre und zu dem andern Ende der Röhre liefen 889 Cubikzoll heraus.

VII. Diese Röhre noch um 4 Linien verkürzt, daß sie nur 7 Linien lang blieb, das vorerwähnte ausgefeilte Ende wieder nach dem Gefässe gekehrt; durch das andere Ende der Röhre liefen 905 Cubikzoll.

147. Die Berechnung, wieviel Cubikzoll in einer Minute ausgelaufen sind, ist so gemacht. Poleni bemerkte die Zeit, in welcher sich ein Gefäß von 2520 Cubikzoll, mit dem ausgelaufenen Wasser füllte. Daraus ließ sich berechnen, wieviel Cubikzoll in einer Minute ausgelaufen waren. Er stellte jeden Versuch zu wiederhohlten mahlen an, und wo sich Unterschiede von

einer oder ein paar Secunden fanden, nahm er das Mittel.

148. Da Polenis Versuche die umständlichsten, zuverlässigsten und lehrreichsten sind, die man über diesen Gegenstand hat, so wird es wohl keine grosse Entschuldigung brauchen, daß ich sie ausführlich beygebracht habe.

149. Man kann nun aus solchen Erfahrungen die eigentliche Geschwindigkeit des Wassers suchen, mit der es aus der Oeffnung herausgeflossen ist. Die Sache würde sich etwa so betrachten lassen. Man stelle sich einen Cylinder vor, dessen Durchmesser, wie bey der Oeffnung der zuletzt angeführten Versuche 3 Linien wäre. Sollte nun dieses Cylinders Innhalt z. E. wie beym VI. Vers. 905 Cubikzoll betragen; so liesse sich daraus seine Länge berechnen. Das Wasser, das in einer Minute ausgeflossen ist, hätte in dieser Zeit einen solchen Cylinder ausfüllen können, und man wird also des Cylinders Länge für den Weg annehmen können, den es in einer Minute zurückgelegt hätte, woraus sich seine Geschwindigkeit finden lässt.

150. Hätte die Oeffnung eine andere Gestalt als die runde, so betrachtete man nur statt des Cylinders ein Prisma.

Eine allgemeine Formel hiezu liesse sich so geben: die Fläche der Oeffnung heisse b, die Menge Wasser, die in einer gegebenen Zeit heraus-

herausfliesst = q; des Prisma Länge = k so ist

$$k = \frac{q}{b}.$$

Ist die Oeffnung ein Kreis, dessen Durchmesser = e; so ist

$$k = \frac{q}{\frac{1}{4}\pi . e^2} = \frac{q}{4e^2}.$$

0, 3183098 86... (Geom. 44 S. 5 Zus.)

Weil auch Euler Introd. in Analys. inf. L. I. §. 190. berechnet hat, daß log π = 0, 4971499 (s. Analys. des Unendl. 343) so ist

$$\log \tfrac{1}{4}\pi = -0,1049100$$

und also $\log k = \log q + 0,1049100 - 2\log e$.

151. Exempel. In dem Versuche 149; ist, alles in Linien ausgedrückt, q = 905. 1728 (weil 1728 Cubiklinien auf den Cubikzoll gehen) e = 3. Weil man aber k gewöhnlicher Massen nicht in Linien, sondern in Fussen verlangen wird, so setze man, diese Länge k betrage m Fuß oder m. 144 Lin. Da ist also m.

$$144 = \frac{905.1728}{\frac{1}{4}\pi.9} \text{ oder } m = \frac{905.12}{\frac{1}{4}\pi.9}.$$

log 905	=	2,9566486
log 12	=	1,0791812
		0,1049100
		4,1407398
log g	=	0,9542425
log m	=	3,1864973

Dieser Logarithme gehört zu 1536, 3

Also hat das Wasser eine Geschwindigkeit, mit der es in einer Minute 1536,3 pariser Fuß durchlaufen könnte. In einer Secunde durchlief es also 25,605 Fuß.

152. Wenn g bedeutet, wie tief ein Körper in einer Secunde fällt, und k der Weg ist, den ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit in einer Secunde zurücklegt, so gehöre diese Geschwindigkeit der Höhe h. Man sucht die Vergleichung zwischen h und k.

Aus höh. Mech. 1. Abschn. 40. Aufg., wo eben diese Aufgabe nur in andern Zeichen aufgelöst ist, kömmt $2g : k = \sqrt{g} : \sqrt{h}$; also $k = 2\sqrt{(gh)}$ und $h = \frac{k^2}{4g}$.

153. Aus höh. Mech. 2. Abschn. 45. ist in pariser Maasse $g = \frac{\pi^2 . 3 . 881}{2 . 864}$ Fuß.

Also $2 \log \pi = 0{,}9942998$ (150)

$\log 2643 = 3{,}4220972$

$4{,}4163970$

$\log 1728 = 3{,}2375437$

$\log g = 1{,}1788533$

gehört zu 15′,095

Wenn man die von Eulern gebrauchte 15,625 rheinländische Fuß (höh. Mech. I. Abschn. 36.) nach Geom. 32 S. 2. Anm. auf pariser Maaß bringt, findet man 15,096 pariser Fuß, welches mit vorigem übereinstimmet.

Belidor

Belidor Architectur. hydraulique I. B. 3. C. u. a. nehmen insgemein den Fall in einer Secunde 15 pariser Fuß an, also fast 0,1 eines Fusses zu klein. Diese 15 pariser Fuß machen nur 15,526 rheinländische.

Es würde beträchtliche Fehler geben, wenn man statt des wahren Werthes von g, die etwas unrichtige 15 Fuß gebrauchte, daraus Geschwindigkeiten zu berechnen, die durch den Fall von sehr grossen Höhen müssen erlangt werden. Denn so würde man schliessen, ein Körper fiele z. E. in 4. S. durch 15. 16 = 240 F., da er doch durch 241, 52 F. fällt. Bey gegenwärtigen Untersuchungen aber kommen, wie Belidor a. a. O. art. 471. erinnert, meistens Geschwindigkeiten vor, die durch den Fall von geringern Höhen als 15 F. erlangt werden, und da hat diese geringe Unrichtigkeit nichts zu bedeuten, weil sie sich nicht vervielfältiget sondern vermindert. Deßwegen ist eine Tafel nicht unnütz, die Belidor a. a. O. gegeben hat, wo man für jede Höhe des Falls, die 15 F. nicht übersteigt, die Geschwindigkeit angegeben findet. Die Höhen des Falls wachsen durch alle gerade Zahlen von Linien. Ich würde eine solche Tafel lieber nach Decimaltheilen des Fusses eingerichtet haben, weil die Reduction auf Zolle und Linien bey jedem Exempel verdrüßlich ist. Uebrigens lehrt B. 471. Art., wie man diese Tafel für grössere Höhen brauchen kann, welches leicht

einzusehen ist, wenn man die angezeigte kleine Unrichtigkeit nicht in Betrachtung ziehen will.

154. Man berechnet ohne eine solche Tafel leicht die Höhe h, welche der Geschwindigkeit k = 25,605 pariser Fuß (151) zugehört

$$\begin{aligned} 2 \log k &= 2{,}8166494 \\ \log 4g &= 1{,}7809133 \quad (153) \\ \hline \log h &= 1{,}0357361 \end{aligned}$$

giebt h = 10,857 Fuß

also etwas über 2 Fuß kleiner als die Wasserhöhe von 13 Fuß (146).

Es wäre k = 25 Fuß 7 Zoll 4,12 Linien; dieser Geschwindigkeit gehörte nach Belidors Tafel die Höhe 10 F. 11 Z. 2 L. mein h ist 10 F; 10,284 Zoll, ein wenig kleiner, weil nach meinen Zahlen die Geschwindigkeit von 30 Fuß in einer Secunde, durch einen geringern Fall, als durch 15 F., erlangt wird, B. aber dazu 15 Fuß erfodert.

155. Ein Körper, der 13 Fuß herabfiele, bekäme dadurch eine Geschwindigkeit von $2\sqrt{(g.13)}$ Fuß (152)

$$\begin{aligned} \log g &= 1{,}1788533 \\ \log 13 &= 1{,}1139433 \\ \hline & 2{,}2927966 \\ \text{halbirt} & 1{,}1463983 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline & 1{,}4474283 \end{aligned}$$

gehört zu 28,017 Fuß, welche Geschwindigkeit etwas über 2 Fuß mehr betrüge als die (154).

156.

156. Berechnete man aber auf eben die Art, wie in (151) die Geschwindigkeiten bey den übrigen Versuchen (146), so würde man sie viel kleiner finden. Und doch sind Wasserhöhen und Oeffnungen gleich groß gewesen. Auch hat sich Poleni auf die Art, die in (83) angezeigt wird, versichert, daß das Wasser in der That bey allen diesen Versuchen mit gleicher Geschwindigkeit herausgeschossen ist, denn es sprützte aus allen gleich weit, und so gar aus den blossen Löchern noch weiter als aus den Röhren. Um also zu begreifen, wie mit gleicher Geschwindigkeit aus gleichen Oeffnungen bald mehr bald weniger Wasser hat gehen können, kann man sich vorstellen, daß die Reihen von Wassertheilchen, aus denen ein Wasserstrahl besteht, die Wasserfäden, bald dichter an einander liegen, bald in grössern Entfernungen von einander gehen können; In dem letzten Falle wird weniger Wasser ausgebreitet, die Oeffnung auszufüllen scheinen, durch welche in gleicher Zeit und mit eben der Geschwindigkeit eine grössere Menge dichteres Wasser fliessen würde. Daß die Wasserfäden, die aus blossen Löchern fahren, weiter ausgebreitet sind als die, welche aus Röhren fahren, folgert Poleni eben daraus, weil der Wasserstrahl in jenem Falle so merklich von geringerer Weite scheint als das Loch (115), ohne Zweifel stellt er sich vor, die äussersten Fäden seyen von den übrigen so weit abge-

gesondert, daß sie sich einzeln dem Auge entziehen.

Bernoulli Hydrodyn. Sect. 4. §. 3. hat über die Zusammenziehung des Wasserstrahls unterschiedene Betrachtungen angestellt. Wie sich die Wassertheilchen beym Ausflusse lenken, kann man wahrnehmen, wenn man in ein Gefäß, das im Boden ein Loch hat, z. E. Stückchen Siegellack thut, und es mit dem Wasser ausfliessen lässt, die Wassertheilchen gehen, so lange sie noch hoch über dem Boden sind, fast lothrecht herunter, wenn sie ihm nahe kommen, lenken sie sich nach dem Loche zu, so daß die dem Boden am nächsten sind, fast horizontal, die entfernteren mehr vertical, da hinausfliessen. Wenn sie also in so mannichfaltigen Richtungen an das Loch kommen, so kann nicht jedes seine Richtung behalten, oder sogleich eine, die der Axe des Wasserstrahls parallel wäre, annehmen, sie stossen vielmehr selbst auf allerley Art gegen einander, und so wird theils der Wasserstrahl zusammengedruckt und enger als er beym Ausflusse war, theils die Bewegung des Wassers durch die Wirkungen der Theilchen in einander, noch nach dem Ausflusse beschleunigt, welche Beschleunigung von der zu unterscheiden ist, die es durch die Wirkungen der Schwere als ein fallender Körper erhält. Nachdem Wasser durch eines Kegelstücks engere oder weitere Mündung ausfliesst, wird sich der Strahl zusammenziehen oder ausbreiten, so daß im letzten Falle die Bewegung

wegung langsamer wird, und doch wegen Ausbreitung des Wasserstrahls in einer gegebenen Zeit, mehr Wasser ausfliesst, als eine Rechnung gäbe, die sich auf die Weite der Mündung und die Geschwindigkeit des Wassers, die man etwa nach (83) gefunden hätte, gründete.

Für die Rechnung (149) schlägt B. a. a. O. 6 §. vor, den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahls als die Grundfläche des dort betrachteten Cylinders anzunehmen. Man stellt sich nähmlich den Wasserstrahl, wo er am engsten ist, mit einer Ebene, die auf seiner Richtung senkrecht steht, durchschnitten vor, und braucht die Fläche, die man solchergestalt erhält, so wie dorten die Oeffnung. Nur scheint dieses sehr unsicher, weil eine richtige Abmessung so schwer ist (128), und ein kleiner Fehler im Durchmesser, einen beträchtlichen in der Fläche giebt.

157. Setzt man solche Veränderungen, die das Wasser beym Ausflusse leidet, beyseite, oder vergleicht man nur Versuche mit einander, wo das Wasser auf einerley Art ausgeflossen ist, und verfährt nach (149), so wird sich k (150) wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe verhalten (101). Eustachius Manfredi bemerkt, daß nicht leicht eine physische Wahrheit so übereinstimmend durch Erfahrungen sey bestätiget worden als diese, daß sich die Geschwindigkeit des Wassers, wenn die Oeffnung immer einerley bleibt, wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe verhält.

verhält. S. seine 4. Anmerkung über Guielminis I. Buch von der Natur der Flüsse; in der Nnova Raccolta Vol. 2. p. 322.

158. Aus den angeführten Versuchen richtige Folgerungen zu ziehen, bemerke ich noch das Einzige, daß bey ihnen allen die Oeffnung, durch die das Wasser ausfloß, in Vergleichung mit der Weite des Gefässes, sehr gering gewesen ist, daß man also durch sie nicht berechtiget ist, das Gesetz 101; auf Oeffnungen zu erstrecken, die, mit des Gefässes Weite verglichen, sehr groß wären.

War die Oeffnung in der Seite des Gefässes, so durfte ihre Länge, nach einer Verticallinie gemessen, in Vergleichung mit der Wasserhöhe nicht groß seyn, damit man ohne grossen Irrthum einerley Wasserhöhe für das Wasser, das durch die untern Theile der Oeffnung, und für das, welches durch die obern floß, annehmen durfte. So war in 127; die Wasserhöhe 19, 7mahl so groß als der Oeffnung Durchmesser, und da die Wasserhöhe vom Mittelpuncte der Oeffnung gemessen war (114), so war die Wasserhöhe über der Oeffnung obern Theile $178 - 4\frac{1}{2}$, über dem untern $178 + 4\frac{1}{2}$, welches also von 178 sehr wenig Unterschied giebt.

159. Hätte man durch eine Erfahrung bestimmt, was für eine Geschwindigkeit K sich bey einer gegebenen Wasserhöhe = A fände, so könnte man berechnen, was für eine Geschwindigkeit k, sich bey einer andern gegebenen Wasserhöhe

serhöhe a, befände; Es wäre nähmlich $k = K\sqrt{\frac{a}{A}}$.

160. Dieses hat Gulielmini zu leisten gesucht (*). Er bediente sich eines Gefässes wie in (95), das Wasser floß aber aus der Röhre durch eine Oeffnung, die ein Viereck war, dessen jede Seite $\frac{1}{4}$ bononischen Zoll hielt. Dieses Vierecks untere Seite war horizontal und genau 3 Fuß 11 Zoll unter des Wassers Oberfläche, daß also über des Vierecks Mittelpunct die Wasserhöhe 3 Fuß $10\frac{7}{8}$ Zoll betrug, und ohne Irrthum über das ganze Viereck so groß, nähmlich 46, 875 Zoll angenommen werden konnte (wie in 158). Auf dieser Höhe ward das Wasser beständig erhalten. G. bediente sich einer Uhr, da 67 Pendelschläge eine Minute gaben. In dieser Zeit liefen 32 Pfund 10 Unzen heraus; immer genau eben so viel, bey achtmaliger Anstellung dieses Versuches. Nun füllte man einen richtigen hohlen Cubikzoll von Kupfer mit Wasser, das wog auf einer scharfen Wage 1 Unze, 46 Gran, oder 786 Gran. (G. rechnet auf die Unze 640 Gran, auf das Pfund 12 Unzen).

161. So sind die 32 Pf. 10 Unzen = 394 Unzen = 25160 Gran, und das Wasser, das in einer Minute ausfloß, betrug $\frac{25160}{786}$ Cubikzoll $= 320\frac{320}{393} = 320,8142$ Cubikzoll. In einer

(*) De mensura aquar. fluent. Appendix post lib. 6.

einer Secunde flossen also 5,34690 Cubikzoll, ein Prisma, das diesen Innhalt, und zur Grundfläche die erwähnte Oeffnung $= \frac{1}{16}$ eines Quadratzolls hat, bekömmt zur Länge 16. 5,34690 $= 85,5504$ Zoll, dieß kann man für den Weg annehmen, den das Wasser mit seiner Geschwindigkeit in einer Secunde zurücklegte.

162. Man setze also in (159) den Weg in einer Secunde, $K = 85,5504$; $A = 46,875$; so lässt sich für jedes angenommene a, das damit übereinstimmende k leicht berechnen. Es ist nähmlich

$$\log k = \log K - \tfrac{1}{2}\log A + \tfrac{1}{2}\log a$$

wo $\log K - \frac{1}{2}\log A$ eine beständige Grösse ist, die zu jedem $\frac{1}{2}\log a$ addirt, jedesmahl log k giebt. Man muß alles in Zollen ausdrucken.

Exempel. $A = 30$ Fuß $= 360$ Zoll

$\log K - \frac{1}{2}\log A = 1,0967494 = \log$ const

$\frac{1}{2}\log a = 1,2781512$

$\log k = 2,3749006$

giebt $k = 237'',08$; soviel beträgt der Weg, den das Wasser mit seiner Geschwindigkeit in einer Secunde zurücklegen würde, wenn die Wasserhöhe 30 Fuß ist. Der Weg in einer Minute wäre also 14224,8 Zoll oder 1185 Fuß 4,8 Zoll. Für den letzten Weg setzt Guil. 1185 Fuß 5 Zoll. Er hat nähmlich nach seinem Versuche eine Tafel berechnet, wo für alle Wasserhöhen von 1 Zoll bis 30 Fuß, wie solche von Zoll zu Zoll zunehmen, die damit übereinstim-

menden Geschwindigkeiten so berechnet sind, daß Meg in einer Minute angegeben wird. Er hat seine Berechnung viel mühsamer, als nach gegenwärtiger Anweisung geschehen könnte, durch Ausziehung der Wurzeln verführt. Wenn man etwa seinem Versuche nicht trauen wollte, und durch einen andern Versuch eine andre Geschwindigkeit für eine beym Versuche angenommene Wasserhöhe fünde, so könnte man, meynt G. doch allemahl aus den Zahlen seiner Tafel die Zahlen, welche dem neuen Versuche gemäß wären, durch die Regel Detri ausrechnen. Dieser Gebrauch von G. Tafel würde nun gewiß unbequemer seyn, als die unmittelbare Berechnung durch die Logarithmen, da noch überdieß die Zahlen der Tafel in Fussen und Zollen ausgedruckt sind, und allemahl auf Zolle müssten gebracht werden.

163. Man kann fragen, was für einer Höhe die Geschwindigkeit K (161) gehört. Bedeutet g den Fall in einer Secunde, so ist diese gesuchte Höhe $= \frac{K^2}{4g}$ man muß aber g und K in einerley Maasse ausdrucken.

Ich habe die Verhältniß des rheinländischen Fusses zum bononischen = 13913 : 16824 angenommen. Es stimmt mit Verhältnissen, die man in Büchern z. E. in Crusens Contoristen findet, überein. Der Fall in einer Secunde, die 15,625 rheinländische Fuß, betragen also 155

bo-

bononische Zoll, dieses für g angenommen, und $\frac{1}{2}K = 42,7752$ gesetzt, finde ich die gesuchte Höhe 11,8 Zoll; ich rechne alles mit den Logarithmen. Diese Höhe wäre also noch nicht der vierte Theil von der Wasserhöhe. Es ist vermuthlicher, daß die Geschwindigkeit nach dem hier gebrauchten Verfahren sehr unsicher bestimmt wird, als daß die Wasserhöhe so sehr von der Höhe der Geschwindigkeit unterschieden seyn sollte, noch viel mehr als in Krafts Versuche (85). Bey Mariottens Versuche (104) finde ich die Geschwindigkeit der Höhe 6,334 Fuß zugehörig, welches beynahe die Hälfte der Wasserhöhe ist.

164. Wenn man gegentheils bemerkt, daß sich die Menge des ausfliessenden Wassers, und folglich das, was man eigentlich seine Geschwindigkeit nennen kann, dergestalt nach der Wasserhöhe richtet, wie sich die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers nach der Höhe richtet, von der er herabgefallen ist (144), wenn man Versuche findet, bey denen die Geschwindigkeit des Wassers beynahe so groß ist, als die Geschwindigkeit, die ein Körper durch den Fall von einer Höhe, so groß als die Wasserhöhe war, erhalten hätte (85; 154), so kann man wohl auf die Gedanken gerathen, daß eigentlich das Wasser mit der Geschwindigkeit herausschiesst, die ein schwerer Körper durch den Fall von der Wasserhöhe würde erhalten haben, daß Reiben an den Stellen, wo das Wasser herausgeht,

innere

innere Bewegungen, die im Wasser etwa auf dem Wege, wodurch es herausgeht, veranlasst werden, Wiederstand der Luft, vielleicht andere uns jetzt noch unbekanntere Ursachen machen, daß die Versuche meistens eine viel kleinere Geschwindigkeit des Wassers anzeigen. So geben Polenis (146) angeführte Versuche, in der Ordnung, wie sie da stehen, des Wassers Geschwindigkeit immer gröſſer und gröſſer, der letzte beynahe so groß als die, welche der Wasserhöhe zugehörte. Poleni vermuthet auf diese Veranlassung, man würde Versuche anstellen können, welche die Geschwindigkeit völlig von dieser Gröſſe darstellten, wenn man nur wüsste, was die Wege, durch die das Wasser ausfliesst (Röhren u. d. g.) hiebey für Veränderungen verursachten.

165. Man nimmt also an, daß die Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausfliesst, der Wasserhöhe zugehört, sowohl wenn die Oeffnung gleich am Gefässe, als wenn sie am Ende einer horizontalen oder verticalen Röhre (110) ist. Wie viel Recht man durch Erfahrungen hiezu hat, wird sich aus dem nur angeführten beurtheilen lassen. Theoretische Beweise hievon will ich hier noch nicht vortragen, ich erinnere aber vorläufig, daß sich dadurch der Satz rechtfertigen läſst, doch mit der Einschränkung auf kleine Oeffnungen, die schon durch die Versuche angegeben wird (158). Mittlerweile werde ich wohl nach diesem Satze rechnen, und die Rech-

nungen mit Erfahrungen vergleichen dürfen. Stimmen Rechnungen und Erfahrungen, so viel als sich erwarten läßt, zusammen, so wird dadurch wohl bestätiget werden, daß die Voraussetzung nicht sehr unrichtig ist.

Formel für die Menge Wasser, die unter einer gegebenen Wasserhöhe durch eine gegebene Oeffnung läuft.

166. Wenn also Wasser durch eine Oeffnung läuft, deren Fläche = S ist, und über dieser Oeffnung die Höhe A hat, g aber bedeutet, wie tief ein Körper in einer Secunde fällt, so werde ich annehmen, das Wasser fliesse durch diese Oeffnung mit einer Geschwindigkeit, mit der es in einer Secunde den Weg $2\sqrt{(g.A)}$ zurücklegen würde (152) und die Menge Wasser, die in einer Secunde durch diese Oeffnung fliesst, sey S. $2\sqrt{(g.A)}$ (150).

167. Weil das Wasser bey einerley Höhe, einerley Druck nach der Verticallinie und seitwärts ausübt (Hydrostat. 28), so erhellt aus (81), daß die Formel (166) gilt, die Oeffnung mag im Boden des Gefässes, oder in desselben Seite seyn. Nur muß sie wegen (158) im ersten Falle, in Vergleichung mit des Gefässes Weite oder Grundfläche, gering seyn; im andern Falle muß wenigstens ihre Länge nach einer Verticallinie gemessen, in Vergleichung der Wasserhöhe nicht viel betragen, daß in diesem

sem Falle ihre Breite nach einer Horizontallinie gemessen, nicht auch so klein seyn dürfe, wird aus folgender Betrachtung erhellen: Gesetzt, die Oeffnung bey N in dem Gefässe, das in der 15. F. mit S bezeichnet ist, wäre ein Rechteck, dessen Höhe 26 Linien wäre (so groß als die Durchmesser der Mündungen in 120) die Grundlinie möchte 1 Fuß = 144 Linien seyn; ist das Gefäß ein Prisma, so bleibt das Rechteck eben, ist es ein Cylinder, so macht diese Grundlinie einen Kreisbogen an seiner krummen Fläche. Ist nun die Höhe von 26 Linien, in Vergleichung mit der Wasserhöhe was geringes, so daß es keinen grossen Unterschied macht, ob man von des Wassers Oberfläche im Gefässe S bis an die obere oder bis an die untere Gränze des ebenen, oder um den Cylinder gekrümmten Rechtecks, oder bis an desselben Mittel hinabmisst, so lässt sich dieses Rechteck durch Verticallinien, die in des Cylinders krummen Fläche, nahe nebeneinander hinaufgehen, in kleine Quadrate oder Rechtecke theilen, so schmahl als man will, nachdem man diese Verticallinien, nahe neben einander zieht; Jedes solches kleine Rechteck oder Quadrat lässt sich als eine besondere kleine Oeffnung = S (166) ansehen, durch die das Wasser gewiß nach (166) ausläuft, wenn nur das daselbst angenommene Gesetz wahr ist, und weil die Wasserhöhe über alle diese kleinern Rechtecke einerley ist, so ist die Summe der Wassermengen, die durch alle diese Rechtecke zusam-

men auslaufen, einerley mit der Wassermenge, welche nach (166) durch ihre Summe, das ist, durch ein Rechteck ausläuft, dessen Höhe 26, die Grundlinie 144 Linien wäre.

Ich habe, diese Schlüsse abzukürzen, das Gefäß als einen Cylinder betrachtet, hätte es jede andere prismatische, pyramidenförmige, kegelartige Gestalt, so würde man die kleinen Rechtecke, von denen ich geredet habe, so erhalten, daß man sich durch eine gegebene Verticallinie, (etwa die Axe des Gefässes, wenn es ein Kegel wäre) Ebenen legte, welche die Fläche des Gefässes schnitten. Diese Durchschnitte, so viel von ihnen zwischen die horizontalen Gränzen des grossen Rechtecks fiele, würden die Höhen der kleinern seyn. Dieses wird zeigen, daß das Gefässe, was für eine Figur man will, haben mag.

168. Wollte man nicht annehmen, daß die Höhe, welche des Wassers Geschwindigkeit zugehört, mit der Wasserhöhe einerley sey, aber doch, daß sich diese Geschwindigkeit allemahl wie der Wasserhöhe Quadratwurzel verhalte, so müsste man nach (159) so verfahren: Für die Wasserhöhe A sey die Geschwindigkeit so groß, daß sie der Höhe des Falles H zugehöre, so wird in einer Secunde mit dieser Geschwindigkeit der Weg $2.\sqrt{(g.H)}$ beschrieben; und eben so der Weg $2.\sqrt{(g.h)}$ mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe des Falls h zugehört, und von der ich annehme, sie finde bey Wasser statt, wo die Wasserhöhe a ist. Nachdem also, was

man jetzo annimmt, ist $2\sqrt{(g.h)} : 2\sqrt{(g.H)} = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ oder $h = \frac{H}{A} . a$, wo $\frac{H}{A}$ aus einem Versuche gegeben seyn muß; z. E. Guilielminis Versuch angenommen, wäre $\frac{H}{A} = \frac{11,8}{46,875}$ (163). Wenn man also eine Rechnung nach (166) geführt hat, so darf man nur die Wasserhöhe, welche darinnen zugleich für die Höhe, die der Geschwindigkeit zugehört, angenommen ward, überall mit $\frac{H}{A}$ multipliciren, so bekömmt man das Facit so, wie es gegenwärtige Voraussetzung und der angenommene Versuch geben.

Setzt man $\frac{H}{A} = m$, so findet sich bey G. Versuche $\log m = -0,5990592$.

Anwendung der Formel (166) auf Gefässe, die sich ausleeren.

169. Aufg. Ein prismatisches Gefäß, dessen Durchschnitt mit einer Verticalfläche IKML 14 F. vorstellen mag, und von dem die Grundfläche gegeben ist, habe in seinem Boden bey A eine gegebene Oeffnung, an der sich eine Röhre AE von gegebener Länge befindet, (jetzo wird das Stück nicht betrachtet, das sich von E nach G krümmt). Man füllt Gefäß und Röhre so, daß das Wasser im Gefässe bis an ICB reicht;

und nun lasse man es durch E auslaufen. Man fragt, in wie langer Zeit sich das Wasser im Gefässe um eine gegebene Höhe, z. E. aus L in H senkt, oder gar das Gefäß leer lässt?

Aufl. I. Die Höhe des Wassers über des Gefässes Boden, ehe es auszulaufen anfängt, sey ML = c; die Länge der Röhre AE oder die Länge ihrer verticalstehenden Axe = b, ferner verhalte sich die Fläche jedes horizontalen Querschnittes des Gefässes, zur Fläche der Oeffnung in E = m : n; das sind die beständigen Grössen, die in dieser Untersuchung vorkommen;

Nun sey nach Verfluß der Zeit t; das Wasser, indem es durch E ausgelaufen ist, von L in H gesunken, so daß nun seine Höhe über E; = b + MH = x ist, wie sie Anfangs = b + ML = b + c war. In der Zeit dt aber senke es sich in den Gefässen um den Raum dx. Wenn dieses geschehen soll, so muß in eben der Zeit durch E soviel Wasser auslaufen, als ein Prisma enthalten kann, dessen Grundfläche, des Gefässes Querschnitt, die Höhe dx ist. Dieses Wasser aber in ein Prisma gebracht, dessen Grundfläche E die Oeffnung der Röhre ist, erfodert die Länge eines solchen Prisma sovielmahl grösser als dx, sovielmahl gegentheils die Oeffnung E kleiner ist als des Gefässes Querschnitt, das ist,

diese Länge muß $\frac{m}{n}$ dx seyn. Das Wasser muß also in E eine Geschwindigkeit haben, mit der es

in

in der Zeit dt diese Länge durchlaufen kann. Weil es nun in einer Secunde die Länge $2\sqrt{}$ (g. x) durchläuft (166), so durchläuft es in der Zeit dt die Länge $2\sqrt{}$ (g. x). dt welche also $=$ $\frac{m}{n}$ dx seyn muß. Daraus erhält man dt $=$ $\frac{m}{n}. \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{2\sqrt{g}}$ und $t = Const - \frac{m}{n}\sqrt{\frac{x}{g}}$; Es ist aber $t = o$ für $x = b + c$ weil die Bewegung anfängt, wenn das Wasser die Höhe $b + c$ über E hat. Also die verbesserte Integrale (Analys. Unendl. 204) $t = \frac{m}{n.\sqrt{g}}.(\sqrt{(b+c)} - \sqrt{x})$; welches die Zeit in Secunden angiebt.

II. Soll das Gefäß bis an seinen Boden leer werden, so ist $x = b$; und die Zeit dieser Ausleerung $= \frac{m}{n.\sqrt{g}}.(\sqrt{(b+c)} - \sqrt{b})$.

III. Gehörte die Geschwindigkeit nicht der Wasserhöhe x, sondern einer Höhe $= \frac{H}{A}$ x zu (168) so durchliefe das Wasser in der Oeffnung den Raum $2\sqrt{\left(\frac{g.Hx}{A}\right)}$. dt, in der Zeit dt, und das Wasser im Gefässe senkte sich in eben der Zeit um $\frac{m}{n}. 2\sqrt{(g.\frac{H}{A}x)}$ dt $=$ dx, also

$$\text{wäre } dt = \frac{\frac{m}{n} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx}{2\sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{H}{A}}}$$; die vorige Formel nur mit einer unveränderlichen Grösse dividirt, also wäre für diese Voraussetzung $t = \frac{m}{n\sqrt{g}} \cdot \sqrt{\frac{A}{H}} \cdot (\sqrt{(b+c)} - \sqrt{x})$ und die Zeit der Ausleerung wäre ebenfalls der Werth II; mit $\sqrt{\frac{A}{H}}$ multiplicirt.

IV. Nimmt man (I) an, so ist

$$\sqrt{x} = \sqrt{(b+c)} - \frac{n}{m} \cdot \sqrt{(g)} \cdot t$$

Also, die Wasserhöhe durch die Zeit

$$x = b + c - \frac{2.n}{m.} \sqrt{(g.(b+c))} \cdot t + \frac{n.n.g}{m.m} \cdot t^2$$

V. In der Zeit t, hat sich die Wasserhöhe aus $b+c$ in x verwandelt. Das Wasser ist also um $b+c-x$ gesunken. Das ist um $\frac{2.n}{m} \cdot \sqrt{(g.(b+c))} \cdot t - \frac{n^2.g}{m^2} \cdot t^2$

Dieser Werth läßt sich so ausdrucken.

$$\frac{n}{m} \cdot \sqrt{g} \cdot t\,(2\sqrt{(b+c)} - \frac{n}{m}\sqrt{g} \cdot t)$$

VI. In dieser Zeit sey die Wassermenge $= P$ ausgelaufen und m bedeute den Querschnitt des Gefäßes; so ist

$$n \cdot \sqrt{g} \cdot t \cdot (2\sqrt{(b+c)} - \frac{n}{m} \cdot \sqrt{g} \cdot t) = P$$

VII. Wenn die Zeit und die ausgelaufene Wassermengen nebst dem Querschnitte des Gefäßes gegeben sind, die Fläche der Oeffnung n zu finden.

$$2\sqrt{(b+c)} \cdot n - \frac{\sqrt{g} \cdot t}{m} \cdot n^2 = \frac{P}{t \cdot \sqrt{g}}$$

$$\frac{t \cdot \sqrt{g}}{m} \cdot n^2 - 2 \cdot \sqrt{(b+c)} \cdot n = -\frac{P}{t \cdot \sqrt{g}}$$

$$n^2 = \frac{2 \cdot m \cdot \sqrt{(b+c)}}{t \cdot \sqrt{g}} \cdot n - \frac{P \cdot m}{t^2 \cdot g}$$

Also

$$n = \frac{m\sqrt{(b+c)}}{t \cdot \sqrt{g}} \cdot (1 \pm \sqrt{(1 - \frac{P}{m \cdot (b+c)})})$$

170. In dem Augenblicke, da des Gefäßes Boden von Wasser frey wäre, befände sich noch die ganze Röhre voll Wasser, und es wäre noch übrig, die Zeit zu berechnen, in welcher dieselbe sich ausleerte. Diese Zeit aber wird bey den meisten Versuchen, die man dieserwegen anstellen könnte, so kurz seyn, daß sie nicht wohl könnte bemerkt werden. Wäre die Röhre 15

Fuß hoch mit Wasser gefüllt, das sich jetzo in ihr ruhig befände, und dem man alsdenn durch Oeffnung des untersten Endes der Röhre die Freyheit herauszufallen ertheilte, so fiele dieser Cylinder von Wasser, wie jeder schwere Körper, jeder Theil von ihm, sein oberer wie sein unterer fiel in einer Secunde etwa durch 15 Fuß und in dieser Zeit also wäre die Röhre von Wasser leer; Ist nun wie gegenwärtig die Röhre mit Wasser gefüllt, das aus dem Gefässe in sie getreten war, so hat dieses Wasser schon eine beträchtliche Geschwindigkeit, und verlässt also die Röhre noch viel eher als jenes, das aus der Ruhe zu fallen anfieng. Nimmt man dazu, daß bey einem Versuche die Röhre nicht oft 15 Fuß lang seyn wird, so erhellt, daß die Zeit, in welcher sie sich ausleert, viel kürzer seyn wird, als daß sie bey Versuchen könnte bemerkt werden, und daß man also den Werth (169. II.) für die Zeit der völligen Ausleerung annehmen kann.

171. Ist keine Röhre an dem Gefässe, so betrachtet man des Gefässes Oeffnung A, statt der Oeffnung der Röhre E; und setzt $b = 0$; das giebt alsdenn für die Zeit, in welcher das Wasser im Gefässe von der Höhe c über seinen Boden auf die Höhe x herabsinkt $\frac{m}{n\sqrt{g}} \cdot (\sqrt{c} - \sqrt{x})$ (169).

Und für die Zeit der Ausleerung $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{c}{g}}$ (169).

172. Anwendung auf Wasseruhren. Manière directe et geometrique de faire des clepsydres ou horloges d'eau, avec toute sorte de vases donnés percés ou l'on voudra, d'une petite ouverture quelconque. ... Varignon Mem. de l'Ac. des Sc. 1699; p. 78; Hist. p. 122.

Jn: Transactions of the Royal Irish Academy 1788. ist in der Classe Science n. VIII. p. 81. An Enquiry into the different Modes of Demonstration by which the velocity of *spouting fluids* has been investigated *a priori*; by the Rev. M. Young, D. D. ..

Erinnerungen gegen Newtons n. a. Beweise. Wenn man Theorie mit Erfahrung bey einem Gefässe, das sich ausleert, vergleichen will, sey nicht gut, das Gefäß ganz auslaufen zu lassen, weil die Bewegung zuletzt unregelmässig wird. Man soll also einen Theil auslaufen lassen, und berechnen, wie viel Zeit der nach der Theorie braucht, und das gegen die Erfahrung halten.

Betrachtungen über diese Theorie und Vergleichung mit Erfahrungen.

173. I. Ehe man nach diesen Formeln rechnet, wird es nützlich seyn, über Einiges Betrachtungen anzustellen, das die Voraussetzung auf welche sie sich gründen (165) enthält. Man stelle sich das Wasser im Gefässe KL (14 Fig.) durch wagrechte Ebenen, die einander unendlich nahe sind, in Schichten getheilt vor; indem das Wasser in E ausläuft, sinken diese Schichten,

und

und man nimmt an, daß sie alle mit einander parallel sinken, so daß, wenn die oberste aus ihrer ersten Stelle L, um die Höhe LH = y gesunken ist, jede andere Schicht von ihrer ersten Stelle um eine gleiche Höhe gesunken ist. Dieses anzunehmen ist man wohl deßwegen berechtiget, weil man bey jedem Gefässe, aus dem Wasser läuft, wahrnimmt, daß die obere Schicht, indem sie sich senkt, immer eben und wagrecht bleibt, und weil man nicht sieht, wie dieses geschehen könnte, wenn nicht alle unter ihr eben das thäten. Indessen ist offenbahr, daß nicht alle Theile jeder Schicht, nach Verticallinien herabgehen können, sondern daß wenigstens die, welche der Oeffnung bey A sehr nahe kommen, und nicht gerade über ihr sind, sich so lenken müssen, daß sie dadurch hinausgehen können, ohngefähr wie Dan. Bernoulli bemerkt hat (156). Wie man dieses mit dem parallelen Sinken der Schichten vereinigen soll, davon hat d'Alembert ein paar Möglichkeiten angegeben (*), davon die am leichtesten zu übersehen ist, daß dieser Theilchen so wenig sind, daß die von ihnen entstehende Aenderung, die sich zumahl erst beym Einflusse in A ereignet, hier nicht in Betrachtung zu ziehen ist. Es mag aber hiebey zugehen, wie es will, so gesteht d'Alembert, daß man aller Theorie über die Bewegung des Wassers entsagen müsse, wenn man nicht dieses parallele

(*) De l'équilibre et du mouvement des fluides; art. 110.

allele Sinken der Schichten annehmen wolle, das die Erfahrung zu lehren scheinet.

Daß eine der Schichten so geschwind als die andere sinkt, weil sie alle gleich weit sind, und die Geschwindigkeit des Wassers nur beym Durchgange in die Oeffnung A, anders wird, als sie im Gefässe war, nimmt man auch an. Jede dieser Schichten sinkt also mit einer Geschwindigkeit, die $\frac{n}{m}$ der Geschwindigkeit des Wassers in E ist, und folglich mit einer Geschwindigkeit, mit der sich in einer Secunde der Weg $\frac{2n}{m}\sqrt{gx}$ zurücklegen liesse (169). Mit dieser Geschwindigkeit muß die oberste Schicht sowohl, als jede andere sinken.

II. Es ist aber wenigstens von der obersten Schicht offenbahr, daß sie nicht schneller sinken kann, als ein schwerer Körper, der aus der Ruhe herabfällt. Denn anfangs, als man Röhre und Gefäß z. E. bis an L füllte, musste E verschlossen seyn, und da stund das Wasser ruhig. Nachdem nun E geöffnet ward, so fieng das Wasser deßwegen an zu fliessen, weil es schwer ist, wie es also bey E ausfliesst, das rührt von den Wirkungen der Schwere her; ohne mich zu bekümmern, was hiebey mitten und unten im Wasser vorgeht, sehe ich doch deutlich, daß die oberste Schicht von nichts niederwärts getrieben wird, als von der Schwere,

die

die in sie wirkt; das Wasser unter ihr, könnte auf keine Art in sie wirken, als so, daß es sie nach sich zöge, und dergleichen Zusammenhang der Wasserschichten nimmt man gewiß bey gegenwärtigen Berechnungen nicht an.

III. Gegentheils wäre begreiflich, daß die obere Schicht langsamer sinken könnte, als ein schwerer Körper fiele, der mit ihr zugleich aus der Ruhe zu fallen anfing. Dazu dürfte man nur annehmen, daß ihr die untern Schichten nicht schnell genug ausweichen; Sie würde alsdenn auf dieselben drucken, und derselben Bewegung zu beschleunigen suchen.

IV. Gesetzt also, das Wasser ist um die Höhe $LH = y$ gesunken $(y = b + c - x)$, so hat die obere Schicht, und folglich jede andere, keine grössere Geschwindigkeit, als eine solche, die der Höhe y zugehört, und mit der sich in einer Secunde der Weg $2\sqrt{gy}$ zurücklegen läßt. Folglich ist (I.) $\frac{n}{m}\sqrt{(b+c-y)}$ nicht grösser als $\sqrt{y}$ also $\frac{n^2}{m^2}.(b+c)$ nicht grösser als $(1+\frac{n^2}{m^2}).y$

V. Da nun in den ersten Augenblicken der Bewegung, y fast $= o$ ist, so ist in diesen Augenblicken $\frac{n^2}{m^2}(b+c)$ gewiß grösser als

(1

$(1+\frac{n^2}{m^2})y$; und die Vorausſetzung (I.) kann im Anfange der Bewegung nicht wahr ſeyn.

VI. In V; iſt $\frac{n^2}{m^2}(b+c-y) > y$ oder $\frac{n}{m}\sqrt{x} > \sqrt{y}$; Gehört nun in einem der erwähnten erſten Augenblicke der Bewegung die Geſchwindigkeit des Waſſers in E; der Höhe u, ſo daß mit ihr in einer Secunde der Weg $2\sqrt{gu}$ zurückgelegt würde, ſo iſt die Geſchwindigkeit jeder Schicht im Gefäſſe ſo groß, daß mit ihr in einer Secunde der Weg $\frac{2n}{m}\sqrt{gu}$ zurückgelegt würde, und nach IV; kann $\frac{n}{m}\sqrt{u}$ nicht gröſſer als $\sqrt{y}$ ſeyn. Folglich iſt $u < x$ die Geſchwindigkeit des bey E herausgehenden Waſſers, iſt alſo in den erſten Augenblicken der Bewegung kleiner, als in (165) angenommen wird, ſoll ſie aber dieſe angenommene Gröſſe in ſehr kurzer Zeit erreichen (91), ſo muß $\frac{n^2}{m^2}(b+c)$ ſo klein ſeyn, daß $(1+\frac{n^2}{m^2})y$ gar bald gröſſer werden kann. Man könnte glauben, dieſes ſey ſchon offenbahr, weil $\frac{n}{m}$ klein ſeyn ſoll (167),

aber

aber daraus, daß die Wasserschichten im Gefässe, in Vergleichung mit der Oeffnung sehr weit sind, und also schon viel Wasser auslaufen muß, wenn sich das Wasser im Gefässe nur ein wenig senken soll; dazu könnte nun doch wohl eine ansehnliche Zeit erfordert werden; die jetzigen Betrachtungen können uns also von dieser Zeit nichts entscheiden, sondern nur zeigen, was dazu erfordert wird, wenn die Geschwindigkeit, die der Wasserhöhe zugehört, in einer unmerklich kurzen Zeit erreicht werden soll.

VII. Vom Anfange des Ausflusses, bis an die (169. II.) bestimmte Zeit, wächst y von o bis c; Nimmt man b in Vergleichung mit c sehr groß an, so kann $\frac{n^2}{m^2}.(b+c) > (1+\frac{n^2}{m^2})c$ werden, z. E. wenn $b > \frac{m^2 c}{n^2}$ gesetzt würde. Alsdenn würde das, was V. im Anfange der Bewegung erinnert, statt finden so lange Wasser im Gefässe wäre, und man würde die Formel 169. bey solchen langen Röhren nicht brauchen dürfen.

VIII. Wo man sie aber brauchen darf, zeigt sie, daß bey einerley c und $\frac{m}{n}$ die Zeit der Ausleerung für längere Röhren kürzer wird. Denn, wenn man b sich verändern lässt, und den unveränderlichen Factor in dem Ausdrucke der Zeit beyseite setzt, so erhält man das Differential

((b

$((b+c)^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}) . \frac{1}{2} db$ welches für ein bejahtes db; verneint ist.

IX. Man kann schon hieraus urtheilen, daß das Gefäß mit einer Röhre, schneller auslaufen wird, als ohne Röhre. Die Rechnung zeigt es auch so: die erste Zeit der Ausleerung verhält sich zur andern wie $\sqrt{(b+c)} - \sqrt{c} : \sqrt{c}$ (169; 172) wenn man die beyden Glieder dieser Verhältniß quadrirt, und des ersten Quadrat von des letzten seinem abzieht, so kömmt 2. ($\sqrt{b}. \sqrt{(b+c)} - b$) welches gewiß bejaht ist. Also ist das letzte Glied gröſſer als das erste.

X. Zur Berechnung nachstehender Exempel erinnere ich noch vorläufig, daß die Höhe des Falles in einer Secunde 16,111 englische Fuß beträgt, wenn man sie in pariser Maasse wie (153) annimmt, und den englischen Fuß $\frac{1070}{1142}$ des Pariser setzt. Diese Verhältniß hatte ich in den drey ersten Ausgaben meiner Anfgr. der Geometrie 32. S. 3. Anm. aus Helshams Physik genommen. In der vierten 1786; nahm ich aus Phil. Transf. den pariser = 1,0675 des engl. Verbindet man diese Annahme mit (153) so giebt der Logarithme 1,2065086, den Fall in einer Secunde = 16,088 englische Fuß. Es schien mir nicht der Zeit werth, darnach alle die folgenden Rechnungen zu ändern, sie sind für 16,111 geblieben.

174. Exempel. Daniel Bernoulli; Hydrodyn. Sect. IV. Exper. 6. p. 82. bediente sich

eines Cylinders, da $c = 4$ Zoll, $b = 1$ Fuß, englisches Maaß; die Weiten des Cylinders und der Oeffnung A verhielten sich wie 110:1 und die Oeffnung bey E war so groß als bey A. Solchergestalt ist, den Fuß zur Einheit genommen $b = 1$; $e = \frac{1}{3}$; $\frac{m}{n} = 110$; und die Zeit der Ausleerung (169) $= 110. \frac{(\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{1})}{\sqrt{g}}$

$= 110. (\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1). \frac{3}{\sqrt{g}}$. Aus dem Werthe von $\sqrt{3}$ (Arithm. IV. C. 27.) findet man $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 = 0,1547005$ dieses mit 110 multiplicirt giebt 17,017055. Nun ist

$\log 17,017 = 1,2308829$

$\frac{1}{2}\log g = 0,6035678$ (aus 173)

$0,6273151$

dieser Logarithme gehört zu 4,239

die Ausleerung geschähe also in 4″,239.

175. Exempel. An einem Gefässe, für das b, c, und die Oeffnung A wie vorhin waren, hatte die Röhre eine Oeffnung E, die sich zur Oeffnung A wie 25:16 verhielt. Es war also, weil n allemahl der Oeffnung E zugehört

$m : A = 110 : 1$

$A : n = 16 : 25$

$m : n = 110. 16 : 25 = 110. 64 : 100 = 704 : 10$

und

und da alles übrige einerley bleibt, die Zeit der Ausleerung $70,4.\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$ Secunden, das

$$\frac{}{\sqrt{g}}$$

ich durch die Logarithmen wie vorhin 2″,712 finde.

176. Exempel. Eben das. Exper. 7. hatte ein prismatisches Gefäß eine Oeffnung in der Seite. Darinn befand sich ein Röhrchen, dessen Axe horizontal war, zum Auslaufe. Das Röhrchen war 4 englische Zoll lang, aber ein Kegelstück, so daß die Mündung am Gefässe, wo das Wasser hineintrat, genau 5 Linien, das andere wo das Wasser herauslief, $6\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser hatte, die Flächen sich also = 100:169 verhielten. Bernoulli füllte das Gefäß, bis das Wasser 13 Zoll 10 Linien über der Axe des Gefässes stand, und ließ es herauslaufen, bis es sich um 2 Zoll 8 Linien gesenkt hatte.

Hier kömmt die Länge der Röhre nicht in Betrachtung, weil sie wagrecht ist, und die Mündung, wo das Wasser ausläuft, nicht tiefer liegt, als die, wo es hineintritt. Man braucht also 171; nur muß die Verhältniß m:n die seyn, welche des Gefässes Weite zur Fläche der Mündung hat, wo das Wasser herauslauft. Sie war nach Bernoullis Angabe = 201:1 Ferner war c = 13 Zoll 10 Linien = 166 Linien = $\frac{166}{144}$ wenn der Fuß für die Einheit genommen wird; und x = 166 − 32 Linien = $\frac{134}{144}$ daher die gesuchte Zeit

$= 201. \frac{(\sqrt{166} - \sqrt{134})}{12\sqrt{g}}$. Es ist aber aus Ludolfs Tafeln in seiner Tetragonometria;

$\sqrt{166} = 12,884$

$\sqrt{134} = 11,575$

Unterschied 1,309

Dieser Unterschied mit 12 dividirt giebt 0,109 und das mit 201 multiplicirt giebt 21,909. Daraus finde ich, wie vorhin die gesuchte Zeit 5″,448.

177. Bernoulli, dessen Rechnung für alle diese drey Exempel sehr wohl mit gegenwärtiger übereinstimmt, hat die Versuche deswegen angestellt, um zu sehen, wie weit die Erfahrung von der Theorie unterschieden ist. Es verhält sich damit so:

	174	175	176
Rechnung	4,239	2,712	5,448
Versuch	6,5	$4\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$

178. Wenn im dritten Versuche (176) das Wasser sich innerhalb $8\frac{1}{3}$ Secunden so viel senkte, so lief es ohne Zweifel im Anfange dieser Zeit schneller, als gegen das Ende, da die Wasserhöhe merklich abgenommen hatte. Man kann sich indessen eine mittlere Geschwindigkeit vorstellen, mit welcher das Wasser diese Zeit über immer gleichförmig ausgelaufen wäre, und sich um eben soviel gesenkt hätte. Eben so kann man sich eine mittlere Geschwindigkeit vorstellen, mit welcher Wasser die $5\frac{1}{2}$ Secunden, welche

die

die Rechnung gab, beständig gelaufen wäre, und sich dadurch eben soviel gesenkt hätte. Jene mag die m. G. des Versuchs, diese der Rechnung heissen. Diese beyden mittlern Geschwindigkeiten verhielten sich also verkehrt wie die Zeiten, oder $= 5\frac{1}{2} : 8\frac{1}{3} = \frac{11}{2} : \frac{25}{3} = 66 : 100$; weil aber $100 : 66 = 3 : 1,98$ so ist die Geschwindigkeit des Versuchs beynahe $\frac{2}{3}$ der Geschwindigkeit der Rechnung.

Man kann also annehmen, die veränderliche Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bey dem Versuche wirklich in dem Augenblicke floß, da die veränderliche Wasserhöhe y war, sey allemahl $\frac{2}{3}$ derjenigen Geschwindigkeit gewesen, die das Wasser unter dieser Wasserhöhe nach der Rechnung hätte haben sollen. Diese letztere Geschwindigkeit hatte der Höhe y zugehört, folglich jene der Höhe $\frac{4}{9}$ y weil sich die Höhen wie die Quadrate der ihnen zugehörigen Geschwindigkeiten verhalten.

Die Geschwindigkeit des Wassers in der innern Mündung, wo es einfloß, ist so vielmahl grösser, als die Geschwindigkeit in der Mündung, wo es ausfloß, so vielmahl jene Mündung kleiner ist als diese. Jene Geschwindigkeit ist also 1,69 von dieser; und wenn diese der Höhe $\frac{4}{9}$ y nach dem Versuche zugehört, so gehört jene der Höhe $\frac{4}{9}$ $1,69^2$. y welches 1,269. y giebt; Nun ist kein grosser Unterschied zwischen 1,269 und $1,25 = \frac{5}{4}$; Also gehört die Geschwindigkeit des Wassers in der innern Mündung nach dem Ver-

suche ohngefähr der Höhe $\frac{5}{4}$ y zu. Wäre es gleich zu dieser Mündung ausgeflossen, so daß die nach aussen zu erweiterte Röhre daselbst nicht vorhanden gewesen wäre, so hätte die Theorie angenommen, die Geschwindigkeit daselbst gehöre der Höhe y zu. Das Wasser lief also bey dem Versuche, durch diese innere Mündung in die erweiterte Röhre schneller, als es nach der Theorie ohne Röhre zu ihr heraus hätte laufen sollen. Dieses drückt B. so aus: die Erweiterung der Röhre nach aussen zu beschleunige den Ausfluß des Wassers.

B. hat auch gemessen, wie weit das Wasser zu der erwähnten weitern Mündung herausspritzte, und fand (13. F.) AB = $9\frac{1}{2}$ Zoll, NA = 4 Zoll 8 Linien, wo N der weitern Mündung Mittelpunct ist. Hiernach gehörte des Wassers Geschwindigkeit einer Höhe von 4 Zoll $10\frac{1}{56}$ Lin. zu (83). Man kann leicht voraussetzen, obgleich B. es nicht ausdrücklich sagt, daß dieses vorgenommen worden, als das Gefäß noch ganz voll war, und folglich nach dem vorhin gewiesenen, die Geschwindigkeit des Wassers einer Höhe zugehören sollte, die $\frac{4}{9}$ von 166 Linien, das ist $6\frac{4}{27}$ Zoll, oder wie B. angiebt, 6 Zoll 2 Linien zugehörte. Diesen scheinbaren Widerspruch sucht B. durch die Ausbreitung des Wasserstrahls zu heben, von welcher am Ende des 156 §. ist geredet worden, wie er denn auch bey einem andern solchen kegelförmigen Röhrchen, die Weite, auf welche das Wasser sprützte, viel kleiner gefunden

funden hat, als sie nach der Theorie seyn sollte. Sect. 4. Exper. 11.

179. Unter den Versuchen des Mariotte, die (141) erwähnt worden, ist einer, den er so erzählt: Man hatte eine Röhre AE 14 F. 6 Fuß lang, und einen Fuß breit, an einer Oeffnung im Boden eines Cubikfusses KL 14 F. befestiget; Nachdem man diesen Kasten und die Röhre mit Wasser gefüllt hatte, ist die Ausleerung in 37 Secunden geschehen; man schnitt die Röhre in der Mitte ab, (zwischen A und E) und die Ausleerung erfolgte in 45 Secunden; man schnitt sie ganz oben (bey A) ab, und der Kasten leerte sich in 95 Secunden aus. Die Berechnungen auf diesen Versuch anzuwenden, verstehe ich ihn so: der horizontale Querschnitt des Gefässes ist ein Quadratfuß gewesen, und die Röhre hatte einen Zoll im Diameter. Wenn ich hieraus die Oeffnung der Röhre berechne, die, den Fuß zur Einheit genommen $= \frac{\pi}{144.4}$ seyn wird, und damit den Querschnitt des Kastens dividire, so bekomme ich $\frac{m}{n} = 183,3$. Es ist ferner, wenn die Röhre 6 Fuß war, $k = 6$; da nun $c = 1$ so wäre die Zeit der Ausleerung $183,3.$ $\frac{(\sqrt{7} - \sqrt{6})}{\sqrt{g}}$ Secunden, wo man g in pariser Maasse (153) nimmt. Nun ist $\sqrt{7} = 2,6457$; $\sqrt{6} = 2,4494$ also die gesuchte Zeit

183, 3. $\frac{0,1963}{\sqrt{g}}$ welches ich durch die Logarithmen 9, 263 Secunden finde, Mariotte 37 S. angiebt.

Eben so berechne ich aus (172) die Zeit, in welcher sich der Kasten ausleeren sollte $=$ $183,3. \frac{1}{\sqrt{g}} = 47,19$ Secunden, da Mariotte 95 angiebt.

Wenn man auch nur mit Mariotten (168) annimmt, so wäre doch, wie aus 169; III; erhellt, die Verhältniß der Zeiten, in denen sich der Kasten mit der Röhre von 6 Fuß und ohne Röhre ausleeren sollte, wäre $\sqrt{7} - \sqrt{6} : 1$; Nach Mariottes Angabe verhielten sich die Zeiten dieser Ausleerungen $= 37 : 95$ welches 0, 389 : 1 und von 0, 1963 : 1 sehr weit unterschieden ist.

Vielleicht habe ich Mariottes Erzählung nicht recht ausgelegt, ob ich gleich nicht sehe, wie eine andere Auslegung zu machen ist. Eben dieses hat mich veranlasst, diesen Versuch anzuführen, damit man ihn mit der Theorie vergleichen kann. Zwar erinnert M. kurz zuvor, da er sich einer verticalen gläsernen Röhre von 3 bis $3\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser bedient, das Wasser, das aus einem Kasten in einer Röhre hinabgelaufen sey, werde von dem, das noch im Kasten ist, wegen des Zusammenhanges der Wasser-

fertheilchen etwas zurückgehalten, so wie gegentheils, aus eben der Ursache das Wasser in der Röhre, jenes im Kasten etwas schneller nach sich ziehe, als es sonst aus dem Kasten gelaufen seyn würde, und daraus entstehe eine mittlere Geschwindigkeit des Auslaufens, die sich nach der Länge und Weite der kleinen Röhren ändert, aber das alles ist viel zu unbestimmt, und ich führe es nur deßwegen an, weil mir dieser Gebrauch des Zusammenhangs der Wassertheilchen, bey einem französischen Naturforscher aus den damaligen Zeiten merkwürdig scheint.

180. Wenn die beyden Zeiten in 171; 172; t; T; heissen, so ist $t : T = \sqrt{c} - \sqrt{x} : \sqrt{c}$ daraus erhält man $x = (\frac{T-t}{T})^2 . c$. Für gegebene c und T also verhält sich die Höhe x wie das Quadrat von $\frac{T-t}{T}$; Theilt man also T in eine gewisse Menge gleicher Theile ein, und c auch in eine andere Menge gleicher Theile, daß t, x, Mengen solcher Theile bedeuten, so verwandele sich x in $x-e$ in dem sich t in $t+1$ verwandelt, alsdenn ist $x-e = (\frac{T-t-1}{T})^2 . c$ folglich $e = \frac{2.(T-t)+1.}{T^2} c$; wo $2(T-t)+1$ allemahl eine ungerade Zahl; und allemahl desto kleiner ist, je grösser t ist, daß also die Grös-

sen e, die Unterschiede der Höhen x, so abnehmen, wie die ungeraden Zahlen zunehmen.

Wäre die Höhe des Gefässes $e = 100$, und die völlige Ausleerung geschähe in $T = 10$, daß man sich nähmlich diese Zeit in zehn gleiche Theile getheilt einbildete, so wäre $e = 19 - 2.t$ also für

$t =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e =$	17	15	13	11	9	7	5	3	1

Vom Anfange des Auslaufens bis zum Ende des ersten Zeittheils senkte sich das Wasser um 0, 17 der ganzen Höhe, aber am Ende des neunten Zehntheils, wäre nur noch 0, 1 der anfänglichen Höhe übrig, welches den letzten Zeittheil über ausläuft. Torricelli (93) hat nach Mariottes Anführen diese Berechnung angestellt.

Das Wasser läuft also mit einer gleichförmig verminderten Geschwindigkeit aus, wie schwere Körper steigen (Hdh. Mech. I. Abschn.).

181. Wenn man das Gefäß beständig voll erhielte, so liefe das Wasser auch beständig mit der Geschwindigkeit, die der Höhe c zugehört. In einer Secunde liefe also so viel Wasser aus, als in einem Prisma Raum hätte, dessen Grundfläche die Oeffnung, die Länge $= 2\sqrt{(g.c)}$ wäre; So viel Wasser, als das ganze Gefäß auf einmahl enthält, liesse sich in ein Prisma bringen, dessen Grundfläche die Oeffnung, die Länge $\frac{m}{n}c$ wäre, und so viel Wasser liefe also in

$\frac{\frac{m}{n}.c}{2.\sqrt{g.c}} = \frac{m}{2n}\sqrt{\frac{c}{g}}$ Secunden aus, und folglich noch einmahl so viel Wasser in der Zeit (172) oder: In der Zeit, in welcher sich ein Gefäß ausleeret, läuft aus ihm, wenn man es beständig voll erhält, noch einmahl so viel Wasser, als es auf einmahl enthalten kann.

182. I. Man sieht leicht, daß solche Sätze wie 180; 181; sind erfunden worden, um durch leichte Versuche die Voraussetzung zu prüfen, daß sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen verhalten. Denn daraus folgen diese Sätze (169; III.) wenn auch die Wasserhöhen nicht selbst als Höhen des Falls den Geschwindigkeiten zugehörten. Zu eben der Absicht dienen folgende Versuche (*).

II. Zwey cylindrische Gefässe A, B, von gleicher Weite sind, B viermahl so hoch als A, sie haben in ihren Boden gleiche Oeffnungen. Also ist in (172) $\frac{m}{n}$ für beyde einerley, c aber = 1 für A; und = 4 für B, und die Zeiten der Ausleerungen von A und B verhalten sich wie 1 : 2 oder B braucht noch einmahl so viel Zeit sich auszuleeren als A. Dieß prüfet man auf eine leichte Art so: Ein drittes Gefäß C, so weit als jedes der vorigen, ohne Loch im Boden, von einer Höhe, die $\frac{3}{4}$ der Höhe von B beträgt, wird unter

(*) s'Gravesande El. Phys. 1644.

ter B gesetzt, und nun fängt das Wasser aus A und B zugleich an zu laufen. Indem A leer ist, ist C voll, das ist, aus B sind $\frac{3}{4}$ des Wassers gelaufen, das es enthielt. Das letzte Viertheil befindet sich auf die Art über dem Boden von B, wie Wasser, das A anfüllte, und wird folglich in der Zeit auslaufen, in der sich A noch einmahl ausleeren könnte.

III. Ein Gefäß E; so hoch und so weit als A; hat im Boden eine Röhre, mit der es die Höhe von B erreicht, die Röhre, welche also dreymahl so lang seyn muß als das Gefäß hoch ist, ist durchaus so weit, als die Oeffnungen in A, B, im Durchmesser $\frac{1}{3}$ Zoll. Hier braucht man 169 für E; 172 für B, und es ist in 172; c = 1; in 169; c = 1; b = 3; m:n für beyde Gefässe einerley, also verhalten sich die Zeiten der Ausleerungen von B und E wie 1 : (2 — 1) oder beyde Zeiten sind gleich. Grasvesand bemerkt, daß sich die Oberfläche in B ein wenig schneller senke als in E (*).

IV. F ist einerley mit E; (**) nur ist seine Röhre unten ein wenig weiter als oben. F leeret sich schneller aus als B; folglich auch schneller als E (III.). Dieses folgt aus 169 so: für E, F, sind m, b, c, einerley, aber n ist kleiner für E als für F, folglich $\frac{m}{n}$ grösser für E als für F,

die

(*) 1657. (**) 1660.

die Zeiten der Ausleerungen verhalten sich wie $\frac{m}{n}$; also ist die für E grösser.

V. Wenn der Röhre untere Oeffnung, wo das Wasser herausläuft, weiter ist, als die obere, wo es aus dem Gefässe hineintritt, so läuft mehr Wasser aus, als wenn beyde gleich weit wären (*). Dieses erklärt Gravesand aus dem Zusammenhange des Wassers; das Wasser läuft aus der untersten Oeffnung mit einer Geschwindigkeit, die der Wasserhöhe zugehört, und reisst das ihm nächste obere mit sich fort, ist nun die untere Oeffnung weiter, so läuft da mehr Wasser aus, und zieht sogleich mehr nach sich.

183. I. Mariotte (**) hat von diesen Sätzen auser der Abweichung (182; V.) die er auch anführt, noch andere beträchtliche gefunden, wenn er sich, statt des Gefässes, wie KL 14. Fig. ist, einer vertical stehenden Röhre bedient, die etwa 2 bis 3 Fuß lang war, und einen halben Fuß im Durchmesser hatte, unten aber das Wasser durch eine Oeffnung, die 6 Linien im Durchmesser hatte, auslaufen ließ. In eine solche Röhre giengen z. E. 24 Pinten, und sie leerte sich in 4 Minuten aus. Erhielt man sie also beständig voll, so sollten 24 Pinten nach (181) in 2 Minuten auslaufen; allein es liefen in dieser Zeit nur 20 Pinten aus, und daß 24 ausliefen, war eine Zeit von 2 Minuten 24 Secunden nöthig. Das Wasser lief also aus der immer

(*) 1658. (**) III. Part. III. disc. p. 430.

mer voll erhaltenen Röhre nach Proportion langsamer, als aus der, welche sich ausleerte. Man kann dieses mit M. so erklären: wenn in der Röhre, die sich ausleert, das Wasser merklich gesunken ist, z. E. nur halb oder nur den vierten Theil so hoch steht, als im Anfange, so wird es zur Oeffnung mit geringerer Geschwindigkeit herausgetrieben, als im Anfange; der Widerstand der Luft, ist aber gewiß, und vielleicht auch das Reiben an den Rändern der Oeffnung, bey grösserer Geschwindigkeit stärker als bey geringerer, also findet das Wasser, wenn sich das Gefäß ausleeret, diese Hindernisse immer geringer und geringer; Sie bleiben aber immer gleich stark für das Wasser, das immer mit gleicher Geschwindigkeit aus dem voll erhaltenen Gefässe getrieben wird.

II. Eine andere Ursache, warum weniger Wasser ausfliesst, als ausfliessen sollte, ist, wenn sich das Wasser nicht lothrecht hinab nach der Oeffnung senkt, sondern in einem Wirbel hinunter geht, M. bemerkt, daß ein solcher Wirbel entsteht, wenn das Loch nicht durchaus in einer Ebene ist, und das Wasser an einer Stelle etwa ein wenig nach der Queere hinausläuft. Manchmahl bekömmt auch das Wasser, indem es ausläuft, auf seiner Oberfläche wie eine Grube, dergleichen geschieht, wenn sich Trichter ausleeren.

III. Ueber solche Umstände beym Ausflusse des Wassers stellt Belidor art. 527. lehrreiche Betrachtungen an. Wenn im Gefässe KL 14.

Fig.

Fig. wo jetzt keine Röhre, sondern nur die Oeffnung A seyn soll, das Wasser nur noch eine geringe Höhe AC über der Oeffnung hat, so füllt es zuweilen, den Raum gerade über der Oeffnung nicht völlig aus, sondern lässt in der Mitte einen leeren Raum, daß sich gleichsam ein Trichter aus Wasser bildet. Man kann dieses etwa so erklären: des Loches A, Halbmesser sey $= r$; die Wasserhöhe $AC = h$; gehört die Geschwindigkeit des Wassers der Wasserhöhe zu, so fliesst in einer Secunde die Wassermenge $\pi r^2 . 2\sqrt{gh}$ aus. Man stelle sich den Raum über A wie eine hohle Säule vor, deren Grundfläche die Oeffnung wäre. Bey P, stelle man sich um sie wie eine Zone vor, deren Umkreis $2r\pi$; Fläche $2r\pi dx$ wenn $CP = x$; durch diese Zone, wenn sie eine Oeffnung in die hohle Säule hinein abgäbe, flösse in einer Secunde die Wassermenge $2r\pi dx . 2\sqrt{gx}$ und also durch den Raum der Säule, der sich von C bis P erstreckt, wenn er offen wäre, $4r\pi . \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \sqrt{g}$, folglich $x = CA = h$ gesetzt, durch die ganze hohle Säule $\frac{8}{3} r\pi h \sqrt{(gh)}$. Dieses kann man für die Wassermenge annehmen, die das in A ausfliessende Wasser beständig zu ersetzen sucht. Denn das Wasser im Gefässe wird währenden Ausfliessens auf einerley Art auf die Fläche dieser Säule wirken, die Säule mag inwendig hohl, oder voll senkrecht hinabsinkenden Wassers seyn. Diese Wassermenge also, die herzufliesst, verhält

sich

sich zu der, welche durch die Oeffnung ausfliesst, wie $\frac{8}{3}$ h : 2 r = h : $\frac{3}{8}$. 2 r. Ist also die Wasserhöhe h kleiner als $\frac{3}{8}$ des Durchmessers der Oeffnung, so fliesst nicht genug Wasser herzu, das ausfliessende zu ersetzen, und so wird eine solche Höhlung über der Stelle, wo es ausfliesst, entstehen.

IV. Belidor hat über einer Oeffnung von 3 Linien, solche Höhlungen entstehen sehen, wenn das Wasser gleich noch über einen Zoll hoch war, also genug Wasser zufloß. Bey einem weiten Gefässe, da die Oeffnung einen Zoll im Durchmesser hatte, entstand die Höhlung bey 5 bis 6 Zoll Wasserhöhe. Er muthmasset, dieses rühre vom Drucke der Luft her. Wenn er ein Bret auf dem Wasser schwimmen ließ, das grösser als die Oeffnung war, und so die Luft auf das Wasser zu drucken hinderte, so entstand keine Höhlung.

V. Die Halbmesser der Oeffnungen bey A, F, mögen r, R heissen, das Wasser werde im Kasten KL beständig in der Fläche durch C erhalten, und FD sey wagrecht, so sind CA; CD; die Wasserhöhen, über A; F, und durch diese Oeffnungen fliessen in einer Secunde die Wassermengen $2r^2\pi . \sqrt{(g . CA)}$; $2R^2\pi . \sqrt{(g . CD)}$ die sich also wie $r^2 \sqrt{CA} : R^2 \sqrt{CD}$ verhalten. Sind beyde gleich, oder ist $r^2 : R^2 = \sqrt{CD} : \sqrt{CA}$ so fliesst durch A so viel Wasser zu, als durch F abfliesst, und so bleibt der Ausfluß des Wassers durch F immer gleichförmig; ist das erste Product grösser als das letzte, so will oben immer

mehr

mehr zufliessen, als unten abfliessen kann, und das wird die Bewegung des unten herausfliessenden Wassers beschleunigen. Wäre aber das erste Product kleiner als das letzte, so flösse nicht genug Wasser zu, das abfliessende zu ersetzen. In diesem Falle würde die Röhre AD nicht ganz voll bleiben, sondern nur bis an eine gewisse Stelle, z. E. R, durch das aus dem Kasten herabfliessende Wasser voll erhalten werden. Wenn also das Wasser bey F spränge, so würde die Höhe, auf die es springt, der Wasserhöhe RD gemäß seyn, nicht wie man erwarten würde, der Wasserhöhe CD. Daraus leitet Belidor her, warum manche Wasserkünste nicht so hoch springen, als man nach der Höhe ihres Wasserbehältnisses über die Oeffnung, wo es springt, erwarten sollte.

Ueber den Ausfluß aus runden Gefässen.

184. Aufg. Eine krumme Linie EQC, 16 F. beschreibe durch die Umdrehung um ihre verticale Axe EPB, ein rundes Gefäß, das bey E eine Oeffnung habe. Man sucht, wie dieses Gefäß sich ausleeren wird, wenn es mit Wasser gefüllt ist.

Aufl. Es sey $EP = x$, $PQ = y$; $EB = c$; $BC = k$; y und k werden die halben Durchmesser des Gefässes in den Höhen x; c; über der Oeffnung seyn. Ferner bedeute E die ganze Fläche der Oeffnung; das Wasser sey von B nach P,

herabgesunken, und man setze, bey der Wasserhöhe a habe es eine Geschwindigkeit, die der Höhe des Falls h, zugehört, so fliesst es aus der Oeffnung, nach (169. III.) mit einer Geschwindigkeit, damit es in der Zeit dt, den Weg $2\sqrt{(\frac{g.h}{a}.x)}.dt$ zurücklegt; dieser Weg mit E multiplicirt, giebt die Menge Wasser, die in dieser Zeit ausfliesst, und diese Menge ist $= -\pi y^2 dx$ (Analys. Un. 609.) ich brauche das Zeichen — weil x abnimmt, indem die Zeit zunimmt. Man erhält also

$$dt = \frac{-\pi y^2 dx}{2\sqrt{(\frac{g.h}{a}x)}.E}$$

welches man integriren kann, wenn aus der Gleichung der krummen Linie y durch x ausgedruckt ist.

185. Aufg. Man verlangt die Gestalt der krummen Linie EQC zu wissen, wenn das Wasser in gleichen Zeiten um gleiche Höhen sinken soll, so daß sich BP:PE verhält wie die Zeit, in der es von B bis P sinkt, zur Zeit der völligen Ausleerung.

Aufl. I. Weil alsdenn dx unveränderlich seyn muß, wenn dt unveränderlich angenommen wird, so ist der Quotient $\frac{dx}{dt}$ eine unveränderliche Grösse. Dieser Quotient aber ist

$$-\frac{2\sqrt{(\frac{g.h}{a}.x)}.E}{\pi y^2}$$ (184 wo man das Zeichen — beyseite setzen kann, weil es hier unnöthig ist, daran zu denken, daß die Zeit zunimmt, indem die Höhe abnimmt). Soll dieser letztere Quotient immer einerley bleiben, so behält er beständig den Werth, den er im Anfange hatte, wo $x = c$; $y = k$; und es ist also

$$\frac{2\sqrt{(\frac{gh}{a}.x)}.E}{\pi y^2} = \frac{2\sqrt{(\frac{gh}{a}.c)}.E}{\pi k^2}$$ oder

$$\sqrt{x} = \frac{y^2\sqrt{c}}{k^2} \text{ folglich } y^4 = \frac{k^4 x}{c}.$$

II. Hier kann man also k, c, nach Gefallen annehmen; alsdenn ist $y^2 = x^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{k}{c}}$

$$dt = \frac{-\pi dx}{E.2\sqrt{\frac{g.h}{a}}}.\sqrt{\frac{k}{c}}$$ und die const bestimmt

daß $t = o$ für $x = c$ findet man nach gehöriger Rechnung $t = \frac{\pi}{2E}.\sqrt{\frac{k.a}{g.h}}.(c - x)$ welches für $x = o$ die Zeit der völligen Ausleerung giebt.

III. Es erhellt, daß gleich grosse Veränderungen in x auch gleich grosse Veränderungen in t geben, ferner, daß g, h, a, Grössen sind, die

auf Erfahrungen ankommen und nicht willkührlich sind, daß durch diese Grössen und die willkührlich angenommenen E, c, k, die Zeit des Auslaufs bestimmt wird, so wie man gegentheils die Zeit des Auslaufs, und zwo von den Grössen E, c, k, willkührlich annehmen und daraus die dritte bestimmen könnte.

IV. Die krumme Linie wird wegen der Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit der Gleichung für die gemeine Parabel, eine Parabel von einer höhern Ordnung (Alg. 467.) genannt. Sie hat für eine Abscisse nur zwo Ordinaten, die entgegengesetzt, sonst gleich sind, (Alg. 237.) daher EQC ihre Hälfte vorstellen kann. Mariotte (*) giebt die Auflösung dieser Aufgabe, die nach seinem Berichte Torricelli vorgegeben aber nicht aufgelöst hat. Sie wäre zu Wasseruhren zu brauchen.

Vom Ausflusse des Wassers durch lothrechte Oeffnungen von beträchtlicher Grösse.

186. Aufg. AB 17. Fig. ist die lothrechte Wand eines Gefässes, in dem sich Wasser bis an die wagrechte Linie durch E befindet und in dieser Höhe beständig erhalten wird. Diese Wand hat eine Oeffnung HMGF, von gegebener Gestalt, an einer Seite von einer lothrechten Linie HF begränzt, die eine beträchtliche Länge

(*) a. a. O. 432. S.

ge hat, so daß sich ohne merklichen Irrthum nicht annehmen lässt, das Wasser stehe über H so hoch als über F. Man fragt, wie das Wasser durch diese Oeffnung ausfliessen wird.

Aufl. I. Es ist leicht, H für den höchsten Punct der Oeffnung, oder wenn sie zu oberst durch eine Horizontallinie begränzt wird, für einen Punct in dieser Horizontallinie anzunehmen, und die Verticallinie dadurch, HF, so weit zu erstrecken, daß sich F in der untersten Gränze der Oeffnung befindet, und man also HF, das ich = c setzen will, für die Länge der Oeffnung nach einer lothrechten Linie annehmen kann.

II. Man nehme HP = x; und ziehe dadurch PM = y horizontal; stellt man sich nun eine andere wagrechte Linie pm, unendlich nahe unter der vorigen vor, so enthalten beyde zwischen sich ein Element der Fläche der Oeffnung Pm = ydx.

III. Ich nehme an, das Wasser fliesse durch dieses Element, so wie es fliessen würde, wenn an der Stelle dieses Elements, in der Wand des Gefässes eine so kleine Oeffnung, das übrige der grossen Oeffnung GHF aber verschlossen wäre.

Wenn das Wasser durch eine solche kleine Oeffnung wie Pm fliesst, so hat es im Ausfliessen über und unter sich, die horizontalen Ränder dieser Oeffnung; fliesst aber Wasser durch die ganze Oeffnung HGF, so hat das, welches durch Pm fliesst, über und unter sich Wasser,

von dem angenommen wird, daß es auch wie das in Pm wagrecht herausdringe. Man darf also nicht vermuthen, daß das Wasser, welches durch Pm herausschiesst, etwa von dem obern werde gedruckt, von dem untern getragen werde, oder daß diese kleinen Wasserströme, deren jeder durch ein anderes Element der Oeffnung herausdringt, auf irgend eine Art in einander wirken, weil sie einer wie der andere in parallelen Richtungen herausdringen, und folglich wird es einerley seyn, ob das Wasser durch Pm zwischen den Rändern einer Oeffnung oder zwischen anderen Wasser herausdringt.

IV. Freylich würde es sich zwischen Rändern etwa reiben und zwischen Wasser, das mit ihm fast gleich schnell herausfliesst, wird dieses nicht geschehen; gegentheils könnte die anziehende Kraft der Materie, aus welcher die Ränder bestünden, anders auf das ausfliessende Wasser wirken, als die anziehende Kraft der Wassertheilchen, die mit ihm herausfliessen; so bleibt eine Wassersäule in einem Haarröhrchen hängen, aber aus einer weiten Röhre, fallen eine Menge jener gleichen Wassersäulen auf einmahl heraus. Allein solche Abweichungen von der Regel werden hier nicht betrachtet.

V. Ich will bey dieser Rechnung die Voraussetzung (168) annehmen. Es sey EH = a; und die Geschwindigkeit des Wassers in H gehöre der Höhe h; man könnte nähmlich durch

einen

einen Versuch auf die Art, wie 163 zeigt, finden, was bey einer gewissen Wasserhöhe, das Wasser für eine Geschwindigkeit hätte. Die Höhe, die dieser Geschwindigkeit zugehörte, würde sich zu h verhalten, wie die Wasserhöhe beym Versuche zu a; und also ist h gegeben, wenn a gegeben ist. Die Wasserhöhe bey dem Versuche könnte auch a selbst seyn, so wäre h unmittelbar durch den Versuch gegeben. Nimmt man (165) an, so ist $h = a$.

VI. Die Geschwindigkeit des Wassers in Pm, gehört also der Höhe $\frac{h}{a}$. EP und ist so groß, daß mit ihr in der Zeit dt der Weg $2\,dt\sqrt{\frac{g.h.(a+x)}{a}}$ zurückgelegt wird. Also fliesst in dieser Zeit durch Pm die Wassermenge $2\,dt.\,ydx.\sqrt{\frac{gh.(a+x)}{a}} = 2.\sqrt{\frac{gh}{a}}.\,dt.\,ydx\sqrt{(a+x)}$.

Weil nun dt für alle Elemente der Oeffnung einerley bleibt, so integrire man $ydx\sqrt{(a+x)}$ welches ich dQ heissen will, so daß es für $x = o$ verschwindet. In dem solchergestalt gefundenen Integrale setze man $x = c$; und heisse, was nun herauskömmt, S. So fliesst in der Zeit dt durch die ganze Oeffnung die Wassermenge $2\sqrt{\left(\frac{g.h}{a}\right)}$ S. dt und folglich, in der Zeit t, die Wassermen-

ge $2\sqrt{\left(\frac{g.h}{a}\right)}$. St weil in dt nichts veränderliches multiplicirt war. Sezt man $t = 1$ so hat man die Wassermenge in einer Secunde.

Vom Ausflusse durch ein Rechteck.

187. Die Oeffnung sey ein Rechteck 18 Fig. dessen Breite $FG = b = y$ so ist das Differential, das man nach 186; VI; zu integriren hat $bdx.(a+x)^{\frac{1}{2}}$; das Integral davon ist $\frac{2}{3}b.(a+x)^{\frac{3}{2}} + const$ Dieses $= o$ für $x = o$ gesezt, giebt $\frac{2}{3}b.a^{\frac{3}{2}} + const = o$; also das verbesserte Integral $\frac{2}{3}b.((a+x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$, und hierinn $x = c$ gesezt, giebt $S = \frac{2}{3}b.((a+c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ Folglich die Wassermenge, die in t Secunden durch die Oeffnung fliesst, $\sqrt{\left(\frac{h.g}{a}\right)}$. $\frac{4}{3}b.((a+c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}).t$

188. Man nehme irgend eine Stelle KN 18 F. an, so wird über ihr das Wasser langsamer, unter ihr schneller, auslaufen. Nun sezt man, in ihr laufe das Wasser so schnell aus, daß die nur gefundene Wassermenge, in der gleichen Zeit t, durch die Oeffnung auslaufen würde,

de, wenn sich alles Wasser durch die ganze Oeffnung mit der Geschwindigkeit bewegte, mit der es sich in dieser angenommenen Stelle bewegt. Wo sie sich befindet, berechnet man so: Sie sey um e unter H, so bewegt sich das Wasser in dieser Stelle mit einer Geschwindigkeit, welche der Höhe $\frac{h.(a+e)}{a}$ zugehört, und wenn es durch die ganze Oeffnung der Fläche $= b.c$ mit dieser Geschwindigkeit flösse, so gienge durch diese Fläche, in der Zeit t, die Wassermenge $2\sqrt{(\frac{h.g}{a}.(a+e))}.b.c.t$; Diese Wassermenge der 187. gefundenen gleich gesetzt, giebt

$$c\sqrt{(a+e)} = \tfrac{2}{3}.((a+c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$$

$$\text{Folglich } e = \tfrac{4}{9}.\frac{((a+c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})^2}{c^2} - a.$$

189. Gulielmini nennt diese Geschwindigkeit die mittlere, und die Stelle, wo sie statt findet: den Mittelpunct der Geschwindigkeit.

190. I. Diese mittlere Geschwindigkeit gehört also der Höhe $\frac{4}{9}.\frac{h.((a+c)^{3:2} - a^{3:2})^2}{a.c^2}$

II. Mit ihr wird in einer Secunde ein Weg zurückgelegt $= \frac{4}{3}.\sqrt{\frac{g.h}{a}}.\frac{((a+c)^{3:2} - a^{3:2})}{c}$

III. Die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in jeder Stelle gehört, verhält sich wie die Höhe des Wassers über dieser Stelle. In der untersten Stelle, in FG, gehört also die Geschwindigkeit der Höhe $\frac{h.(a+c)}{a}$; Mit ihr wird in einer Secunde der Weg

$$2.\sqrt{\left(\frac{g.h}{a}.(a+c)\right)}$$

zurückgelegt. Die Vergleichung dieses Weges mit dem (II), giebt, wie sich diese grösste Geschwindigkeit zur mittlern verhält.

IV. Für die folgende Rechnung setze ich $h=a$. (186; V).

V. Man nenne $c=2.B$, und H des Punctes E Höhe über der Linie EF Mitte, so ist $a=H-B$ und (IV) angenommen, in (II) der Weg in einer Secunde, oder die mittlere Geschwindigkeit $=$

$$\frac{2.\sqrt{g.}}{3.B}((H+B)^{3:2}-(H-B)^{3:2})$$

VI. Setzt man $B=n.H$ so kömmt diese mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{\sqrt{(4.g.H).}}{3.n}((1+n)^{3:2}-(1-n)^{3:2})$$

VII. Wie in (VI) druckt Klügel diese Geschwindigkeit aus, de rotis ab aqua subtus incurrente motis §. V. Commentationes Soc. R. Sc. Gotting. Vol. 9. ad 1787; 88; Class. Math. p. 26.

p. 26. Sein h, b, habe ich hie H, B, genannt. Weil B allemahl kleiner als H ist, so verwandelt er den Ausdruck (VI) in eine Reihe nach Potenzen von n, deren Exponenten gerade sind. Das diente, die Grösse zu finden, von deren Berechnung unten (195) geredet wird.

191. So viel Wasser wirklich, mit ungleichen Geschwindigkeiten, durch die verticale Oeffnung HG in 187; fliesst, eben so viel würde mit immer gleicher Geschwindigkeit, durch eben diese Oeffnung fliessen, wenn sie sich gleich im horizontalen Boden eines Gefässes befände, über dem das Wasser auf der 188 gefundenen Höhe $a + e$ stünde. Es versteht sich, daß in diesem Gefässe das Wasser beständig auf der Höhe $a + e$ müsste erhalten werden.

192. Stellte man sich die Oeffnung HG wie eine Spalte vor, die in der Wand des Gefässes von unten bis oben hinauf gienge, so daß sich H in der Oberfläche des Wassers befände, so wäre $a = o$ zugleich wäre $h = o$ denn wenn die Geschwindigkeit durch die Wasserhöhe bestimmt wird, so ist gewiß da keine Geschwindigkeit, wo kein Wasser darüber steht. Deßwegen aber wäre man nicht berechtiget $\frac{h}{a} = o$ zu setzen, weil die unveränderliche Verhältniß $h : a$ aus einem Versuche angenommen wird (186. V.). Hier würde man diese Verhältniß auch so ausdrücken können: wie groß oder wie klein auch a seyn mag,

so hat das Wasser allemahl in F eine gewisse Geschwindigkeit, die nie $= o$ seyn wird. Sie gehöre der Höhe f zu; so ist allemahl $\frac{f}{a+c} = \frac{h}{a}$ also wenn $a = o$ wird $\frac{f}{c} = \frac{h}{a}$.

193. I. In diesem Falle wird die Wassermenge (187) $\surd\left(\frac{f.g}{c}\right).\frac{4}{3}.b.c.^{\frac{3}{2}}t$; die mittlere Geschwindigkeit (190) verhält sich zur grössten wie $\frac{2}{3}$: 1 oder sie ist $\frac{2}{3}$ der grössten, hier befindet sich der Mittelpunct der Geschwindigkeit (189) unter der Wasserfläche in der Tiefe $e = \frac{4}{9}c$ (188).

II. Die Wassermenge ist $= \frac{4}{3}\surd(f.g).bc.t$ aber $2\surd(f.g)$ ist der Weg in einer Secunde mit der Geschwindigkeit, die das Wasser ganz zu unterst hat, also mit der grössten Geschwindigkeit, die das Wasser hier hat. Die Wassermenge in einer Secunde (für $t = 1$) ist also ein Parallelepipedum, dessen drey Seiten, Länge und Breite der Oeffnung und $\frac{2}{3}$ der grössten Geschwindigkeit sind. So drückt Belidor diesen Satz aus Arch. hydr. L. I. ch. 3. art. 540. und bedient sich auf eben die Art in andern solchen Berechnungen der grössten Geschwindigkeit.

194. Wenn man sich eine Parabel vorstellt, wo der Abscisse $a + c$; die Ordinate $2\surd h.g$

$(\frac{h.g}{a}(a+c))$ zugehört, so wäre dieser Parabel Parameter $4.\frac{h.g}{a}$ (Alg. 349.) in ihr gehörte jeder Abscisse $= a+x$ die Ordinate $2\sqrt{(\frac{h.g}{a}.(a+x))}$, und also wären die Ordinaten dieser Parabel die Geschwindigkeiten des Wassers, wenn die Abscissen die Wasserhöhen sind (186. VI.) die Parabel wäre also hier eine scala velocitatum (Höh. Mech. I. Absch. 19.) die Flächen dieser Parabel, welche den Abscissen, $a+c$, und a, zugehörten, wären $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{h.g}{a}}$; für die erste Abscisse mit $(a+c)^{\frac{3}{2}}$ für die andere mit $a^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt (Analys. Un. 208), folglich gäbe der Unterschied beyder Flächen, mit b. t multiplicirt, die Wassermenge (87). So hat Gulielmini, diese Berechnungen auf die Quadratur der Parabel gebracht. Das Stück der parabolischen Fläche, das auf diese Art die Wassermenge vorstellt, heisst bey ihm complexus velocitatum (*).

195. Von der Grösse $(a+c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}$ die in diesen Rechnungen so oft vorkömmt, kann man die beyden Glieder, ohne grosse Mühe, durch

(*) Mensura aqu. fluent. Lib. III. Prop. 2. Cor. 2. & Lib. I. def. 8.

durch die Logarithmen, oder aus Quadrat- und Cubiktafeln finden. Indessen lässt sich dieses noch mehr erleichtern, wenn man eine Tafel hat, die aus folgenden drey Columnen besteht. I. Die Reihe der natürlichen Zahlen, von denen jede $= u$ heissen mag. II. Neben jeder Zahl ihre Quadratwurzel $\sqrt{u}$; III. Die Producte jeder zwey neben einander stehenden Glieder der beyden ersten Columnen $u\sqrt{u}$. So wären z. E. drey neben einander stehende Glieder der drey Columnen I; 25; II; 5; III; 125. In einer solchen Tafel könnten die Zahlen der ersten Columne, Abscissen einer Parabel bedeuten, die Ordinaten und die Flächen der Parabel, welche diesen Abscissen zugehören, verhielten sich alsdenn wie die Zahlen der zweyten und dritten Columnen; und wenn man also die Wasserhöhe unter den Zahlen der ersten Columne aufsuchte, so verhielten sich die daneben befindlichen Zahlen der zweyten und dritten, wie die Geschwindigkeit des Wassers, das unter dieser Höhe ausfliesst, und wie die Menge Wassers, die durch eine Spalte wie (192) flösse. Die Rechnung also für (187) zu machen, setzte man erstlich $u = a$ und fände in der III. Columne $a\sqrt{a}$; darnach $u = a + c$ und fände eben so $(a+c)\sqrt{(a+c)}$; diese beyden Glieder der dritten Columne von einander abgezogen, gäben also, was dorten in $\sqrt{\left(\frac{h.g}{a}\right)}$. $\frac{4}{3}$ b. t multiplicirt wird.

Gesetzt

Gesetzt, es wäre $a = 25$; $a + c = 36$; so fände man in der dritten Columne 125 bey $u = 5$; und 216 bey $u = 6$; also $(a+c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} = 216 - 125 = 91$.

Dergleichen Tafel findet sich unter dem Namen einer parabolischen Tafel am Ende von Guido Grandis Werke del Movimento dell' Acque; die Werthe von u gehen von 1 bis 1800.

Dreyeckigte Oeffnungen.

196. HFG sey ein rechtwinklichtes Dreyeck, so daß HMG eine gerade Linie, dessen Hypotenuse ist. Es sey $FG = k$; so ist $y = \frac{kx}{c}$ also wird in (186; VI.) $dQ = \frac{k}{c} x . \sqrt{(a+x)} . dx$.

Man vergleiche, was hier in $\frac{k}{c}$ multiplicirt ist, mit Analys. Unendl. 284; so ist

dorten	x	r	n	a	b	p
hier	x	1	1	a	1	$\frac{1}{2}$

also das dortige Z hier $= a + x$ folglich (nach Verbesserung der dortigen häufigen Druckfehler)

$$\frac{c.Q}{k} = \frac{2Z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2aZ^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{Const} = \frac{2.Z^{\frac{3}{2}}}{15} . (3Z - 5a) = \frac{2}{15}(a+x)^{\frac{3}{2}} . (3x - 2a) + \text{Const}$$ weil

nun $Q = o$ für $x = o$ so ist $Q = \frac{2k}{15c}((a+x)^{\frac{3}{2}}.$
$(3x-2a)+2a^{\frac{5}{2}})$ und $S = \frac{2k}{15c}.((a+c)^{\frac{3}{2}}.$
$(3c-2a)+2a^{\frac{5}{2}})$ woraus sich die Wassermenge finden lässt. (186. VI.).

197. Befindet sich des Dreyecks Spitze H in der Oberfläche des Wassers, so ist $a = o$ und $S = \frac{2k}{15e}.3c^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}kc\sqrt{c}$ und wenn f die Bedeutung aus (192) hat, die Wassermenge in einer Secunde $= S.2\sqrt{\frac{gf}{c}} = \frac{2}{5}kc\,2\sqrt{gf}$; oder $\frac{2}{5}$ eines Parallelepipedi unter den beyden Perpendikeln des Dreyecks und der grössten Geschwindigkeit (193).

198. Die Oeffnung sey eben das Dreyeck, nur die Spitze unterwärts gekehrt, wie wenn 16. Fig. EQC eine gerade Linie wäre, da $BC = k$; $BE = c$; $BP = x$; $PQ = y$; also $c-x:y = c:k$ und $y = k - \frac{kx}{c}$ folglich $dQ = kdx.\sqrt{(a+x)} - \frac{kxdx}{c}.\sqrt{(a+x)}$ Von diesem Differentiale ist der zweyte Theil schon in 196 integrirt worden, der erste Theil mit Analys. Un. 248 verglichen, giebt

dorten

dorten:	r	n	a	b	p
hier	0	1	1	1	$\frac{1}{2}$

also ist nach Analys. Un. 250; dessen Integral

$\frac{2}{3}.(a+x)^{\frac{3}{2}}$ folglich

$$Q=\frac{2k}{3}.(a+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}.\frac{k}{c}.(a+x)^{\frac{3}{2}}.(3x-2a)+\text{Const}$$

$$\text{also } 0=\frac{2k}{3}.a^{\frac{3}{2}}-\frac{2k}{15c}.-2a+\text{Const}$$

daher

$$Q=\frac{2k}{3}((a+x)^{\frac{3}{2}}.(1-\frac{3x-2a}{5c})-a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{2a}{5c}))$$

und

$$S=\frac{2k}{3}.((a+c)^{\frac{3}{2}}.(1-\frac{3c-2a}{5c})-a^{\frac{3}{2}}.(1+\frac{2a}{5c})).$$

199. Für $a=0$ ist $S=\frac{4}{15}kc\sqrt{c}$ und nach dem Verfahren in (197) die Wassermenge $2\sqrt{(g.f)}.\frac{4}{15}.kc$.

200. Also verhalten sich die Wassermengen in 197; 199; oder die Wassermengen, nachdem des Dreyecks Spitze oder seine Grundlinie in des Wassers Oberfläche ist, wie $\frac{2}{5}:\frac{4}{15}=3:2$. Es ist begreiflich, daß mehr Wasser ausläuft, wenn die Spitze oben ist, weil sich alsdenn des Dreyecks breitester Theil, am niedrigsten da befindet, wo das Wasser am schnellesten läuft.

201. Wäre die Oeffnung ein Dreyeck, das keine Seite weder lothrecht noch wagrecht hätte,

wie MON 19. Fig. So ziehe man durch seine Spitze OI lothrecht, und darauf NL, MI senkrecht, die also horizontal seyn werden. Aus nächst vorhergehenden Absätzen berechne man die Wassermengen, die durch die rechtwinklichten Dreyecke OMI, KMI fliessen, beyder Unterschied ist die Wassermenge, die durch OMK fliesst. Eben so geben die Wassermengen durch OLN, KLN, zusammen die Wassermenge durch OKN; und endlich die Wassermenge durch OMK, OKN, zusammen, die durch MON.

Geradelinichte Oeffnungen.

202. Da sich jede geradelinichte Figur in Dreyecke zertheilen lässt, so kann die Wassermenge, die durch sie fliesst, allemahl nach (196) berechnet werden. Abkürzungen dieses Verfahrens, und allgemeine Formeln zu suchen, ist nur bey den gewöhnlichsten Figuren der Mühe werth.

Krummlinichte Oeffnungen überhaupt.

203. Wenn eine Oeffnung ringsherum krumme Gränzen hat, so kann man durch verticale und horizontale Linien, allemahl in ihr Theile, wie HMGF 17. Fig. machen, die Wassermenge für jeden solchen Theil berechnen, und durch Addiren oder Subtrahiren die Wassermenge des Ganzen nach dem Verfahren in 201. finden. Hiebey ist keine Schwürigkeit, als die Natur

der krummen Gränzen durch Gleichungen auszudrücken, und die Integrationen zu bewerkstelligen, die (186) erfodert.

Kreisförmige Oeffnungen.

204. HMG 17. Fig. sey ein Bogen eines Kreises, der seinen Mittelpunct in der lothrechten Linie HF; und r zum Halbmesser hat, also ist

$y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ und in (186; VI.)

$dQ = \sqrt{(2rx - x^2)} . \sqrt{(a + x)} . dx.$

205. Besonderer Fall. Des Kreises oberste Stelle H sey in des Wassers Oberfläche, also $a = 0$; so ist $dQ = \sqrt{(2rx - x^2)} . \sqrt{x} . dx$

$= (2r - x)^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} . dx.$

Dieses mit An. Unendl. 248. verglichen, giebt

dorten	x	a	b	n	p	r
hier	x	2r	−1	1	$\frac{1}{2}$	1

also das dortige z hier $= 2r - x$ oder $x = 2r - z$, gegenwärtiges Differential verwandelt sich also in $z^{\frac{1}{2}} . (2r - z) . - dz = (z - 2r) . z^{\frac{1}{2}} dz$;

davon ist das Integral Const $+ \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} - 2r . \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$

$= \text{Const} + 2 . (2r - x)^{\frac{3}{2}} . (\frac{1}{5} . (2r - x) - \frac{2}{3} r)$

$= \text{Const} + 2 . (2r - x)^{\frac{3}{2}} . - \frac{(4r + 3x)}{15}$

Weil es nun für $x = o$ verschwinden soll; so ist $o = Const + 2.(2r)^{\frac{3}{2}}. - \frac{4r}{15}$, also

$Const = \frac{16}{15}. \sqrt{2}. r^2. \sqrt{r}$ und

$Q = \frac{16}{15}. \sqrt{2}. r\sqrt{r} - \frac{2}{15}. (4r + 3x). (2r - x)^{\frac{3}{2}}$

206. I. Ist HMG ein Quadrant; so setze man $x = HF = r$, dieses giebt nach (186; VI.)

$$S = \frac{16\sqrt{2}. r^2\sqrt{r}}{15} - \frac{2}{15}. 7r. r\sqrt{r}$$

$$= \frac{2}{15}. (8\sqrt{2} - 7). r^2\sqrt{r}$$

also die Wassermenge in einer Secunde, wenn nach 191; die Geschwindigkeit in F, der Höhe f gehört $2\sqrt{(g.f)}$. $\frac{16\sqrt{2} - 14}{15}. r^2$

Das doppelte der gefundenen Grösse giebt die Wassermenge durch einen halben Kreis, dessen Mittelpunct um seinen Halbmesser unter des Wassers Oberfläche stünde.

Setzt man $f = r$ so erhält man Belidors Regel Arch. hydr. Prem. Part. T. I. art. 551.

II. Ist HMG ein halber Kreis, also $HF = 2r$; $FG = o$; $S = \frac{16\sqrt{2}}{15}. r^2\sqrt{r}$; dieses mit $\sqrt{\frac{g.f}{2r}}$ multiplicirt, giebt die Wassermenge $\frac{16. r^2\sqrt{(g.f)}}{15}$.

Dieses

Dieses verdoppelt giebt die Wassermenge durch einen ganzen Kreis, dessen Mittelpunct um seinen Halbmesser unter der Wasserfläche steht.

Für $f = 2r$ kömmt Belidors Regel a. a. O. 550.

207. Wenn nicht $a = 0$ ist, so muß man dQ (204) allgemein integriren. Die mühsame Berechnung der Reihe hiezu zu erleichtern, setze man jetzo $r = 1$; weil man nach vollendeter Rechnung allemahl die Abmessung wieder ergänzen kann (Trig. 19 S. 1 Anm.) und drücke das Differential so aus:

$$\sqrt{(2x - x^2)}.\sqrt{a}.\sqrt{(1 + \frac{x}{a})}.\,dx.$$

So findet man die erste Wurzelgröße in Analys. Un. 275; die andere in Alg. 625. in unendlichen Reihen berechnet. Sie sehen so aus

$$\sqrt{2}.(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{32} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{128} - \frac{5.x^{\frac{9}{2}}}{128.16} -$$

$$\frac{7}{256.32}.x^{\frac{11}{2}} - \frac{21}{1014.64}.x^{\frac{13}{2}} -$$

$$\frac{33}{2048.128}.x^{\frac{15}{2}} ..$$

$$\sqrt{a}\left(1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}+\frac{x^3}{16a^3}-\frac{5x^4}{128a^4}+\right.$$
$$\left.\frac{7x^5}{256a^5}-\frac{21x^6}{1024a^6}+\frac{33x^7}{2048a^7}\cdots\right)$$

Das Product iſt: $\sqrt{2a}$ multiplicirt in

$$x^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}\cdot x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{32}x^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{128}x^{\frac{7}{2}}$$
$$+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a}-\frac{1}{64a}$$
$$-\frac{1}{8a^2}+\frac{1}{32a^2}$$
$$+\frac{1}{16a^3}$$
$$-\frac{5}{128.16}\cdot x^{\frac{9}{2}}$$
$$-\frac{1}{256a}$$
$$+\frac{1}{256a^2}$$
$$-\frac{1}{64a^3}$$
$$-\frac{5}{128a^4}$$

$$-\frac{7}{256.32}x^{\frac{11}{2}} \quad -\frac{21}{1014.64}x^{\frac{13}{2}} \quad -\frac{33}{2048.128}x^{\frac{15}{2}}$$

$$-\frac{5}{256.a} \quad -\frac{7}{256.64a} \quad -\frac{21}{1014.128a}$$

$$+\frac{1}{128.8a^2} \quad +\frac{5}{128.128.a^2} \quad +\frac{7}{256.256.a^2}$$

$$-\frac{1}{32.16a^3} \quad -\frac{1}{128.16a^3} \quad -\frac{5}{128.256a^3}$$

$$+\frac{5}{128.4.a^4} \quad +\frac{5}{128.32.a^4} \quad +\frac{5}{128.128.a^4}$$

$$+\frac{7}{256a^5} \quad -\frac{7}{256.4.a^5} \quad -\frac{7}{256.32a^5}$$

$$-\frac{21}{1024a^6} \quad +\frac{21}{1024.4.a^6}$$

$$+\frac{32}{2048a^7}$$

Man bezeichne die Coefficienten mit den grossen deutschen Buchstaben, so daß

$$\mathfrak{A}=-\tfrac{1}{4}-\frac{1}{2a};\ \mathfrak{B}=-\tfrac{1}{32}-\frac{1}{8a}-\frac{1}{8a^2}\text{ u. s. w.}$$

so daß $\mathfrak{G}=-\frac{33}{2048.128}-\frac{21}{1014.128a}\ldots$

$+\frac{32}{2048a^7}$. So ist das Product

$$\sqrt{(2a)}.(x^{\frac{1}{2}}+\mathfrak{A}x^{\frac{3}{2}}+\mathfrak{B}x^{\frac{5}{2}}+\mathfrak{C}x^{\frac{7}{2}}+$$
$$\mathfrak{D}x^{\frac{9}{2}}+\mathfrak{E}x^{\frac{11}{2}}+\mathfrak{F}x^{\frac{13}{2}}+\mathfrak{G}x^{\frac{15}{2}}\ldots)$$

Dieses mit dx multiplicirt und integrirt, ferner $2x^{\frac{1}{2}}$ als einen gemeinschaftlichen Factor abgesondert, giebt

$Q = 2\sqrt{(2ax)}.\ [\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}\mathfrak{A}x^2 + \frac{1}{7}\mathfrak{B}x^3 + \frac{1}{9}\mathfrak{C}x^4 + \frac{1}{11}\mathfrak{D}x^5 + \frac{1}{13}\mathfrak{E}x^6 + \frac{1}{15}\mathfrak{F}x^7 + \frac{1}{17}\mathfrak{G}x^8 \ldots]$

208. Soll HMG ein Quadrant seyn, so setzt man in Q (207) nach Ergänzung der Abmessungen (207) $x = r$, dadurch giebt sich S (186) und dieser Werth mit $2\sqrt{\frac{gh}{a}}$ multiplicirt, giebt die Wassermenge für den Quadranten. Verdoppelt man dieses, so hat man die Wassermenge für einen Halbkreis, den unten ein horizontaler Durchmesser begränzt.

209. Wenn man in Q (207) $x = 2r$ setzt, so erhält man S für den Fall, da HMG ein Halbkreis wäre, und daraus eben auf die vorige Art die Wassermenge, und wenn man selbige verdoppelt, die Wassermenge für einen ganzen Kreis, dessen oberste Stelle tief unter des Wassers Oberfläche ist.

210. Was 208 giebt, von dem, was 209 giebt, abgezogen, läßt die Wassermenge für einen Halbkreis, den oben ein horizontaler Durchmesser begränzt.

211. Um bey diesen Rechnungen sich des Vortheils, daß $r = 1$ gesetzt worden, so lange als möglich zu bedienen, überlege man, daß in der Reihe, die bey dem Werthe von Q (207) in $2\sqrt{2ax}$ multiplicirt wird, die Abmessungen so müssten ersetzt werden. Diese Reihe ist als eine blosse Zahl anzusehen, deren Abmessung $= 0$ ist; In ihr muß man also statt jeder Potenz von x, sich die gleiche von $\frac{x}{r}$ vorstellen, statt x^5; $(\frac{x}{r})^5$; So werden die Potenzen von x lauter Zahlen dazu $r = 1$; die Coefficienten dieser Potenzen müssen auch Zahlen seyn, also muß man überall, wo in einem solchen Coefficienten ein Bruch vorkömmt, der im Nenner eine gewisse Potenz von a hat, sich die gleiche Potenz von r im Zähler vorstellen, zum Exempel $\frac{5.r^4}{128.a^4}$ statt $\frac{5}{128.a^4}$. Es wird also am bequemsten seyn, daß man a durch eine Zahl ausdrückt, die r zur Einheit hat, z. E. 10 statt a setzt, wenn $a = 10r$; oder $\frac{20}{7}$ statt a setzt, wenn $a:r = 20:7$. Auf diese Art kann man die erwähnte Reihe völlig unter der Gestalt, wie die vorige Rechnung sie darstellt, brauchen, und nur statt x und a Zahlen schreiben, die r zur Einheit haben.

So wird diese Reihe eine Zahl oder eine Grösse, deren Abmessung $= 0$ ist. Aber dQ

wie es in 204 ausgedruckt war, hatte $2\frac{1}{2}$ Abmessungen, und Q muß eben so viel haben. Da nun die erwähnte Reihe mit $2\sqrt{(2ax)}$ multiplicirt ist, welches nur eine Abmessung hat, so muß man dieses noch mit $r\sqrt{r}$ oder die Reihe mit $2r\sqrt{(2arx)}$ multipliciren.

Eben so muß man auch bey S thun. In (208) gebrauche man die Reihe für Q auf jetzt erwähnte Art, so daß man in ihr $x = 1$ setzt, was herauskömmt mit $2r\sqrt{2ar^2} = 2r^2\sqrt{2a}$ multiplicirt, giebt S, und dieses mit $2\sqrt{\frac{gh}{a}}$ multiplicirt, giebt die Wassermenge, die sich also durch ein Product aus $4r^2\sqrt{gh}$ in eine Zahl ausdrucken läßt.

In 209; setzt man in der Reihe für Q, 2 statt x; die herauskommende Zahl multiplicirt man mit $2r.\sqrt{(2ar.2r)} = 4r^2\sqrt{a}$, das Product ist S; und das mit $2\sqrt{\frac{gh}{a}}$ multiplicirt, druckt die Wassermenge durch ein Product aus $8r^2\sqrt{gh}$ in eine Zahl aus.

Ich gebe hier die einfachen Producte an, die man für den halben Kreis (208) oder den ganzen (209) verdoppeln muß.

212. Die Reihe für Q, hat hier die Unbequemlichkeit, daß man nicht, wie sonst, für Reihen, die sich nähern sollen, zu geschehen pflegt, statt x einen Bruch setzen darf, sondern selbst

in (209) $x=2$ ſetzen muß. Daß indeſſen die Theile ihrer Coefficienten, in denen a nicht befindlich iſt, immer kleiner und kleinere Brüche werden, erhellet aus dem Geſetze, welches die Coefficienten nach dem binomiſchen Lehrſatze beobachten. Hieraus erhellt, daß auch $x=2$ geſetzt, doch z. E. $\frac{5}{128.16}.2^5=\frac{5}{64}=0,078$ welches noch mit $\frac{1}{11}$ multiplicirt wird, alſo Tauſendtheile giebt. Wer alſo mit dieſer Reihe auch für $x=2$ eine beträchtliche Schärfe erlangen will, muß ſich nur die Mühe nicht verdrieſſen laſſen, ſie auf mehrere Glieder fortzuſetzen, welches nach der gegebenen Anweiſung deſto leichter iſt, da die Wurzelgröſſen, die man hierbey braucht, ſo weit man will, ohne groſſe Mühe können berechnet werden.

Die Theile der Coefficienten, in denen a befindlich iſt, werden in der Folge immer geringer und geringer, je gröſſer a in Vergleichung mit r iſt. Wäre es z. E. $=10r$, ſo wäre $\frac{5}{128\,a^4}=\frac{5}{1280000}$

Man ſieht auch leicht, daß das ganze Verfahren von (207) an vorausſetzt, die Waſſerhöhe ſey in Vergleichung mit dem Halbmeſſer ziemlich groß. Denn, wenn ſie $=0$, wäre es ungereimt, dieſe Methode zu brauchen, weil man das Integral alsdenn algebraiſch hat (205).

213. Ist $\frac{a}{r}$ sehr groß, so braucht man nicht einmahl diese Reihen, sondern nimmt ohne merklichen Irrthum als eine beständige Wasserhöhe, die über des Kreises Mittelpunct $= a + r$ wie in 158; gehört ihrer Geschwindigkeit die Höhe k zu, (wo $k = \frac{(a+r)h}{a}$) so ist die Wassermenge für den ganzen Kreis $2\sqrt{\left(\frac{gk}{a+r}\right)}.r^2\pi$.

Hier lassen sich die Wassermengen bey unterschiedenen Kreisen nach 110; vergleichen.

214. Hieraus ist zugleich zu übersehen, daß dieses Verfahren bey geringen Wasserhöhen nicht wohl brauchbar ist. Stünde des Kreises oberste Stelle um seines Halbmessers zehnten Theil unter dem Wasser, so wäre $a = \frac{1}{10}r$ und das gäbe $\frac{5}{128a^4} = \frac{5.10000}{128}$. Für diesen Werth von a würde sich also die Reihe nicht nähern, weil die folgenden Coefficienten immer grösser und grösser würden.

215. I. Belidor a. a. O. 559. 560. §. beschäfftiget sich mit dieser Aufgabe (207) der schwersten, die ihm überhaupt unter den practischen Aufgaben vorgekommen. Man sieht es auch seiner Auflösung an, daß ihm alles sehr schwer geworden ist, und er mit unendlichen Reihen, welche die einzige Schwürigkeit dieser an

sich sehr leichten Aufgabe machen, nicht hat umzugehen gewusst, es wäre schlimm, wenn man bey Näherungen den Grad der Richtigkeit nur nach dem Scheine beurtheilen müsste, wie er §62. sagt. Diese Unvollkommenheit bedeutet bey einem sonst so verdienten Manne desto weniger, da er den Werth der Rechnung des Unendlichen unter den practischen Schriftstellern fast zuerst erkannt und eingeschärft hat.

216. Man kann das allgemeine Differential in der letzten Zeile (204) doch durch eine Reihe, die bequemer ist, und sich immer nähert, integriren, wenn man Cosinus von Vielfachen eines Bogens braucht. Hie wird es mir zu weitläuftig, dieses Verfahren beyzubringen. Man findet es in Bossüt Hydrodynamik, übers. von Langsdorf, I. B. 222. §. 284. Seite. Hr. Langsdorf bemerkt 285 S. dieses Verfahrens Vorzug vor gegenwärtigem, und zeigt noch, wie man am leichtesten eine für die Ausübung brauchbare Formel findet.

Ueber das Reiben.

217. Wenn man annimmt, daß die Wassertheilchen sich an den Rändern der Oeffnung, wo sie herausgehen, reiben, und dadurch in ihrer Bewegung gehindert werden, so erhellt, daß an jeder gegebenen Stelle dieses Randes das Reiben sich nach dem Drucke des Wassers auf diese Stelle richtet, und wenn man von festen

sten Körpern auf flüssige schliessen darf, einem gewissen Theile dieses Drucks, wie bey festen ohngefähr dem dritten (Höh. Mech. III. Abschn. 85.) gemäß ist. Läuft nun das Wasser zu einer Oeffnung heraus, deren Grösse man in Vergleichung mit der Wasserhöhe sehr gering annimmt (158), so wird es an eine Stelle des Umfangs der Oeffnung so stark gedruckt, als an die andere, der Druck und die ihm gemässe Friction verhalten sich also, wie der Umfang.

218. Steht aber Wasser auf unterschiedenen Höhen über gleichen Oeffnungen, so kann man wohl nicht annehmen, daß es gleiches Reiben leide, denn da es mit ungleicher Geschwindigkeit herausschiesst, so kann der Druck an beyder Oeffnungen Ränder nicht gleich seyn. So wenig sich noch aus den bisher erklärten Gründen dieser Druck überhaupt durch die Geschwindigkeit bestimmen lässt, so verwickelt würde auch hier diese Bestimmung werden, weil die Geschwindigkeit nicht etwa so, wie die Wasserhöhe für sich betrachtet, für sicher könnte angenommen werden, sondern durch die Friction selbst mit verändert würde, daß also die Friction, die man aus dem Drucke suchen wollte, sich selbst mit in der Geschwindigkeit befindet, durch die der Druck gefunden würde, wie bey algebraischen Aufgaben das Bekannte mit dem Unbekannten vermengt ist. Herr Euler hat einen

Anfang

Anfang gemacht (*), nicht die Friction und ihre Folgen zu berechnen, sondern sehr zusammengesetzte, und doch nur beynahe wahre Formeln zu geben, daraus sich durch Vergleichung mit Versuchen das Gesetz der Friction finden liesse, und er erfodert mit Recht, daß solche Versuche oft wiederhohlt würden.

219. Belidor hat die Sache so angegriffen (**): Er berechnet bey Mariottes Versuche (103), wie viel Wasser nach (165) hätte ausfliessen sollen. Dieses nennt er die natürliche Wassermenge (depense naturelle), mit der, die wirklich ausfloß (dep. effective) verglichen, giebt es den Abgang (déchet), den er bey diesem Versuche $\frac{3}{10}$ der natürlichen Wassermenge findet. Nun nimmt er an, bey einer runden Oeffnung von 3 Linien im Durchmesser, sey der Abgang allemahl $\frac{3}{10}$ der natürlichen Wassermenge, die Wasserhöhe möge groß oder klein seyn, (welches man nach 218 wohl nicht zugeben wird,) und berechnet also eine Formel, den Abgang für andere runde Oeffnungen zu finden; bey der doch, wenn auch seine Voraussetzung richtig wäre, Mariottens einziger Versuch keine zulängliche Sicherheit gäbe, die $\frac{3}{10}$ durchgängig anzunehmen, zumahl da der Abgang auch noch von andern

(*) Tentamen theoriae de frictione fluidorum Comm. Nou. Petrop. T. VI.

(**) Arch. hydr. Prem. Part. T. I. L. I. chap. 3. sect. 8. art. 491. suiv.

dern Ursachen als vom Reiben, z. E. vom Widerstande der Luft herrühren könnte.

220. Diese letzte Einwendung beyseite gesetzt, wird sich, was etwa in Belidors Formeln brauchbar seyn kann, auf folgendes bringen lassen: bey einer Oeffnung, deren Durchmesser = d, habe man gefunden, daß die natürliche Wassermenge q den Abgang e leidet. Man sucht bey einer andern Oeffnung, deren Durchmesser = D; und wo die natürliche Wassermenge = Q wäre, deren Abgang E.

Weil ich die Wasserhöhen gleich annehme, so verhalten sich, bey einerley Geschwindigkeiten, die Wassermengen wie die Flächen, und die Abgänge wie die Umkreise der Oeffnungen, oder es ist

$$q : Q = d^2 : D^2$$
$$e : E = d : D$$

folglich $\frac{e}{q} : \frac{E}{Q} = D : d$ oder $\frac{E}{Q} = \frac{e}{q} \cdot \frac{d}{D}$

Belidor setzt nach des Mariottes Versuche $\frac{e}{q} = \frac{3}{10}$ und $d = 3$ Linien, also $\frac{E}{Q} = \frac{9}{10.D}$ wo er D in Linien ausdrücken muß.

221. Wäre die zweyte Oeffnung, der Q, E, zugehören, kein Kreis, sondern ein Rechteck, dessen Seiten c, b, wären, so wäre

q : Q

$$q : Q = \frac{d^2 . \pi}{4} : c . b$$

$$e : E = d . \pi : 2 . (c + b)$$

$$\frac{e}{q} : \frac{E}{Q} = \frac{4}{d} : \frac{2 . (c + b)}{b . c}$$

$$\text{also } \frac{E}{Q} = \frac{(c + b) . d}{2 . b . c} . \frac{e}{q}$$

Ist das Rechteck ein Quadrat, dessen Seite des vorigen Kreises Durchmesser gleich ist, also $b = c = d$; so ist $\frac{E}{Q} = \frac{e}{q}$.

222. Belidors übrige Rechnungen sind aus den angeführten Ursachen unbrauchbar. Er erinnert mit Rechte, daß man zu Oeffnungen den Kreis wählen, oder doch das Quadrat dem Rechtecke vorziehen soll, weil diese Figuren den meisten Raum in den kürzesten Umfang einschliessen, und also die geringste Friction geben, die bey so viel Wassermenge möglich ist. Wie übrigens die Untersuchung dieses Abganges wegen der Friction einen beträchtlichen practischen Nutzen hätte, wenn man Wasser durch Oeffnungen austheilen soll, so zeigt sich auch eine neue Schwürigkeit, wenn die verticalen Oeffnungen in Vergleichung der Wasserhöhe von beträchtlicher Grösse sind, und das Wasser also an jeder Stelle des Umfangs eine andere Geschwindigkeit hat. Man sieht also leicht, daß das Rei-

ben bey flüssigen Materien noch viel schwerer zu untersuchen ist, als bey festen Körpern, und man ist ja selbst bey diesen nicht vollkommen mit der Untersuchung zu Stande.

Was unter der (ganz unsichern) Voraussetzung erfolgt, daß sich der Abgang der auslaufenden Wassermenge, den das Reiben verursacht, verkehrt wie die Geschwindigkeit verhalte, zeigt Grandi del movim. dell' acque L. II. Prop. 7.

Carré giebt eine Formel für Wassermengen, bey einer gewissen Voraussetzung des Reibens. Mem. de l' Ac. d. Sc. 1705; p. 275. ed. de Par.

223. Daß aus weitern Oeffnungen oder Röhren, bey einerley Wasserhöhe, das Wasser weiter sprützt, als aus engern, z. E weiter, wenn die Oeffnung 12 Linien, als wenn sie 8 Linien im Durchmesser hat, besonders, wenn die Wasserhöhe beträchtlich von 30; 50; 60; Fuß und drüber ist, bemerkt Mariotte (*), die Ursache davon wird wohl darinnen zu suchen seyn, daß das Reiben an den Rändern einer kleinen Oeffnung nach Proportion stärker ist, Mariotte fällt darauf, daß aus der grössern Oeffnung mehr Wasser auf einmahl herausdringt, und glaubt, es müsse aus eben der Ursache weiter gehen, aus welcher mit einerley Ladung eine Bleykugel weiter geht, als eben so viel Bley in Schrot zertheilt. Er hat aber nicht bedacht

(*) du mouv. des eaux IV. Partie 1. disc.

bedacht, daß im Schrote freylich eben so viel Bley dem Widerstande der Luft mehr Fläche darstellt, als in der Kugel, aber hier die Menge des herausdringenden Wassers sich wie die Fläche der Oeffnung verhält, folglich weniger Wasser mit seiner kleinern Fläche nach eben der Verhältniß in der Luft weniger Widerstand findet.

Diese Betrachtung über den Widerstand der Luft kann folgende kurze Untersuchung veranlassen:

Was man nöthig hätte zu berechnen, wie hoch Wasser vermöge seines Falles springt.

224. Aus der Oeffnung G, 14. Fig. soll Wasser springen, man erhält das Wasser in Sammelkasten KL beständig an die Horizontale ICB. Alle Hindernisse beyseite gesetzt, nimmt man an, das Wasser habe in G eine Geschwindigkeit, die der Höhe DC zugehört, so viel nähmlich C höher als G ist, und sollte auf eben diese Höhe steigen (Höh. Mech. I. Abschn. 45.). Die vornehmsten Ursachen, warum es nicht so hoch steigt, werden wohl folgende seyn.

I. Das bisher betrachtete Reiben.

II. Wegen des Zusammenhangs der Wassertheilchen werden nach Gravesands Gedanken

ken (*) diejenigen, die herausſprützen, etwas von den zurückgehalten, von welchen ſie ſich abſondern müſſen, und dadurch wird ihre Bewegung gehindert.

Ich zweifele, ob dieſe Hinderniß beträchtlich ſeyn kann, weil ſich alles in der Gegend, wo die Oeffnung iſt, ohngefähr gleich geſchwinde bewegt. Wenn man aus einem Gewehre ein paar Kugeln, mit einem Drate verbunden, vertical in die Höhe ſchieſſt, ſo vermuthe ich nicht, daß die vorderſte langſamer ſteigen wird, weil ſie mit der hintern zuſammenhängt, die ihr mit gleicher Geſchwindigkeit folgt.

III. Da die vorhergehenden Theile des ſpringenden Waſſerſtrahls immer mehr und mehr Geſchwindigkeit verlieren, ſo werden ſie von den nachfolgenden eingehohlt, aus einander getrieben, daß der Waſſerſtrahl weiter wird, durch dieſe Würkungen wird die Bewegung vermindert (**).

IV. Das Waſſer, das zu oberſt im Strahle ſeine Geſchwindigkeit verlohren hat, und ſenkrecht wieder herabſinken will, muß von dem nachfolgenden Waſſer getragen oder auf die Seite getrieben werden. Man hilft dieſem ab, wenn man den Waſſerſtrahl ein wenig neigt, dadurch geht aber oft ſeine Schönheit verlohren.

V.

(*) §. 1583.

(**) s'Graveſ. 1589. 1594.

V. Der Widerstand der Luft ist des Wassers Bewegung hinderlich.

225. Zu diesen Ursachen wage ich noch eine sechste zu setzen, die ich von niemanden bemerkt sehe:

Das Wasser wird sowohl in C als in G, von der Atmosphäre gedruckt. Dieser Druck ist nicht an beyden Seiten gleich stark, daß man ihn deßwegen weglassen könnte. Er ist in G so viel stärker, so viel das Gewicht einer Luftsäule beträgt, die sich von D bis C erstreckt; und da diese Länge bey springendem Wasser nicht so gar geringe zu seyn pflegt, so kann man das Gewicht dieser Luftsäule nicht so leicht aus der Acht lassen, wie etwa beym Heber geschieht (Hydraul. 4.). Man muß es wenigstens einigermassen zu kennen suchen, um daraus zu beurtheilen, ob es beträchtliche Aenderungen machen kann. Dazu kann folgendes dienen:

Wenn man in einem Barometer die Höhe des Queckſilbers bey G mässe, alsdenn das Barometer bey C brächte, wo das Queckſilber niedriger stehen müsste (Aerom. 77.), so gäbe der Unterschied zwischen beyden Höhen des Queckſilbers, wieviel der Druck bey C geringer ist, als bey G.

Man kann sich hievon einen Begriff aus schon bekannten Versuchen machen.

Mariotte erzählt (*), das Queckſilber ſey etwa um $\frac{4}{3}$ einer Linie gefallen, indem man ein Barometer aus dem Keller der pariſer Sternwarte, oben hinauf 84 Fuß höher getragen. Dieſe Queckſilberſäule von $\frac{4}{3.144}$ eines Fluſſes, gleicht hier einer Waſſerſäule von $\frac{4.14'}{3.144}$

$= \frac{7'}{54} = 0',1296.$

Wäre alſo die Höhe DC (14. Fig.) $= 84'$ ſo könnte man ſich die Sache ſo vorſtellen, als würde der Druck der Luft bey C und bey G weggenommen, über der Oeffnung bey G ſtünde eine Waſſerſäule von $0',13$ hoch, deren Gewicht durch das herausſpringende Waſſer müſſte gehoben werden. Ich dächte doch nicht, daß dieſes in der übrigen Berechnung gar keine Aenderung machen ſollte.

Iſt die Höhe DC geringer, ſo kann man ohne merklichen Irrthum die erwähnte Waſſerſäule in eben der Verhältniß kürzer annehmen, nur von $\frac{7'}{108}$ für $DC = 42'$ u. ſ. w. Mariotte hat gleichviel Fallen des Queckſilbers bemerkt, als er aus dem Keller 84 Fuß hoch, und als er von dieſer letztern Stelle noch 84 Fuß höher geſtiegen. ſchlieſſt

(*) de la nature de l'air. Oeuvres de Mr. Mariotte p. 175.

Schliesst man so von 84 F. auf geringere Höhen, so ist man sicher, diese Hinderniß etwas zu geringe anzugeben, denn einer Luftsäule von D bis C, ihre unterste Hälfte enthält dichtere Luft als die obere, und wiegt folglich mehr, als die obere, das ist, ihr Gewicht beträgt mehr, als die Hälfte des Gewichts der ganzen Luftsäule.

226. Ueber alle diese Hinderniſſe (224; 225;) hat niemand meines Wissens eigne Untersuchungen angestellt, als Herr Euler über das Reiben (218). Er betrachtet am angeführten Orte auch die Springbrunnen besonders, und giebt selbst eine ziemlich weitläuftige Tafel, aus der man die Höhe berechnen kann, welche der Geschwindigkeit zugehört, womit das Wasser empor zu sprützen anfängt. Diese Tafel gründet sich auf eine Bestimmung der Grösse der Friction aus gewissen Versuchen, welche Versuche Hr. E. nicht mitgetheilt hat, und die Bestimmung der Grösse der Friction daraus nur als eine Muthmassung angiebt, auch selbst erkennt, daß man dazu mehr Versuche anstellen müsste. Wenn also auch das, was Herr E. zum Grunde seiner Tafel legt, der Wahrheit so nahe wäre, als man verlangen kann, so wäre doch niemand befugt, solches anzunehmen, bis man die nicht angeführten Versuche kennt, und sieht, wie es daraus folgt. Auserdem wird aber das Wasser schon wegen des Widerstandes der Luft, wenn man auch noch andere Hinderniſſe beyseite setzt,

bey weitem nicht auf die Höhe steigen, die nach Hrn. E. Rechnung seiner Geschwindigkeit zugehörte. Man kann sich davon einen Begriff aus einem Versuche machen, den Hr. Euler (*) aus den Schriften der petersburgischen Akademie (**) anführt. Eine eiserne Kugel, die aus einem Geschütze senkrecht in die Höhe geschossen ward, fieng nach Hrn. Eulers dortigen Berechnung mit einer Geschwindigkeit zu steigen an, die einer Höhe von 15542 rheinl. Fuß gehörte, sie erreichte aber nur eine Höhe von 4443 Fuß. Wie dieses berechnet wird, kann man aus Höh. Mech. I. Abschn. 154. u. f. sehen. Weil nun Wasser fast achtmahl leichter ist, als Eisen (Hydrost. 49.), so ist bey ihm der Widerstand der Luft auch viel beträchtlicher als beym Eisen, wenn beyderley Materien mit gleicher Geschwindigkeit zu steigen anfangen.

227. Man wird also für jetzt die Höhen, auf welche Wasser springt, wohl am besten aus wirklichen Erfahrungen beurtheilen, dergleichen Mariotte anführt (***).

Damit man diese Versuche bequemer übersieht, habe ich sie in nachstehende Tafel gebracht, und füge M. Erinnerungen darüber bey. Bey den ersten bediente er sich Röhren 3 Zoll weit, oben mit einem Wasserkasten von 1 Fuß im

Durch-

(*) Mechan. L. I. §. 457.
(**) Comm. Petrop. T. II. p. 338.
(***) du mouv. des eaux IV. Part. 1. disc. p. m. 441.

Durchmesser, die Röhre war unten wieder aufwärts gebogen. Es versteht sich in der Tafel, daß einerley Wasserhöhe bleibt, bis eine andere angezeigt wird.

Beym V, VI, VII Versuche waren die Röhren sehr weit.

	Wasserhöhe	Oeffnung.	Höhe des Wasserstrahls.
I	24 F. 5 Zoll.	6 Linien	22 Fuß 10 Zoll.
II	— —	4	22 $8\frac{1}{2}$
III	— —	3	22 2
IV	$12\frac{1}{3}$ —	6	12
V	$5\frac{1}{2}$ —	3	ohngefähr
VI	— —	4	$5\frac{1}{2}$ Fuß – 26 Linien
VII	— —	6	etwa $5\frac{1}{2}$ F. – 25 Lin.
VIII	26 F. 1 Z.	6	24 Fuß 2 bis 3 Zoll
IX	— —	10	23 9
X	— —	3	22
XI	34 F. $11\frac{1}{2}$ Z.	6	31 Fuß 8 bis 9 Zoll
XII	— —	3	28
XIII	— —	4	30
XIV	— —	15	27

228. Enge Wasserstrahlen von kleinen Wasserhöhen verlieren durch den Widerstand der Luft nicht viel (V, ... VII. Vers.) wenn nur die Röhren weit genug sind. Diese Erinnerung des Mariotte wird sich dadurch erläutern lassen, daß der Widerstand der Luft bey einer geringern Wasserhöhe und Geschwindigkeit schwächer ist (Hdh. Mechan. 108).

229. Beym IX. Versuch war die Oeffnung zu weit für Röhren von 3 Zoll, und das Wasser gieng darinnen sehr geschwind mit starkem Reiben. Beym X. beruft sich M. wieder auf das, was ich (223) beygebracht habe. Beym XIII. war die Oeffnung für die Röhren zu weit, beym XII. XIV. wie beym X.

230. Mariotte nimmt die Regel an, daß sich der Unterschied zwischen der Wasserhöhe und dem Wasserstrahle, wie das Quadrat des Wasserstrahls verhält.

Wenn aus gleichen Oeffnungen zweene Wasserstrahlen auf die Höhen H, h, steigen, die Wasserhöhen aber A; a; sind, so ist nach M. Regel $H^2 : h^2 = A - H : a - h$.

231. Zum Beweise dieser Regel betrachtet M., wie sich die Bewegung eines Wassertheilchens vermindern müsste, wenn es auf seinem Wege immer Luft vor sich wegstossen muß. Seine Schlüsse sind aber nichts weniger als überzeugend, und wer nur etwas von der Theorie des Widerstandes weiß, der sieht leicht, daß eine solche Regel wie 230 zu finden, Kenntnisse erfodert, von denen man zu M. Zeiten noch sehr wenig wusste. Es käme also nur darauf an, ob diese Regel erträglich mit Erfahrungen zusammentrifft.

232. Aus viel Erfahrungen hat M. gelernt, daß eine Wasserhöhe von 5 Fuß einen Wasserstrahl giebt, dem nur ein Zoll an 5 F. fehlt.

Er

Er nimmt, welches ohne beträchtlichen Irrthum geschieht, dieser Erfahrung gleichgültig an: Ein Wasserstrahl, der 5 Fuß hoch steigen soll, erfodere 5 Fuß 1 Zoll Wasserhöhe, woraus nach seiner Regel folgt, daß zu Wasserstrahlen von 10, 15, 20 Fuß, Wasserhöhen von 10 F. 4 Z. 15 F. 9 Z. 20 F. 16 Z. erfodert werden.

233. Wenn man also in 230; $H = 5'$, $A = 5'\,1''$ setzt, so kann man nach der dortigen Formel Mariottens Regel mit den Erfahrungen in 227 vergleichen. So nehme man aus der I.

$$h = 22'\tfrac{5}{6} = \frac{137'}{6};$$ Weil nun $A - H = 1''$ so wird $a - h$ durch die Logarithmen so gefunden

log 137	= 2,1367206
log 6	= 0,7781513
$\log \frac{137}{6}$	= 1,3585693
log 5	= 0,6989700
	0,6595993
verdoppelt	1,3191986

gehört zu $20'',85 = a - h$

Nun ist $h = 22'\ 10''$

	1	8, 85
$a = 24$		6, 85
in der Erfahrung	24	5, 5
die Rechnung giebt zu viel		1, 35

Dieser Unterschied der Rechnung von der Regel hat nichts zu bedeuten, und so kann man noch

anderer

anderer Erfahrungen Uebereinstimmung untersuchen. Mariotte berichtet, bey einer Wasserhöhe von 50 Fuß, habe eben die Regel statt gefunden, aus Oeffnungen von 6 oder 7 Linien sey der Strahl am höchsten gesprungen. Mariotte macht a. a. O. noch unterschiedene praktische Erinnerungen über das Springen des Wassers, die mir der Raum hier beyzubringen nicht verstattet.

234. I. Vermöge der Regel 230; findet man aus a der gegebenen Wasserhöhe h, die Höhe des Strahls, wenn A; H, aus der Erfahrung gegeben sind. Es sey $A - H = D$ so ist $h^2 . D = H^2 a - H^2 . h$ und die Auflösung dieser quadratischen Gleichung (Algebra 78) giebt $h = \frac{\sqrt{(H^2 + 4aD)} - H}{2D}$; man braucht bey der Wurzelgröße das Zeichen + weil sonst h einen verneinten Werth bekäme.

II. Nimmt man $A = 61''$ $H = 60''$ (233) $D = 1''$; so ist $h = \frac{60.(\sqrt{(3600 + 4a)} - 60)}{2}$ $= 30.(2\sqrt{(900 + a)} - 60)$ wo man einen Zoll zur Einheit nehmen muß.

So gäben 30 F. = 360 Z. Wasserhöhe, zur Höhe des Strahls $30.(2\sqrt{1260} - 60)$. Es ist aber $\sqrt{1260} = 35,496$ also wird diese Höhe des Strahls 329,76 Zoll = 25 F. 5 Z.

235.

235. I. Bey den Erfahrungen, auf welche sich die bisher vorgetragene Lehren gründen, ist die Oeffnung, wo das Wasser herausdringt, entweder unmittelbar an dem Wasserbehältnisse gewesen, wie 13; 15; Fig. oder nahe dabey wie 14. Fig. und diese Versuche berechtigen uns also zu keinen Schlüssen, wenn das Wasser von D bis G 14. F. einen weiten Weg zu machen hätte, oder gar von D tief nach O hinunter, und von dar hoch wieder nach G hinauf steigen müsste. Man begreift leicht, daß in einem solchen Falle aus dem Versuche nicht folgen würde, daß das Wasser bey G mit einer Geschwindigkeit herausspränge, die der Höhe DC zugehört. Denn wenn die Erfahrung lehrt, daß es mit dieser Geschwindigkeit aus einer Oeffnung dringt, die man in der Röhre AD, bey D machte, so ist auch offenbahr, daß die bewegende Kraft, die dem Wasser bey D diese Geschwindigkeit geben konnte, noch etwas mehr zu thun bekömmt, wenn sie die Masse Wasser DOG noch in Bewegung setzen muß, und daß man also bey dem Wasser in G nicht die Geschwindigkeit zu erwarten hat, die das bey D haben würde. Erfahrungen mit etwas langen Röhren bestätigen schon diese Erinnerung (140). Man kann also das bisherige nur annehmen, wenn die Masse DOG sehr gering ist.

II. Dissertazione idrodinamica sopra il quesito: cercar la cagione per la quale l'acqua salendo ne' getti quasi verticali de' vasi, se le luci

di

di queſti getti ſiano aſſai tenui, eſſa non giunga mai al livello dell' acqua del conſervatorio, e quanto la luce è più piccola, tanto l' altezza dell' acqua ſi faccia ſempre minore; come pure indagare la vera cagione per la quale l' altezza dell' acqua nel conſervatorio, o il foro, per cui eſce, eſſendo ognor maggiore, ſi diminuiſca ognor più l' altezza de' ſuoi getti: preſentata al concorſo dell' anno 1774, dal P. Don Greg. Fontana, delle Scuole Pie, Regio Prof. di Matem. nell' Univerſitâ de Pavia . . Mantova 1775. groß Qu. 136 S. 1 Kupfert.

III. Die Schrift hat den Preis erhalten, welche von der kön. Akad. zu Mantua auf die Frage geſetzt war, die der Titel anzeigt. Don Fontana bemerkt acht Hinderniſſe, warum das Waſſer nicht auf die Höhe ſeines Behältniſſes ſpringt. 1) Der Waſſerſtrahl muß eine kleine Neigung haben; ſtiege er genau lothrecht, ſo fiele das zurückfallende Waſſer auf das ſteigende und hinderte ſolches. 2) Die Waſſertheilchen haben Zuſammenhang unter ſich, und mit den Wänden der Röhre. 3) Das 224; III. angeführte. 4) Die Luft druckt die ſpringenden Theilchen ſeitwärts. 5) Auf die Oeffnung, wo das Waſſer herausſpringt, druckt eine längere Luftſäule als auf das Behältniß. 6) Die Luft widerſteht dem ſteigenden Waſſer. 7) Reiben der Waſſertheilchen an den Wänden des Behältniſſes, und der Röhre, die es zur Oeffnung leitet. 8) Reiben gegen den Rand der

Oeff:

Oeffnung. Was bis dahin über diesen Gegenstand gethan war, kennt Don F. vollständig, auch deutsche Schriften, wie meine Hydrodynamik, und niederländische. Er prüft die acht Hindernisse mit analytischen Rechnungen. Den ersten fünfen gesteht er keine beträchtliche Wirkung zu, der sechsten die grösste. Dann beantwortet er umständlich die Fragen, die der Titel ferner anzeigt. Was eigentlich zu springenden Wassern gehört, nimmt 88 Octavs. ein. Das Uebrige ein Anhang, über den Widerstand, den geworfene Körper in der Luft leiden.

IV. Theorie und Erfahrungen von Springwerken giebt Langsdorf, Lehrb. X. Cap.

Vom Laufe der Flüsse.

236. **Erkl.** Wenn man eine Ebene auf eines Flusses Boden senkrecht dergestalt setzt, daß sie zugleich mit beyden Ufern rechte Winkel macht, so heisst die Figur, die in dieser Ebene von dem Boden, den Ufern, und dem Wasser des Flusses begränzt wird, des Flusses **natürlicher Querschnitt** (sectio naturalis).

Es erhellt, daß Gulielmini, der diese Erklärung so vorträgt (*) annimmt, die Ufer sind parallel, sonst würde was unmögliches gefodert. Eigentlich sollte wohl die Ebene so gesetzt werden, daß sie mit der Richtung, nach welcher das Wasser fliesst, rechte Winkel macht, man kann

(*) Mensura aqu. fluentium L. I. def. 2.

kann bey jedem Flusse eine solche Richtung annehmen, nach der das Wasser an einer gegebenen Stelle vornehmlich fliesst, obgleich einzelne Wassertheilchen andere Richtungen nehmen. Wer sich vorstellt, wie leichte Körperchen einen Fluß hinabschwimmen, wird verstehen, was ich hiemit sagen will. Daß nun der Fluß die Stellen des Ufers, die in der angezeigten Ebene einander gegenüber liegen, ohngefähr parallel macht, lehrt auch die Erfahrung. Also lässt sich diese Erklärung rechtfertigen. Indessen würde jeder solcher Querschnitt immer eine sehr unordentliche Gestalt bekommen, und die Gestalt des einen würde sich mit des andern Gestalt nicht wohl vergleichen lassen. Damit sich also eine Untersuchung anstellen lässt, die doch in vielen Fällen brauchbar ist, nimmt man mit Guliel. an, der Boden des Flusses sey eine Ebene, und beyde Ufer senkrechte Ebenen auf dem Boden, alsdenn giebt sich folgendes:

237. **Erkl.** Eine Ebene, die man senkrecht auf des Flusses Richtung setzt, wird Boden, Ufer und Oberfläche des Flusses in vier geraden Linien schneiden, die mit einander rechte Winkel machen. Dieses Rechteck heisst des Flusses **künstlicher Querschnitt** (sectio artificialis). Es giebt allerdings durch die Kunst zubereitete Wasserbetten z. E. Mühlgräben, wo derselbe wirklich vorkömmt. Er wird im folgenden allemahl verstanden, wenn man den natürlichen nicht besonders nennt.

238. Erkl. EN 20 F. sey eine gerade Linie, in des Flusses Oberfläche seiner Richtung nach gezogen, BM eine ihr parallele, im Boden, so daß die Ebene durch EN, BM, auf des Flusses Boden senkrecht stünde, und seine Richtung sich in ihr befände. Ich nehme zugleich diese Ebene als vertical an. Ein Perpendikel, auf BM durch B in dieser Ebene aufgerichtet, treffe des Flusses Oberfläche in E, Eine Ebene durch BE senkrecht auf die Ebene ENBM gesetzt, giebt den Querschnitt (237), des Rechtecks eine Seite ist = BE; die heisst des Schnittes Höhe; Die andere senkrecht darauf, von einem Ufer zum andern, ist seine Breite.

239. Erkl. Des Flusses Zustand bleibt zwischen ein paar Stellen ungeändert, wenn seine Oberfläche zwischen diesen Stellen sich nicht ändert, weder zu einer Zeit dem Boden näher kömmt, als sie zu einer andern war, noch sich weiter über den Boden erhebt, daß also der Fluß weder abnimmt noch anschwillt.

240. Lehrs. Wenn des Flusses Zustand zwischen F und B ungeändert bleibt, so fliesst durch den Schnitt bey F soviel Wasser, als durch den bey B.

Bew. Flösse durch den ersten mehr, so führte er mehr Wasser zu, als der andere abführt, und der Fluß müsste zwischen F und B aufschwellen, gegentheils abnehmen, wenn durch den ersten Schnitt nicht soviel zuflösse, als durch den andern abfliesst.

241. Daß in einem gegebenen Querschnitte, alles Wasser in der Oberfläche des Flusses einerley Geschwindigkeit hat, wird wohl keinen Beweiß brauchen, und eben so wenig, daß alles Wasser gleich geschwinde geht, das sich in einer Linie befindet, die man in dem Schnitte parallel mit dem Boden zieht. Aber deswegen darf man nicht annehmen, das Wasser werde im ganzen Querschnitte gleiche Geschwindigkeit haben, am Boden so schnell flieſſen als in der Oberfläche; Worauf es bey diesen Geschwindigkeiten ankommt, könnte man sich etwa so vorstellen.

242. Das Wasser möchte vor A, etwa in einem Wasserbehälter stehen, dessen horizontaler Boden AK wäre, und von A möchte das Flußbette ABM, wie (238) angiebt, hinuntergehen, welches rückwärts nach AL verlängert die Oberfläche des Wassers in L schnitte. Diese Oberfläche reichte also bis an die Horizontallinie LI, nicht als ob das Wasser wirklich über KA bis lothrecht über A so hoch stünde, man begreift leicht, daß dieses nicht seyn kann, wenn bey A keine Wand ist, die das Wasser hält, sondern das nehme ich an, daß durch einen beständigen Zufluß, das Wasser irgendwo über dem Boden, von welchem AK ein Theil ist, auf einer Höhe erhalten wird, die der Höhe von LI über KA gleicht, KL, ein Perpendikel auf AK, kann diese Höhe vorstellen. Da aber bey A keine feste Wand ist, und das Wasser von A nach B zu einen Ablauf findet, so wird es sich wohl gleich

bey

bey L zu senken anfangen, (s. unten 303; IX.) und so, in den Fluß oder Canal hinab, durch einen Querschnitt laufen, dessen Höhe AY (in der Bedeutung 238) wäre. Und diese AY möchte verlängert, der auch verlängerten Horizontallinie, welche des Wassers Oberfläche begränzt, in I begegnen. Man könnte ihn des Canals ersten Querschnitt nennen. Man verlängere die Horizontale KA nach C, D, wo sich versteht, daß LI, AI, KACD, alles in der nur genannten verticalen Ebene ist, der Boden des Flusses wird als eine Ebene durch AB angenommen, auf der die erwähnte verticale Ebene senkrecht steht. Weil nun auf diese verticale Ebene auch die Horizontalfläche durch KD senkrecht steht, so steht der Durchschnitt der Ebene des Bodens und der Horizontalfläche auch auf dieser Verticalfläche senkrecht (Geom. 47. S.) daher machen BA; CA; im Boden und im Horizonte mit erwähntem Durchschnitte rechte Winkel, und BAC ist des Bodens Neigung gegen den Horizont. Dieser Winkel heisse β.

243. LIA = IAC = 90 Gr. — BAC. Man ziehe durch B, E, in der Ebene BAD Verticallinien, die der horizontalen KA in C, D; begegnen; so ist BC = AB. sin β die Tiefe des Puncts B unter A, oder das Gefälle von A bis B (Stat. 116). Eben so, wenn durch einen willkührlichen Punct Q; der Linie BE; die horizontale QH gezogen wird, so giebt CH an, wieviel Q tiefer ist als A; und das findet man so: HQB = 90

Gr — HBQ = HBA = 90 Gr — β also BH = BQ. cos β und CH = AB. sin β — BQ. cos β.

244. Nun kann man sich den ersten Querschnitt (242) wie eine Oeffnung vorstellen, durch welche das Wasser aus dem Wasserbehälter wie aus einem Gefässe in den geneigten Canal hinabfliesst. Zu jeder Stelle dieser Oeffnung z. E. bey P; fliesst also das Wasser mit einer Geschwindigkeit hinaus, die seiner Höhe über dieser Stelle zugehört, oder deren Höhe nach (168) herauskömmt, wenn man die Wasserhöhe mit einem Bruche = m multiplicirt.

245. Die Höhe der Linie LI (242) über P; oder ein Perpendikel von P auf LI wäre IP. cos β (243) also fliesst das Wasser bey P mit einer Geschwindigkeit hinab, die der Höhe m. IP. cos β gehört;

Für A darf man nur A statt P setzen.

246. Wenn also das Wasser, das im ersten Querschnitte in A war, an den Ort B kömmt, so hat es, blos durch den Fall, eine Geschwindigkeit bekommen, die der Höhe CB zugehört (Höh. Mech. II. Abschn. 20), dabey behält es auch die Geschwindigkeit, die es in A hatte (245), also gehört in B (244) seine Geschwindigkeit der Höhe m. IA. cos β + AB. sin β.

Ich nenne u = IA. cos β + AB. sin β = h + w. sin β, wenn in (242) KL = h; und AB = w

= w so gehört die Geschwindigkeit in B der Höhe u + (m — 1). h.

247. Man setze, das Wasser, das im ersten Querschnitte in P war, befinde sich in demjenigen der B enthält in Q; die Tiefe, um die es gefallen ist, zu finden, addirt man AP. cosβ als die Höhe des Punctes P über AC; zu der (243) gefundenen CH; Dieses beydes zusammen giebt die Höhe des Falles von P bis Q, der die Geschwindigkeit des Wassers in Q zugehören würde, wenn es in P noch keine hätte. Es hat aber in P schon eine Geschwindigkeit, die der (245) gefundenen Höhe zugehörte. Die Höhe (245) und die jetzt gefundene Höhe des Falles zusammen geben also für die Höhe, der die Geschwindigkeit des Wassers in Q zugehört; (AP + m. PI) cosβ + AB. sinβ — BQ. cosβ.

Weil PI = AI — AP; gehört diese Geschwindigkeit nach (246) der Höhe u — ((1 — m) PI + BQ). cosβ.

248. Gehört die Geschwindigkeit in P, der Wasserhöhe selbst, so ist m = 1; und die Geschwindigkeit in Q gehört der Höhe u — BZ. cosβ; ist also allemahl geringer als die Geschwindigkeit in B (246). In diesem Falle sey BQ = x, so verhält sich die Wassermenge, die in einer gegebenen Zeit durch das Differential dx der Linie BQ fliesst, wie $(u - x. \cos\beta)^{\frac{1}{2}}$. dx oder

wie $-\sqrt{}\,\mathrm{col}\beta.\,(\frac{u}{\mathrm{col}\beta}-x)^{\frac{1}{2}}.-dx.$ Dieses mit Anal. Un. 245 verglichen ist

	X	c	a	p
dorten				
hier	$-x$	$-\sqrt{}\,\mathrm{col}\beta$	$\frac{u}{\mathrm{col}\beta}$	$\frac{1}{2}$

Daher das Integral

Const $-\frac{2}{3}\sqrt{}\,\mathrm{col}\beta.\,(\frac{u}{\mathrm{col}\beta}-x)^{\frac{3}{2}}$ und Const so bestimmt, daß das Integral für $x=o$ verschwindet, kömmt das verbesserte Integral

$$\frac{2}{3}.\frac{(u^{\frac{3}{2}}-(u-x.\mathrm{col}\beta)^{\frac{3}{2}})}{\mathrm{col}\beta}$$

Für die ganze BE setzt man nur $BE=c$ statt x; Es ist aber $u-c.\,\mathrm{col}\beta$ die Höhe, welche der Geschwindigkeit in E gehört (248) heisst also diese Höhe $=v$ so ist das völlige Integral

$$\frac{2}{3}.\frac{(u^{\frac{3}{2}}-v^{\frac{3}{2}})}{\mathrm{col}\beta}$$

249. Die wirkliche Wassermenge in einer Secunde käme, wenn man dieses Integral mit $2\sqrt{}g$ multiplicirt, weil damit (wie in 166.) die Quadratwurzel der Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört hätte, sollen multiplicirt werden.

Die Wassermenge durch den ganzen Querschnitt kömmt heraus, wenn man seine Breite mit dem nur gefundenen Producte multiplicirt.

250. Man sieht leicht, wie ähnlich diese Formel der (187) gefundenen ist.

Ich sehe nicht, wie sich hier nach (168) rechnen liesse, weil alsdenn die veränderliche Grösse AP aus der Formel (247) nicht weggeht, und ein allgemeiner Ausdruck für AP durch BQ nicht zu geben ist.

251. Die mittlere Geschwindigkeit, (wie 188) gehöre der Höhe f; so ist $c\sqrt{f}$ dem völligen Integrale (248) gleich, also

$$f = \frac{4}{9}. \frac{(u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}})^2}{c^2 . \cos\beta^2}$$

252. Heissen also eines Querschnittes Höhe und Breite, c und b; so fliesst durch ihn in der Zeit t; die Wassermenge $q = 2\sqrt{(fg)}. b. c. t.$

Wenn die grossen Buchstaben ähnliche Dinge für einen andern Querschnitt eben des Flusses bedeuten, also $Q = 2.\sqrt{(F.g)}. B. C. T$ so sieht man leicht, wie sich eine Menge Sätze hieraus herleiten lassen.

253. Wenn nach (239) $Q = q$; so ist $b.c.t.\sqrt{f} = B.C.T.\sqrt{F}$ das findet also z. E. für $f = F$ für gleiche Geschwindigkeiten, statt, wenn $b.c.t = B.C.T$ oder wenn sich die Querschnitte verkehrt wie die Zeiten verhalten. Sind also die Zeiten gleich oder $T = t$; so sind die Querschnitte gleich, oder ihre Höhen verhalten sich verkehrt, wie ihre Breiten.

Es wäre unnütz, dergleichen Sätze mehr zu erzählen, die man durch die Buchstabenrechnung jeden Augenblick finden kann, wenn man sie braucht. Guido Grandi (*) hat sich die Mühe genommen zu zeigen, daß $Q = q$ auf 22 unterschiedene Arten zu erhalten ist.

Wie sich die Verhältniß der Geschwindigkeiten immer mehr und mehr der Gleichheit nähert.

254. Wenn ein Fluß immer gleich breit, und sein Zustand ungeändert (239) bleibt, so muß durch die Höhe eines Querschnitts so viel Wasser fliessen, als durch die Höhe des andern, weil die Breite einerley ist, folglich ist in (248) $u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}$ oder $u^{\frac{3}{2}} . (1 - (\frac{v}{u})^{\frac{3}{2}})$ eine unveränderliche Grösse. Je weiter aber der Querschnitt von A abstehet, desto grösser ist u; (246) grösser in B als in F. In diesem Producte, dessen Grösse unveränderlich bleibt, wächst also der erste Factor, je weiter der Fluß geht, daher muß der andere abnehmen, folglich $\frac{v}{u}$, das nie grösser als 1 werden kann (248) der 1 immer näher und näher kommen.

Je weiter also der Fluß mit einerley Neigung des Wasserbettes fortgeht, desto näher kömmt

(*) del movim. dell' acque L. I. Prop. 8.

kömmt die Geschwindigkeit in der Oberfläche der Geschwindigkeit im Boden, wenn der Fluß immer gleiche Breite behält.

255. Weil $\frac{v}{u} = 1 - \frac{c.\,col\beta}{u}$ (248) so kömmt $\frac{v}{u}$ der 1 desto näher, je kleiner $\frac{c}{u}$ ist.

Wenn der Fluß in B eben die Breite wie in A hat, so hat alsdenn c:u eine gewisse Verhältniß; Wäre aber der Fluß in B breiter, als er zuvor war, und liesse doch, weil sich sein Zustand nicht ändert, durch den Querschnitt in B soviel Wasser, als durch jeden vorhergehenden, so müsste dieses breitern Querschnittes Höhe $= e$ kleiner als c seyn; folglich wäre $\frac{e}{u} < \frac{c}{u}$ also $1 - \frac{e.\,col\beta}{u}$ der 1 noch näher, als $1 - \frac{c.\,col\beta}{u}$.

256. Auch wird $\frac{c.\,col\beta}{u}$ desto kleiner, je grösser β ist, und verschwindet gar für $\beta =$ 90 Gr.

257. Da nun die Breite eines Flusses gewöhnlicher zunimmt als abnimmt, so wird in den Querschnitten, die weit von seinem Anfange liegen, die obere Geschwindigkeit des Wassers

der untern bald so nahe kommen, daß man beyde für gleich annehmen kann (255). Eben das ereignet sich bey Flüssen, deren Boden sehr geneigt ist (256).

Wie man rechnet, wenn sich die Geschwindigkeit allein nach der Wasserhöhe richtete.

258. Gesetzt, man nähme an, die Geschwindigkeit in Q werde nicht betrachtet, als ob sie zum Theil durch den Fall von P bis Q erhalten wäre, sondern lediglich, wie sie dadurch bestimmt wird, daß über Q das Wasser bis an die Horizontale LI stünde, als wenn BQE die Oeffnnng eines Gefässes wäre, in dem das Wasser beständig bis an LI erhalten würde. In diesem Falle gehörte die Geschwindigkeit in Q der Höhe m. (AI. $\cos\beta + CH$) das ist der Höhe m. ((C — x). $\cos\beta + w. \sin\beta$) und die in B der Höhe m. ($C.\cos\beta + w. \sin\beta$) = m. u, also gehört die Geschwindigkeit in Q der Höhe m. (u — x. $\cos\beta$).

259. Es erhellt, daß die Formel für die Wassermenge durch dx, die man hieraus herleitete, von der in 248 nur durch den unveränderlichen Factor $\sqrt{}$ m unterschieden ist, und mit dx multiplicirt, zum verbesserten Integrale das, welches 248 gefunden ward, nur mit $\sqrt{}$ m multiplicirt

plicirt geben muß. Folglich ist auch hier das völ-
lige Integral $\frac{2}{3}$. $\left(\frac{u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}}{\text{col}\beta}\right)$. $\sqrt{}$ m.

260. Für m = 1 ist es also einerley, ob man die Geschwindigkeiten in BE zum Theil dem Falle zuschreiben, oder sie allein durch die Wasserhöhe bestimmen will. Hermann thut das letztere (*), mich deucht aber, die erste Vorstellung ist der Natur gemässer, und man trifft bey der letzten die Wahrheit nur von ohngefähr, in gegenwärtigem Falle m = 1 nähmlich, wo beyde gleichgültig sind.

261. Die mittlere Geschwindigkeit (wie in 252) gehört hier der Höhe $\frac{4}{9}$. m. $\left(\frac{u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}}{c.\,\text{col}\beta}\right)^2$
= mf

Die Wassermenge unter der Voraussetzung 259 zu finden, darf man nur die, welche nach 252 gefunden würde, mit $\sqrt{}$ m multipliciren.

262. Aufg. Wenn c, β, und die Verhältniß v : u = p : 1 gegeben sind, u zu finden. (S. unten 281).

Aufl. v = u − c. colβ (248) also $\frac{c\,\text{col}\beta}{1-p}$
= u

(*) Phoron. §. 411.

Ex. $\beta = 2°$; c = 10 Fuß die Geschwindigkeiten in E und B verhalten sich wie 1 : 4 also

$\frac{v}{u} = \frac{1}{16}$ so ist $u \frac{16}{15}$. 10. col 2°.

giebt log u = 1,0277641 und u =, 10', 66.

263. Zus. Das völlige Integral (248) hiesse sich für 262 so ausdrücken

$\frac{2}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{col\beta} \cdot (1 - p^{\frac{3}{2}})$ oder statt u seinen Werth

aus (265) gesetzt $\frac{2}{3} \cdot c^{\frac{3}{2}} \cdot col\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1 - p^{\frac{3}{2}})}{(1-p)^{\frac{3}{2}}}$.

daraus findet sich nach 249 die Wassermenge durch c in eine Secunde und ferner die durch den Querschnitt.

Und nach 261 die Wassermenge der dortigen Voraussetzung gemäß.

Fortsetzung des Exempels bey (262). Die Fusse sollen bononische seyn, so hat man g in bononischen Zollen (163).

Der Logarithme davon, um den Logarithmen von 12 vermindert, giebt in bononischen Fussen log g = 1,1113115.

Weil ferner $p = \frac{1}{16}$; so ist $1 - p^{\frac{3}{2}} = \frac{63}{64}$

und das völlige Integral in (266) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{63}{64} \cdot u^{\frac{3}{2}} =$

$= \frac{21}{32} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\text{col}\beta}$ davon ist der Logar. 1,3589801

zu dem log $2\sqrt{g} = 0{,}8566875$

log der Wassermenge (249) = 2,2156676

aus (168) $\frac{1}{2}$ log m = −0,2995296

log der Wassermenge (261) = 1,9161380

Dieser Logarithme gehört zu 82′,440; so viel Wasser flösse also in einer Secunde durch BE; Gesetzt der Canal wäre daselbst 50 Fuß breit, so flössen da durch seinen Querschnitt 50. 82,440 = 4122 Cubikfuß in einer Secunde, und 60. mahl so viel oder 247320 in einer Minute.

Gulielmini giebt dieses Exempel (*) und bringt für die Minute nur einen Fuß mehr heraus. Meine Zahl habe ich vordem, als ich den G. studirte, völlig so, durch eine von gegenwärtiger unterschiedene Reihe von Rechnungen gefunden. G. Rechnung ist sehr weitläuftig und mit verdrüßlichen Brüchen verwickelt. Er bedient sich dabey der Parabel (194) und seiner Tafel (162). Daß man die Logarithmen hiebey brauchen, und die Tafel entbehren kann, hat schon Hermann erinnert (**).

Von horizontalen Canälen.

264. Wenn des Wasserbehälters 20 Fig. horizontaler Boden KA; verlängert selbst das Bette

(*) Menf. aqu. fl. post lib. VI. append. exemplum I.

(**) Phoronomia, §. 405.

Bette des Canals AB giebt, so ist BAC = o, und es erhellt aus der Hydrostatik, daß sich das Wasser in diesem horizontalen Canale so hoch setzen wird, als man es in dem Wasserbehälter erhält. Ich nehme an, daß in den letzten beständig so viel Wasser zufliesst, daß es da bis an LI reicht, so wird es immer in den Canal so abfliessen, daß darinnen G, E; in der Horizontallinie LI sind. Eben so wird das Wasser aus P nach Q so kommen, daß BQ = AP.

265. Unter diesen Umständen ist also in (242) AY = AI, und in (247) $\beta = o$; und die Geschwindigkeit in Q gehört der Höhe m. IP = m. (c — x); also für x = c; die Geschwindigkeit in E einer Höhe = o.

266. I. Dieser Satz scheint unerwartet, daß das Wasser in der Oberfläche keine Geschwindigkeit hat, und doch von I nach E in einer wagrechten Linie IE geht. Er ist aber doch eine nothwendige Folge daraus, daß des Wassers Geschwindigkeit sich nach der Wasserhöhe richtet; Wasser also, über dem kein anders steht, kann vermöge dieses Satzes keine Geschwindigkeit erhalten, befindet es sich aber an einer Stelle, von der es tiefer herabfliessen kann, so bekömmt es eine Geschwindigkeit durch den Fall; so stelle ich mir in 247; die Geschwindigkeit vor, die in E das Wasser hat, das aus I dahin gekommen war. Gegenwärtig nun kann auf die letztere Art keine Geschwindigkeit entstehen,

weil

weil IE horizontal, und so erhellt, daß die Geschwindigkeit in E = o seyn müsse.

Kann aber Wasser von I nach E kommen, ohne Geschwindigkeit zu haben? Ich dächte, man könnte dieses auf die Art sagen, wie man von jemanden sagt, er sitze in einem Wagen still und werde vom Wagen fortgeführt. Das Wasser in IE hatte keine ihm eigene Geschwindigkeit, es wird nur von dem unter ihm fortgetragen.

Man muß zugleich bedenken, daß die Oberfläche sich deßwegen nach IE und immer weiter hin erstreckt, weil immer Wasser in den Behälter zufliesst, LI beständig in einer Horizontalfläche zu erhalten.

II. Karsten Lehrb. d. Mathemat. Fünfter Theil, die Hydraulik. Greifsw. 1770; im V. Abschn. 81 §. 104 S. will meine Vergleichung nicht gelten lassen: Wer im Wagen sitzt, habe keine relative Geschwindigkeit gegen den Wagen, aber eine absolute Geschwindigkeit, und die finde sich auch bey dem Wasser auf der Oberfläche. Er meynt also, dieses Wasser gehe wegen seines Zusammenhangs mit dem untern fort, sieht aber selbst die Voraussetzungen, die er macht, nur als Näherungen an, wenn sie völlig richtig wären, würde das Wasser auf der Oberfläche gar nicht fliessen.

Ich darf hie wohl fragen, wie es Wasser geht, das gar nicht fliesst, wenn das unter ihm, wegfliesst? Ich dächte, da müsste es hinabsinken.

Die

Die Einwendung veranlasste mich zu einer Untersuchung, die ich jezo der Beurtheilung meiner Leser überlasse.

Eigentlich erläutert diese Untersuchung nur, was ich am Ende des I. Abs. vom beständigen Zuflusse des Wassers angedeutet habe.

III. Zu Hydrodyn. 236 u. f. §.
Vom Laufe der Flüsse.

1. Man stelle sich LKAI als den Durchschnitt eines Kastens vor, in dem Wasser beständig bis an den Horizont AI erhalten wird.

2. Es sey KL = h (Hydr. 247), folglich AI = h. sec β (das.)

3. Die Oeffnung des Kastens AY sey = k und ist das c für des Canals ersten Querschnitt (H. 242; 248)

4. Es sey AP = z; also IP = h. sec β - z

5. Die Wasserhöhe ist folglich
über P; = h - z. col β (H. 245)
über Y; = h - k. col β (hie 2)

6. Die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in Q gehört, ist (H. 247)

= h + w. sin β - (1 - m). (h. sec β - z). col β - x. col β
= h + w. sin β - (1 - m) h + (1 - m). z. col β - x. col β
= mh + w. sin β + (1 - m). z. col β - x. col β

7. Es liesse sich vielleicht zwischen x und z eine Vergleichung angeben, wenn man annähme, es soll gleichviel Wasser in gleicher Zeit durch AP

und

und BQ fliessen. Damit lasse ich mich aber jezo nicht ein.

8. Ohne eine solche Vergleichung kann man die Wassermenge $2 \sqrt{g} \cdot \sqrt{(mh + w \cdot \sin\beta + (1-m) z \cdot \cos\beta - x \cdot \cos\beta)} \cdot dx$, die durch dx in einer Secunde fliesst, nicht integriren, weil in ihr w unveränderlich, aber z und x veränderlich sind.

9. Daher ist in §. 248; $1-m=0$ gesetzt.

10. Die Wasserhöhe über Q ist

$HC + AI \cdot \cos\beta = CB - BH + AI \cdot \cos\beta$
$= w \cdot \sin\beta - x \cdot \cos\beta + h$ (hie 2)
$= h + w \cdot \sin\beta - x \cdot \cos\beta$; womit §. 258 übereinstimmt, da ist $C = AI$.

11. Richtet sich also die Geschwindigkeit allein nach der Wasserhöhe, wie §. 258, so gehört die Geschwindigkeit der Höhe

$$m \cdot (h + w \cdot \sin\beta - x \cdot \cos\beta)$$

12. Begreiflich ist dieser Ausdruck für $m = 1$ mit (6) einerley.

Für E

13. Ist $z = k$. (4; 3) $x = c$;

14. Die Geschwindigkeit in E gehört also

für (6) der Höhe $mh + w \cdot \sin\beta + (1-m) \cdot k \cdot \cos\beta - c \cdot \cos\beta$

für (11) der Höhe $m \cdot (h + w \cdot \sin\beta - c \cdot \cos\beta)$

Für einen horizontalen Canal

15. Ist $\beta = 0$; Also gehört die Geschwindigkeit in Q, folgenden Höhen

in (6) $mh + (1-m).z - x$
in (11) $m.(h-x)$

16. Also die in E (14) den Höhen
in (6) $mh + (1-m).k - c$
in (11) $m.(h-c)$

17. Sie ist also in (11) nicht $=0$ auser wenn man $h=c$ setzt. Dazu ist keine Nothwendigkeit, vielmehr kann man sich den Canal so vorstellen, daß aus dem Kasten (1) das Wasser so austritt, daß es AB als horizontale Fortsetzung des Bodens KA auf eine Höhe c geringer als h bedeckt.

18. So ist die Schwürigkeit gehoben, die ich mir H. 266. machte.

19. H. Karsten, Hydraulik V. Abschn. 81 §. hat nicht bemerkt, daß sie sich auf diese Art heben lässt, und statt meiner Erklärung eine geben wollen, die hie wenigstens nicht gilt, wo man an Zusammenhang der Wassertheilchen nicht denkt.

267. Man kann also hier das (259) gefundene Integral so anbringen, daß $u=c$; $v=0$; $\cos\beta=1$ und das Integral $\frac{2}{3}c.\sqrt{(m.c)}$ womit ferner nach (249) verfahren wird. Dieses stimmt mit (193. I.) überein.

268. Exempel. (*) Bey ihrem Ausflusse ins schwarze Meer ist die Donau etwa 15 bononische Fuß tief (ein Mittel zwischen der grössten und

(*) Gul. am (262) angef. O. Ex. II.

und kleinsten Tiefe genommen;) und wo sie am breitesten ist, 5000 Fuß breit. Man kann, wegen ihres langen Laufs bis zum Ausfluße, annehmen, daß daselbst ihr Bette fast horizontal sey. Hier wäre also $c = 15$; $\frac{2}{3}$. c. $\sqrt{c} = 10\sqrt{15}$; also

$1 + \frac{1}{2}\log 15 = 1,5880456$

$\log 2\sqrt{g} = 0,8566875$

$\log b\,\mathfrak{W}\,m\,(249)\quad 2,4447331$ geh. zu 278,44

$\frac{1}{2}\log m = -0,2995296$

$\log b\,\mathfrak{W}\,m\,(261)\quad 2,1452035$

$\log 60 = 1,7781512$

$3,9233547$

Der letzte Logarithme giebt die Wassermenge durch 15 Fuß in einer Minute. Er gehört zu einer Zahl zwischen 8382, 1 und 8382, 2. Weil eine genaue Berechnung hier lächerlich wäre, nehme man das Mittel 8382, 15 dieses mit 5000 multiplicirt, giebt die Menge von Cubikfussen, die in einer Minute von der Donau ins Meer geschickt werden, 41910750 Cubikfuß. Wer Lust hat, kann berechnen, wieviel daselbst in einem Jahre ausfliesst.

Die Wassermenge 8382, 15 mit der Höhe 15 dividirt, giebt die mittlere Geschwindigkeit 558, 81 Fuß in einer Minute.

Gul. bringt 41912500 heraus, weil er die mittlere Geschwindigkeit ein wenig grösser annimmt, als meine Rechnung, und berechnet daraus in einer Stunde 2514750000; einem

Tage 60354 Millionen, in 366 Tagen 22 Billionen; 89564 Millionen Cubikfuß.

Eine Schrift vom Joh. Boterus (*), aus der G. die Abmessung nimmt, führt eine ganz andere Rechnung. Boter setzt die Geschwindigkeit der Donau 15000 Fuß in einer Stunde, oder 250 Fuß in einer Minute, und bringt daraus in einem Jahre 9 Billionen 882 Millionen. Boter hat nähmlich die Geschwindigkeit der Oberfläche des Flusses genommen (etwa wie zunächst 270 gelehrt wird) die unter allen die geringste ist, und beym G. als gar nichts angesehen wird.

269. Ich habe Gulielminis Exempel beybringen wollen, weil sie die Anwendung der Lehren erläutern und beym G. viel weitläuftiger berechnet sind. Damit sich nun die Zahlen, die ich herausbringe, mit den seinigen vergleichen liessen, musste ich seinen Werth von m annehmen, der sonst gewiß jetzo keinen Beyfall finden wird, (164; 165) und der ohnstreitig die Geschwindigkeit der Donau (268) viel zu klein macht. Ich sehe nicht einmahl, wie G. mit diesem Werthe in seinem Exempel (263) hat rechnen können, da er gesteht (**), in horizontalen Canälen fliesse das Wasser nur wegen des Drucks (nach der Wasserhöhe) aber in solchen, die nicht horizontal sind, fliesse es nur mit der Geschwindigkeit, die von des Wasserbettes Neigung herrührt,

(*) relatio de mari in opusc. Boteri.

(**) mens. aqu. A. Lib. III. Prop. I. Schol.

rührt, das ist, mit der Geschwindigkeit des Falles wie ich in (248) angenommen. Hiebey hat sein m gewiß nichts zu thun. Die Geschwindigkeit des Falles gehört ohnstreitig der Höhe des Falles.

Practische Arten, die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen.

270. I. Wenn man ein Stückchen Holz oder sonst was leichtes auf einen Fluß legt, und bemerkt, wie weit es in einer gegebenen Zeit schwimmt, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Flusses bestimmen. Dieses Verfahren lehrt Mariotte (*) und nach ihm Beyer (**). Man könnte sich dazu ein Pendel einrichten, das halbe oder ganze Secunden schlüge (Höh. Mech II. Abschn. 45.). Mariotte erinnert, daß er zum voraussetze, der Fluß laufe am Boden so geschwind als in der Oberfläche, da doch seinen Gedanken nach das Wasser am Boden langsamer läuft. Dieses widerspricht den Sätzen (248; 266.) nicht, denn es könnte auf Ungleichheiten des Bodens, die Hindernisse, welche das Wasser daselbst findet, und andere Ursachen ankommen, und Gulielmini gesteht selbst zu, daß das Wasser der Flüsse in der Mitte geschwinder ist, als anderswo (***).

(*) du mouv. des eaux IV. disc.

(**) Schauplatz der Mühlenbaukunst II. Cap.

(***) de nat. flum. cap. 7.

II. Guido Grandi (*) beschreibt, wie man es machen müsse, den Augenblick, wenn der Span oben in den Fluß geworfen wird, tiefer unten zu bemerken. Jeder sieht leicht, was für Zeichen hiezu sich erdenken lassen.

III. An eben dem Orte erwähnt Grandi, daß man vorgeschlagen, Stangen, die unten mit Gewichten beschwert wären, damit sie sich im Wasser vertical stellten, den Fluß hinab schwimmen zu lassen, erinnert aber, daß dieses nicht die Geschwindigkeit des Wassers in der Oberfläche oder in einer gewissen Tiefe unter derselben gebe, weil das Wasser von der Oberfläche an, so weit als die Stange hinunter reicht, in die Stange wirkt, und mit den unterschiedenen Geschwindigkeiten, die es hat, zusammen ihr Schwimmen bestimmt.

IV. Man verbinde zwey Kügelchen von Wachs durch einen Faden von beliebiger Länge. Das eine mache man durch Sand u. d. g. zu einem Körper von etwas schwererer Art, als das andere ist. Nun werfe man sie beyde in einen Fluß, so wird das von schwererer Art tiefer hinunter sinken, und das von leichterer Art, an der Oberfläche bleiben, aber doch von der unteren so weit in die Oberfläche gezogen werden, daß der Wind keine Wirkung auf dasselbe hat. Wenn man nun bemerkt, ob sie beyde gleich fortschwimmen, ob das oberste oder das unterste zurückbleibt, so wird

(*) del movim. dell'acqu. Lib. I. cap. VI.

wird man daraus beurtheilen können, ob der Fluß unter der Oberfläche, eben so viel Geschwindigkeit, mehr oder weniger, habe, als in derselben.

V. Mariotte hat diesen Versuch (*) in einem Flusse angestellt, der nur etwa 3 Fuß Tiefe hatte. Gewöhnlich blieb die unterste Kugel zurück, besonders, wo sie über einigen Kräutern nahe weggieng, die sich auf des Flusses Boden befanden. Wo aber das Wasser eine Hinderniß fand, sich dadurch ein wenig erhob und nachgehends einen schnellen Lauf bekam, wie unter Brücken, da gieng die untere Kugel vor der obern, und zeigte dadurch, das Wasser laufe in der Mitte schneller als in der Oberfläche. M. leitet dieses daher, weil das Wasser, wenn es bey einer solchen Hinderniß aufschwillt, alsdenn gleichsam auf einer schiefen Fläche, unter die horizontale Oberfläche des Flusses, mit mehr Geschwindigkeit hinabschiesst, als des Flusses Oberfläche selbst hat; daher erklärt er, warum sich in mittelmässigen Flüssen, ein wenig unterhalb der Brücken, immer Gruben im Boden befinden.

Wo aber der Fluß in seinem Bette mit einem mässigen Laufe ordentlich fortgeht, geht das Wasser in der Oberfläche schneller, als das etwa einen Fuß darunter. Von Kräutern, die das Wasser fortführet, Sägespänen u. d. g. da eins tiefer unter der Oberfläche als das andere schwimmt, schwimmen in einem solchen Flusse die

(*) du mouv. des eaux II. Partie 3. disc.

die immer langsamer, die dem Boden näher sind. M. leitet das aus dem Zusammenhange der Wassertheilchen her.

Geschwindigkeiten des Wassers vermittelst eines Pendels zu vergleichen.

271. Lehnsatz. Aufg. Ein Gewicht = P (21. F.) hänge an einem Faden von A herab, das Gewicht des Fadens selbst kömmt hier in keine Betrachtung. Eine Kraft = F, die nach der gegebenen Richtung HDB wirkt, bringt den Faden aus der lothrechten Lage AE, in die schiefe AB, so daß das Gewicht in B erhalten wird. Man sucht die Vergleichung zwischen F und P.

Aufl. HD mache mit der Horizontallinie GD, den Winkel HDG = β und mit der lothrechten AD; dessen Ergänzung HDA = R — β; der Winkel EAB, um den der Faden aus der lothrechten Lage gehoben wird, sey = α.

Man fälle aus D auf AB einen Perpendikel DW, das verlängert, einer lothrechten Linie durch B in S begegne. Man zerlege die Kraft des Gewichtes P in B, vermöge der es nach der lothrechten Linie SB sinken wollte, in zwo, (Stat. 63.) eine, die den Faden von B hinaus nach der verlängerten AB zieht, und also durch die Festigkeit des Fadens, der sich nicht dehnen läßt, und den man in A hält, völlig aufgehoben wird; die andere nach einer Linie, die auf den Faden senkrecht stünde, und der er also auf keine

keine Art hinderlich ist, wenn sie das Gewicht treibt, einen Kreis um A zu beschreiben. Diese letztere Kraft ist $\frac{SW}{SB}$. P = P. sin WBS = P. sin α.

Die Kraft F zerlege man eben so in zwo Kräfte, eine nach WB, die andere nach DW; die erste druckt ebenfalls nur das Gewichte P nach der verlängerten AB hinaus, und wird also durch die Festigkeit des Fadens völlig aufgehalten, wie die erste von vorigen beyden. Die andere $= \frac{DW}{DB}$. F = sin DBA. F = F. sin (EDB - α) = F. sin (R $-\beta-\alpha$) = F. cos ($\beta+\alpha$) ist der zweyten von vorigen beyden gerade entgegengesetzt, und muß ihr also gleich seyn, wenn der Faden in einer schiefen Lage soll erhalten werden.

Also ist $F = \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$. P.

272. Zus. Ist HD horizontal, also $\beta = 0$, so wird F = P. tang α (Trig. 4. Erkl. 3. Zus.).

273. Zus. Machte eine andere Kraft K, mit der Horizontallinie den Winkel γ; und erhübe eben das Gewicht, um den Winkel δ, so wäre $K = \frac{\sin \delta}{\cos(\gamma+\delta)}$. P.

274. Zus. Also $F : K = \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha+\beta)} : \frac{\sin \delta}{\cos(\gamma+\delta)}$.

275. Zus. Und wenn $\beta = \gamma$ wäre, $F : K = \frac{\sin\alpha}{\cos(\gamma+\alpha)} : \frac{\sin\delta}{\cos(\gamma+\delta)}$.

276. Zus. Wenn $\beta = 0 = \gamma$; ist $F : K = \tang\alpha : \tang\delta$ (272).

277. Hängt das Gewicht in fliessendem Wasser, so sind F, K Stösse, die das Gewicht vom Wasser leidet. Die Verhältniß dieser Stösse hat man aus den Winkeln. Ist also eben die Verhältniß anderswoher durch die Geschwindigkeiten gegeben, so hat man die Verhältniß der Geschwindigkeiten.

278. Unten (434; XX) wird gelehrt, daß Stösse auf eine und dieselbe Kugel, sich wie die Höhen verhalten, welche den Geschwindigkeiten des stossenden Wassers gehören, also wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Ist also das Gewicht P eine Kugel, so hat man aus Neigung des fliessenden Wassers, und Winkel, um den sie erhoben wird, die Verhältniß der Geschwindigkeiten.

Warum es eine Kugel seyn muß, ist leicht zu sehen; Nur sie stellt dem auf sie fliessenden Wasser immer gleiche und ähnliche Fläche entgegen, was auch der Faden für einen Winkel mit der Verticallinie macht. Bey jedem andern Körper änderte sich mit dem Winkel des Fadens, dergleichen Fläche, und man müsste für jeden Winkel wissen, was es für eine Fläche ist,

und

und wie der Stoß auf sie sich nach der Geschwindigkeit richtet.

279. Zus. Kann man den Fluß für horizontal annehmen, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die Quadratwurzeln der Tangenten (276).

280. Den Winkel zu messen, könnte man den Faden so an einen Quadranten befestigen, daß A desselben Mittelpunct wäre. Oder man könnte die Linien AD; DB, messen, da AB als eine unveränderliche Länge ohnedem bekannt ist, aus den drey Linien liesse sich der Winkel berechnen.

281. So fände man also die Verhältniß der Geschwindigkeit in des Flusses Oberfläche, zu der am Boden, oder in jeder Tiefe unter der Oberfläche, und weil man die erste haben kann (270) liesse sich die andere daraus berechnen.

282. Gulielmini, der dieses Verfahren vorschlägt, nimmt die Kräfte F:K in der Verhältniß der Geschwindigkeiten selbst an (*), es ist aber richtiger, daß sie sich wie die Quadrate verhalten, welches auch neuere Schriftsteller lehren (**). Uebrigens erhellt hieraus, wie man die Verhältniß v:u als bekannt annehmen darf (262).

283.

(*) Menf. aqu. fluent. L. II. Prop. 9.

(**) Herm. Phor. 416.

283. Wenn man den Winkel α, das Gewicht P, und seine Gestalt weiß, z. E. daß es eine Kugel ist, so ist bey einem horizontalen Flusse, aus (272) die Kraft des Stosses = F gegeben. Wüsste man also, wie der Stoß des Wassers auf einen gegebenen Körper, durch die Geschwindigkeit des Wassers bestimmt wird, so könnte man diese Geschwindigkeit hier aus dem bekannten Stosse berechnen. Ich will hiezu eine Formel mittheilen, die Elvius gegeben hat (*), den Beweis muß ich wieder versparen. Er folgt unten 437.

284. Das Gewicht bey P, soll eine Kugel seyn, aus einer Materie, deren eigne Schwere sich zur eignen Schwere des Wassers $= p : p - q$ verhält; (der Kugel Gewicht auser dem Wasser möchte z E. p, ihr Gewicht im Wasser q seyn). Der Kugel Durchmesser heisse d; und der Faden, an dem sie hängt, wird um den Winkel α erhoben, das Wasser fliesst fast horizontal. Unter diesen Umständen ist seine Geschwindigkeit so groß, daß es in einer Secunde den Weg

$$2\sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot \frac{g.d.q.\tang\alpha}{p-q}$$ zurücklegt.

Exempel. Elvius bediente sich einer beinernen Kugel von 0,17 schwedischen Fuß im Durchmesser; sie wog in der Luft 2397, im Wasser

(*) Abhandl. der Kön. Schwed. Akad. der Wiss. 1741 Meine Uebersetzung III. B. 140. S. Es sind daselbst in der Formel einige Druckfehler.

ser 987 Aß; Auf einem kleinen Flusse, dessen Wasser sehr still und gleich floß, fand er des Winkels A Tangente $= \frac{7}{17}$ (nähmlich die Linie DB horizontal gesetzt, AD = 34 Zoll DB = 14 Zoll. Er nimmt in schwedischen Fussen g = 16 an, also ist d = 0,17; p = 2397; q = 987; und die Geschwindigkeit des Wassers $= 2\sqrt{(\frac{4}{3}.\frac{16.0,17.987.7}{1410.17})}$ Fuß in einer Secunde. Die Zahlen, so weit sich thun läßt, abgekürzt, sind $2\sqrt{\frac{32.329.7}{70500}}$. Den Winkel, dessen Tangente $\frac{7}{17}$ ist, finde ich $22^{\circ}23'$. Ich finde durch die Logarithmen die Wurzel = 1,0224, welches verdoppelt 2,0448 giebt. Elvius hat 2,045.

Er maß eine Länge von 96 Fuß auf dem Flusse, warf einen Span, etwas über der abgemessenen Länge ins Wasser, damit derselbe zuvor gleiche Geschwindigkeit mit dem Wasser erreichte, und fand, daß der Span diese Länge in 4 Secunden durchschwamm; dieses giebt für eine Secunde 2,086 Fuß. Er hat den Versuch unterschiedenemahl wiederhohlt; und in so weit bestätiget hier die Erfahrung die Richtigkeit der Formel.

285. I. Es wird nicht unnütz seyn, diese Geschwindigkeit mit ein Paar andern zu vergleichen. Mariotte hat durch das Verfahren (270) die Geschwindigkeit der Seine an Oertern, wo

sie

sie am grösten war, $3\frac{1}{4}$ Fuß gefunden (*). De la Hire (**) glaubt: keiner der ordentlichen Flüsse mache 6 Fuß in einer Secunde. Guido Grandi aber ist der Meynung, daß es wohl Flüsse gäbe, die noch schneller gingen (***) und gründet sich darauf, daß er selbst, im Tessino, das Loth (281) über 80 Gr. hätte erheben sehn.

Weil er sein Instrument gar nicht beschreibt, so kann man die Richtigkeit seines Schlusses nicht beurtheilen. Um einigermassen einen Begriff zu geben, wie solche Erfahrungen zu brauchen sind, will ich setzen, Grandis Pendel wäre mit Elvius seinem (284) einerley gewesen; So setze ich in (276) $\alpha = 22° 23'$ $\delta = 80°$ und finde durch die Logarithmen $\sqrt{\frac{K}{F}} = 3,711$ oder die Geschwindigkeit des Tessino 3,711 mahl grösser, als die, welche Elvius fand, das gäbe für den Tessino etwa 7,7 schwed. Fuß in einer Secunde. Der schwedische Fuß hält nach Crusens Comtoristen 131,6 pariser Linien.

Vermuthlich war Grandis Kugel von Bley, einer schwerern Materie als Bein, da also die Erhebung auf 80 Gr. mehr Geschwindigkeit anzeigt, als diese Rechnung giebt.

II. Belidor Archit. Hydr. Zweyter Theil IV. B. 14 Cap. 1193 §. sagt, die schnellsten Flüsse,

(*) Am 270. a. D. 403. S.

(**) Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. p. 260. ed. de Paris.

(***) del M. d. A. Pr. 37. esemp. 2. Scol.

Flüsse, eine Weite in die andre gerechnet, seyen selten mehr als zwo Linien auf jegliche Toise abschüssig, d. i. 16 Zoll 8 L. auf hundert Toisen. Setzt man eines rechtwinklichten Dreyecks Hypotenuse = 6. 144 Linien, die Höhe = 2 Linien, so bekömmt man des kleinsten Winkels Sinus = $\frac{1}{43\frac{1}{2}}$ und 10 — log 432 = 7,3645162 also der Winkel = 7 M. 57 S. Ferner auf einer solchen Hypotenuse der respectiven Schwere Logarithme = 0,3645162 — 3, die respective Schwere = 0,0023148. Nimmt man den Logarithmen des Falls in pariser Fussen aus Hdh. Mech. II. Abschn. 45., so ist er

= 1,1788532

0,3645162 — 3

0,5433694 — 2

log 3600 = 3,5563025

2,0096719

So gieng ein Körper mit dieser respectiven Schwere 0,03494 pariser Fuß in einer Secunde, und 125,79 in einer Minute.

III. Der Sohle eines tiefen Hauptstollens soll man auf 100 Lachter Länge, $\frac{1}{4}$ Lachter Anlaufen oder Rösche geben, (Bericht vom Bergbau Leipz. 1772, 228 §.) Da ist die respective Schwere = $\frac{1}{400}$ = 0,0025, also beynah eben so groß als in (II). Setze ich den Fall in einer Secunde = 15,625 rheinl. Fuß, so beträgt der Weg in einer Secunde = 0,03906 rheinl. Fuß. Das freybergische Lachter =

6,322465

6,322465 rheinl. Fuß gesetzt (meiner Anm. üb. die Markscheidekunst zweyte, 12 Seite) würde ein freybergisch Lachter in 12,724 Secunden zurückgelegt.

IV. Ich führe diese Rechnungen nur an, um zu zeigen, daß, was die Erfahrung von Geschwindigkeit der Flüsse gelehrt hat, sich nicht schlechterdings wie Fall auf schiefer Ebene berechnen lässt.

286. Eustach Manfredi in seinen Anmerkungen über Gulielmini von der Natur der Flüsse (*), erinnert: das Verfahren (279) werde in der Ausübung manchmahl dadurch unrichtig, weil das Wasser oft in einer Tiefe unter der Oberfläche eine andere Richtung hat, als in der andern Tiefe. Man brauche es aber doch in Ermangelung eines bessern. Er selbst schlägt eine sehr sinnreiche Art vor, die wirkliche Geschwindigkeit zu messen.

287. Sie kömmt darauf an: Wenn man den Faden mit dem Gewichte in einem stillstehenden Wasser fortführte, so fände das Gewicht, nach der Geschwindigkeit, mit der es fortgeführt wird, in diesem Wasser Widerstand, und der Faden würde dadurch aus der lothrechten Lage in eine schiefe gebracht werden. Man könnte also messen, wie groß die Abweichungen des Fadens für diese oder jene Geschwindigkeiten wären. Weil es nun einerley ist, ob das Gewicht durch

(*) 12. Anm. über das 7. Cap. In der Nuova Raccolta II. B. 374. S.

durch stillstehendes Wasser geführt, oder von bewegtem Wasser gestossen wird, so würde man es nun nur in einen Fluß senken dürfen, und die Abweichungen des Fadens im Flusse unter denen aufsuchen, die man bey den nur erwähnten Erfahrungen im stillstehenden Wasser gefunden hatte.

288. Das Werkzeug, welches M. zu dieser Absicht erdacht hat, wird von ihm folgendergestalt beschrieben. AB; (22. Fig.) war die Oberfläche von stehendem Wasser in einem Behältnisse fünf Klafter (pertiche) lang und fast eben so breit. Nahe darüber war ein Messingdrath CD an beyden Enden wohl befestigt. An diesem Drathe hing vermittelst zweener messingerner Ringe E, F, ein sehr leichter Halbkreis GHI, der aus einem sehr dünnen ebenen Bretchen ausgeschnitten war, dergestalt, daß sein Durchmesser GI auch wagrecht war, und der Punct H; der 90ste Grad von G oder I, sich lothrecht unter dem Mittelpuncte K befand. Ein Faden von gedrehter Seide, MI war bey I an des Halbkreises Rand gebunden, und gieng bey M über eine Welle, so daß der Faden nach MI beständig wagrecht, und in des Halbkreises GHI Ebene gezogen ward. Die Welle war an einem Ende des Wasserbehältnisses befestigt. Man drehte sie mit einer Kurbel, so wickelte sich der Faden MI auf sie, und zog den Halbkreis nach, welcher vermittelst der Ringe E, F, längst des Drathes CD, von C nach D lief. Von des

Halbkreises Mittelpuncte K, hing ein Faden mit einer bleyernen Kugel P, herab; die Kugel war tief in das Wasser unter AB gesenkt, indem also ihr Faden dem Halbkreise folgen wollte, wich er zugleich wegen des Wiederstandes des Wassers von der lothrechten Linie KF nach der Seite ab, die der Bewegung des Halbkreises entgegengesetzt war. Wenn es gelang, diese Bewegung gleichförmig zu machen, indem man den Faden IM immer mit gleicher Geschwindigkeit auf die Welle wickelte, so konnte man erwarten, daß der Abweichungswinkel HKP ungeändert bleiben würde, und dieses erfolgte auch wirklich, der Bewegung des Werkzeuges ohngeachtet, der Winkel blieb immer von einer Grösse, nur war er grösser oder kleiner, nachdem bey einem oder dem andern Versuche, die Geschwindigkeit der erwähnten Bewegung geändert ward. Wer also auf des Wasserbehältnisses Rande stand, und den Halbkreis vor sich vorbey fahren sahe, der konnte die Grade des Bogens HO, um welche der Faden von der lothrechten Linie abwich, zulänglich unterscheiden. Die Grade waren auf dem Rande schwarz und sehr kenntlich bemerkt. Nur war hiebey folgendes zu bemerken: Wenn man den Faden MI und mit ihm die ganze Geräthschaft zu ziehen anfing, so hing das Loth KP unbeweglich in seiner gewöhnlichen Lage KH, also konnte es, beym Anfange dieser Bewegung nicht plötzlich, die völlige Neigung HO bekommen, die dieser Geschwindigkeit zugehörte,

gehörte, dieses erfolgte erst, nachdem die Bewegung einige Zeit gedauert hatte, alsdenn behielt es diese Neigung, wenn nur die Bewegung gleichförmig war: Eben so, stellte sich am Ende der Bewegung, der Faden nicht den ersten Augenblick sogleich in die lothrechte Lage kh, sondern erst einige Zeit nach dem Stillstande. Man hatte daher auf dem Rande des Gefässes zweene Puncte V, Z, bemerkt, von denen man aus Erfahrungen schon wusste, daß der Faden in seiner beständigen Neigung war, wenn des Halbkreises Mittelpunct gleich vor ihnen vorbey gieng.

289. Der Faden KP war doppelt; seine beyden Theile hatten die Ebene des Halbkreises zwischen sich, von der sie ein wenig abstunden, und vereinigten sich in der Kugel P. So bewegte sich der Kugel Mittelpunct immer in der Ebene des Halbkreises, des Drathes CD; und des Fadens IM. Man bemerkte mit einer Secundenuhr die Zeit, welche der Mittelpunct brauchte, die Länge VZ zu durchlaufen, die man genau gemessen hatte; dieser Länge war natürlicher Weise der Weg Kk gleich, den der Mittelpunct des Halbkreises in eben der Zeit beschrieben hatte, sowohl als Pp, der Weg des Mittelpunctes der Kugel. Die Vergleichung des Weges mit der Zeit, gab die Geschwindigkeit, der die Neigung des Fadens zugehörte.

290. Manfredi hat mit diesem Werkzeuge
1727. einige Versuche angestellt. Die Tangen-

ten der Neigungen HO; verhielten sich immer ziemlich genau wie die Quadrate der Geschwindigkeiten (276; 277.) der Halbkreis und die Kugel, bogen durch ihr Gewicht den Drath CD ein wenig, daß er sich, wie ein beschwerter Faden thun muß, nach Art einer Kettenlinie krümmte, welches die Beobachtung des Bogens HO ein wenig unsicher machte. Andere Geschäffte verhinderten Manfredin, dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, auf leichte Mittel zu denken, wie die Bewegung gleichförmig zu machen wäre u. d. g. Dieses Werkzeug verdient wohl, daß es vollkommener gemacht und zum Gebrauche angewandt wird.

291. Grandi erwähnt auser einigen andern Verfahren, die im Grunde mit (282) übereinstimmen (*), auch einen, welcher die Geschwindigkeit des Wassers angeben soll (**). Das wesentliche davon kömmt darauf an, daß ein Kasten in beliebige Tiefe unter das Wasser gesenkt wird, in dem man, wenn er sich da befindet, wo man ihn hin haben will, ein kleines Loch öffnet, und Wasser eine gegebene Zeit lang hinein laufen läßt, wenn man ihn alsdenn verschliesst, und das darinnen befindliche Wasser wiegt, so könnte man entweder aus dieser Wassermenge und der Grösse des Loches die wirkliche Geschwindigkeit berechnen, mit welcher das Wasser hineingedrungen ist, oder durch Vergleichung solcher Wasser:

(*) del movim. dell' acqu. L. I. Prop. 44; 45;
(**) Prop. 46.

fermengen in unterschiedenen Tiefen, die Geschwindigkeiten mit einander vergleichen.

Man wird sich diese Maschine ohne Grandis Figur, die ohnedem nur das äuserliche Ansehen abbildet, leicht vorstellen. Aus der obern Seite des Kastens geht ein langes Rohr bis über die Oberfläche des Wassers hinauf. An Abtheilungen, die sich auf dieses Rohres äusern Fläche befinden, kann man wahrnehmen, wie tief sich der Kasten unter des Wassers Oberfläche befindet; im Rohre geht ein Drath hinunter in den Kasten, vermittelst dessen man das Loch öffnen und verschliessen kann, das Rohr dient zugleich der Luft zum Wege, die aus dem Kasten dem Wasser weichen muß. Noch gehört dazu ein eiserner Stab, oben mit einem Ringe versehen. Man pflanzt ihn in des Flusses Boden, und befestiget den Kasten daran vermittelst eines Stricks, der durch den Ring geht, daß man also den Kasten erheben oder senken kann. Feste Arme, die vom Rohre abgehen, haben an ihren Enden Löcher, durch die der Stab mit gesteckt wird; so kann, nachdem sich diese Löcher am Stabe hinunter oder hinauf schieben, der Kasten sinken oder steigen.

Grandi nennt diese Vorrichtung fiasca idrometrica. Sie ist 1721. bey Untersuchungen des Po und sonst gebraucht worden, in Flüssen und in stillstehenden Wassern. Die Wassermengen oder die ihnen gemässe Geschwindigkeiten verhielten sich allemahl ziemlich genau wie

die Quadratwurzeln der Tiefe des Lochs unter der Oberfläche des Wassers (zur Bestätigung von 101). Hielt man das Loch, auch eine sehr lange Zeit, der Oberfläche eines Flusses gleich, so kam doch kein Tropfen in den Kasten, woraus zu folgen scheint, das Wasser auf der Oberfläche habe für sich keine Geschwindigkeit, es werde nur von dem untern fortgetragen (266) und bleibe also vor dem Loche stehen, wenn das untere von den Wänden des Kastens aufgehalten wird.

Manfredi (*) erinnert mit Recht gegen diese Maschine, daß die Geschwindigkeit des Wassers von ihr nicht so angezeigt wird, wie man sie zu wissen verlangt, wie sie nähmlich durch allerley Hindernisse verändert wird; denn das Wasser dringt in das Loch, ohne alle Hindernisse, mit der Geschwindigkeit hinein, die ihm Druck oder Fall geben. Mich deucht, M. hätte diese Erinnerung selbst durch das bestätigen können, was B. anführt, daß sich die Wasserfaden bey dieser Maschine so verhalten haben, wie sie sich nach einer Theorie verhalten sollten, welche die wirklichen Hindernisse beyseite setzt.

292. Belidor (**) beschreibt ein Werkzeug, das Pitot angegeben hat (***). Es besteht aus einer an beyden Enden offenen Röhre ohnge-

(*) a. a. O.
(**) Arch. hydr. I. Part. T. I. art. 614.
(***) Mem. de l'Ac. des Sc. 1732.

gefähr wie 23. Fig. Sie wird senkrecht dergestalt ins Wasser gehalten, daß die Oeffnung FG ihres kegelförmigen Endes EDGF, dem Strome gerade entgegen gesetzt ist. Wenn die Oberfläche des Strohms bis an M geht, so wird das Wasser in dieser Röhre höher, z. E. bis K stehen, denn durch die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bey FG hineinschiesst, erhält es eine höhere Wassersäule, als stillstehendes Wasser blos durch sein Gewicht erhalten könnte. Stillstehendes Wasser nähmlich würde nach den Gesetzen der Hydrostatik in die Röhre nur so weit hineintreten, als es ausen um sie steht. Eben das wird das fliessende Wasser in einer Röhre thun, die durchaus gerade ist, und wo es sich nicht, wie hier in den Trichter fängt. Pitot schlägt daher vor, neben dieser beschriebenen Röhre noch eine gerade zu brauchen, beyde könnten einander parallel auf ein Bret befestigt werden, wie mit Barometern geschieht, und wenn sie so ins Wasser gesenkt würde, träte es in die gerade, so weit als die Oberfläche des Flusses reicht, in die gebogene aber höher, und so liesse sich MK, der Unterschied der Höhen, genau wahrnehmen.

293. Manfredi (a. a. O.), der von diesem Werkzeuge nur unvollkommene Kenntniß hatte, muthmasset, es werde eben den Einwendungen ausgesetzt seyn, die er gegen den Kasten zum Wassermengen machte (291), und vorhergehende Beschreibung wird seine Muthmassung recht-

fertigen. Mich veranlasst es noch zu einer andern Erinnerung. Man wird wohl Belidorn nicht unrecht thun, wenn man aus seinen Worten schliesst, er glaube, die Höhe MK, wie viel das Wasser in die Röhre über die Oberfläche des Flusses hinauftritt, gehöre der Geschwindigkeit des Wassers, das in FG hineindringt. Sollte dieses wohl richtig seyn?

294. Wenn diese Röhre nicht im Wasser stünde, wenn sie durch Anfüllung, etwa von oben hinein, immer bis an K voll erhalten würde, so liesse sich nach (165) annehmen, das Wasser schiesse bey FG mit einer Geschwindigkeit heraus, die der Höhe KE zugehörte, noch müsste man beyseite setzen, ob die trichterförmige Gestalt des Auslaufs und besonders die Weite der Mündung FG (158) hierinne nichts änderten. Aus dieser Voraussetzung würde ich also rückwärts so schliessen: Wenn durch irgend einen Kunstgriff Wasser in die Röhre bis an K gebracht wäre, so würde es auf dieser Höhe beständig stehen bleiben, so lange Wasser in FGDE mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe EK zugehört, hineindränge. Wenn also FG der Oberfläche des Flusses gleich gehalten würde, so würde ich die Geschwindigkeit dieser Oberfläche aus der Höhe beurtheilen, auf welche das Wasser in der Röhre erhalten würde.

295. Hier aber soll man sich vorstellen, bis an M werde das Wasser in der Röhre durch das

Gleich-

Gleichgewicht erhalten, davon die Hydrostatik handelt, weil nähmlich die Röhre so tief im Wasser steht, von M bis K aber werde es durch die Geschwindigkeit des hineindringenden Wassers erhalten. Wäre diese Vorstellung richtig, so müsste man umgekehrt auch folgendes annehmen können: die Röhre befinde sich bis an M in stillstehendem Wasser. Man mache z. E. durch Anfüllen von oben hinein, daß das Wasser in ihr, über den Horizont des aufen um sie still stehenden Wassers von M bis K steigt; so wird es bey FG herauslaufen, und da müsste nun die Geschwindigkeit der Höhe MK zugehören. Man begreift leicht, daß die Versuche, die ich bisher angeführt habe, uns nicht berechtigen, so etwas anzunehmen. Denn, wenn gleich die Wassersäule MK das Vermögen besitzt, Wasser durch eine Oeffnung bey M mit einer Geschwindigkeit herauszutreiben, die der Höhe KM zugehört, so folgt doch nicht, daß sich dieses Vermögen, durch die Masse Wasser von M bis FG, und das aussen vor FG stehende Wasser, dergestalt so zu reden, durcharbeiten kann, daß auch bey FG das Wasser mit einer Geschwindigkeit herausgetrieben würde, die der Höhe MK zugehörte.

296. I. Die Vergleichung zwischen der Höhe MK, und der Geschwindigkeit, damit das Wasser bey FG hineindringt, ist wohl nicht so leicht, als sich Belidor vorgestellt hat, und man wird mir solches desto leichter glauben, wenn

ich noch beyfüge, daß dieses zu einer solchen Bewegung des Wassers gehört, davon Poleni ein ganzes Buch geschrieben (*), viel Versuche darüber, ohngefähr mit Vorrichtungen wie (112) beschreibt, angestellt, und doch keine sichere allgemeine Theorie davon gegeben hat. Wenn sich ein Gefässe in stillstehendem Wasser befindet, das eine Oeffnung unter der Oberfläche dieses stehenden Wassers hat, und wenn man in das Gefässe Wasser, höher als des aussen stehenden Wassers Oberfläche, bringt, so ist klar, daß das Wasser aus dem Gefässe durch die Oeffnung herauslaufen muß. Dieß nennt Poleni eine vermischte Bewegung des Wassers. Dergleichen gäbe die Röhre 23. F., wenn man sie nach 295 bis M in stillstehendes Wasser senkte, und in ihr Wasser bis an K erhielte, daß also das Wasser bey FG herauslaufen müsste. Alsdenn hiesse beym Poleni EM die todte Höhe MK, die lebendige Höhe. Den Ausfluß des Wassers aus einer Oeffnung, vor der kein Wasser steht, heisst er: die einfache Bewegung. Von dieser Bewegung des Wassers durch untergetauchte Gefässe, hat auch Daniel Bernoulli gehandelt (**).

II. Huetius hat einen ähnlichen Vorschlag gethan, die Stärke des Windes zu messen. Er befindet

(*) Der lat. Titel steht (92) Italiänisch, del moto misto dell' acqua, mit einigen Vermehrungen in der Nuova Raccolta Vol. III.

(**) Hydrodynamic. Sect. 7. de motu aquarum per vasa submersa.

befindet sich, aus den Huetianis, die ich selbst nicht gesehen habe, im Gentlemans Magazine (*). Man stelle sich eine Röhre in ein paar aufwärts gehende Schenkel gekrümmt vor, wie bey den gemeinsten Versuchen, das Gleichgewicht des Wassers u. d. g. zu zeigen, gebraucht wird. Beyde Schenkel sind an den Enden offen, der eine, welcher kürzer seyn mag, ist wieder horizontal gekrümmt, und erweitert sich gegen sein Ende wie eine Trompete. Nun befiehlt Huetius, in die Röhre Queckſilber zu giessen, das sich in beyden Schenkeln gleich hoch stellen wird; darüber schüttet er in dem längern Schenkel Scheidewasser (**). Wenn nun Wind zu der trompetenförmigen Oeffnung hineinbläset, nöthigt er daselbst das Queckſilber etwas zu weichen, und in den andern längern Schenkel zu gehen, dadurch wird das Scheidewasser im längern Schenkel zu steigen genöthiget, und wenn an diesem längern Schenkel Abtheilungen bezeichnet sind, so kann man die Stärke des Windes daraus beurtheilen, wie hoch die Feuchtigkeit steht. Den horizontalen Theil dieser Röhre, wodurch beyde Schenkel zusammenhängen, umgiebt ein Ring, der Ring hat unten einen Zapfen, und oben zwischen den Schenkeln eine Stange. Der Zapfen wird auf ein Gestelle gestellt, daß die ganze Maschine sich darüber dre-

hen

(*) Auguſt. 1768. p. 375.

(**) Wenigstens steht in der englischen Nachricht: second drawn *aqua fortis*.

hen kann. An der Stange ist eine Fahne feste. Der Wind stellt die Fahne seiner Richtung nach, die Fahne kann ihm nicht gehorchen, ohne die Stange mit zu drehen, und so dreht die Stange die durch den Ring gesteckte Röhre auf dem Zapfen, so daß die trompetenförmige Oeffnung allemahl dem Winde gerade entgegen kömmt. Die Maschine ist nur ein Gedanke Huets, und von ihm nicht bewerkstelliget worden.

III. Allerley Arten, die Geschwindigkeit und Stärke des Wassers zu messen, giebt Leupold an (*). Ich finde darunter keine, die würklich wäre gebraucht worden, als das Pendel (278) und sie scheinen mir alle noch vieler Verbesserungen benöthigt.

IV. Over de Snelheid van stroomend Water en de middelen om dezelve op allerleye diepten te bepaalen ist eine Abh. von Christiaan Brunings, Inspecteur general de Rivieren van Holland en West-Vriesland . . . in Verhandelingen uitgegeven door de Hollandsche Maatschappye der Wetenskapen te Haarlem XXVII Deel Haarlem 1789.

Die Formel, welche B. braucht, ist folgende 146. S.

A. S sey ein Cubikfuß, A die Grundfläche, S die Höhe, P das Gewicht eines Cubikfusses ∇; s eine Fläche, auf welche Wasser senkrecht stösst, und so durch das Gewicht = p aufgehalten wird, x die Höhe, welche der Geschwindigkeit

(*) Theatr. Mach. general. 504. u. f. §.

digkeit des Wassers gehört, so ist x $=$ $\frac{S.\ A.\ p}{P.\ f}$

Nähmlich, den Stoß des ▽ so stark gesetzt, als das Gewicht eines ▽ Prisma, dessen Grundfläche die gestossene Fläche ist. Die Höhe, die welche der Geschwindigkeit gehört, und diesen Stoß $=$ p genannt, so ist x. f $=$ p und A. S: x. f $=$ P: p; also $x = \frac{A.\ S.\ p}{P.\ f}$

Die Geschwindigkeit des ▽ in einer Secunde $=$ c $=$ 2. $\sqrt{}$ g. $\sqrt{}$ x wenn g den Fall in 1″ bedeutet.

Br. p. 147; setzt g $=$ 187,2 duim Rhynlands; das gibt $\frac{187,2}{12} = 15,6$ Fuß.

Nimmt man mit Eulern g $=$ 15,625 Fuß, so beträgt es 187,5 Zoll; also 0,3 Zoll mehr, als Br. annimmt.

Br. beschreibt und beurtheilt die bekannten Arten, des Wassers Geschwindigkeit zu messen. Bey Elvius Art erinnert er unter andern, es sey schwer, den Faden so lang zu machen, daß die Kugel auf die Oberfläche des Flusses komme . . .

Br. beschreibt seine erste Maschine p. 156. Verbesserungen dazu 181 Seite.

Weil das Gewicht, welches die Fläche gegen den Stoß zurückhalten soll, nicht unmittelbar

bar an ihr, sondern vermittelst Schnüre über Rollen an Hebelarmen angebracht würde, muß man Berechnungen des Hebels, Friction ... dabey anbringen.

Für g = 187,2 Zoll, ist log 2. $\sqrt{g}$ = 1,4371829.

Wie Hebel, Friction ... berechnet wird, zeigt Br. p. 170.

Nennt das Werkzeug Tachometer.

V. Stoß des Wassers auf bewegliche Ebenen, braucht Herr Reinh. Woltmann, Director beym Wasserbaue der Rep. Hamburg.

Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, oder eine zuverlässige Methode, die Geschwindigkeit der Winde und strömenden Gewässer zu beobachten, von Reinh. Woltmann. Hamb. 1790. Es ist da auch Hrn. Brüning Strommesser beschrieben und abgebildet. Beschreibung eines Instruments zur Messung des Stosses der Wasserströmung, findet sich in: Neuere Abhandlungen der k. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Zweyter Band. Prag 1795 im Physicalisch-mathematischen Theile X. Abhandl.

Fortse-

Fortsetzung der (236) angefangenen Theorie von der Geschwindigkeit des fliessenden Wassers.

297. Wenn das Wasser im Querschnitte BE 20. Fig. die Geschwindigkeit hat, die seinem Falle bis dahin zugehört (260) und das Wasser im Canale vor diesem Querschnitte über seinem Boden B, bis an O in der lothrechten Linie BO reicht, so wird durch diese Wasserhöhe, die Geschwindigkeit des Wassers durch den Querschnitt nicht vergrössert, es läuft durch denselben, wegen des Drucks dieser Wassersäule, nicht schneller.

Der Druck dieser Wassersäule könnte, BE als eine Oeffnung betrachtet, dem durchfliessenden Wasser aufs höchste nur eine Geschwindigkeit geben, die der Höhe BO zugehörte (165) und BO wird geringer angenommen, als die Höhe, wie tief das Wasser in B herabgefallen ist. Also hat das Wasser im Querschnitte schon eine grössere Geschwindigkeit, als ihm der Druck der erwähnten Wassersäule geben könnte, und diese seine Geschwindigkeit wird also dadurch so wenig verändert, so wenig die Geschwindigkeit einer fortlaufenden Kugel durch eine andere verändert wird, die ihr langsamer nachfolgt.

Man sieht leicht, wie sich dieses auf jede Stelle des Querschnittes anbringen lässt. Das Wasser in Q hat durch seinen Fall schon mehr

Ge-

Geschwindigkeit, als ihm der Druck der Wassersäule HO geben kann.

298. Wenn man den Querschnitt BE zum Theil von oben herein verschlösse z. E. den Theil EQ durch ein Schutzbret RQ, daß nur BQ offen bliebe, so könnte mit der bisherigen Geschwindigkeit nicht so viel Wasser durch BQ laufen, als vorhin durch BE lief. Das Wasser müsste also vor dem Querschnitte aufschwellen; wenn es nun auch gleich bis an des Schutzbretes oberstes Ende R gestiegen ist, so wird doch die Höhe, die es alsdenn über B hat, noch geringer seyn, als der Fall, dem die Geschwindigkeit des Wassers in B zugehört (wie in 297) und also wird der Druck dieses aufgeschwollenen Wassers noch immer die Geschwindigkeit in B nicht vermehren, folglich wird das Wasser noch immer aufschwellen, bis es über R wegläuft.

299. Könnte das Wasser nicht über R wegfliessen, wie z. E. wenn das Schutzbret noch höher hinauf, und selbst an die Horizontallinie durch LI reichte, so würde das Wasser, das in dem Behälter, dessen Boden AK ist, beständig zufliesst, immer mehr und mehr aufschwellen, und müsste sich über die Horizontalfläche LI erheben, wenn das Wasser in B grössere Geschwindigkeit bekommen soll, als es bisher durch den Fall von LI nach B hatte.

300. Gulielmini erläutert diese Sätze durch Versuche, dazu man sich das wesentliche etwa so vorstellen kann: Daß man in (242) statt des

Was-

Wasserbehältnisses einen grossen Kasten versteht, der sich mit Wasser füllen lässt, und statt des Flußbettes, eine bewegliche Röhre, die sich um eine horizontale Axe, welche auf die Verticalfläche KAIL senkrecht wäre, drehen liesse, damit sie nach Gefallen ein mehr oder weniger geneigtes Flußbette vorstellen könnte. Sie wäre oben eben so wohl offen, als im Flußbette, und man könnte den Lauf des Wassers in ihr, wie man wollte, durch ein Schußbret hemmen. S. hat das Wasser in dem Kasten immer auf gleicher Höhe zu erhalten oder zu vermehren, Heber gebraucht, die es aus einem grossen Teiche in den Kasten führten. Abweichungen von der Theorie schreibt er dem Reiben des Wassers am Boden und an den Wänden, Wirbeln, die entstehen u. d. g. zu (*).

301. Wenn das Wasser nach (299) bis an eine gewisse Horizontalfläche über LI aufgeschwollen ist, und nun in derselben bleibt, so ist dieses ein Zeichen, daß nunmehro durch den verengerten Querschnitt BQ, eben so viel Wasser fliesst, als zuvor durch den grössern BE.

Denn weil in das Wasserbehältniß über AK, immer Wasser zufliesst, und dieser Zufluß durch die Grösse des tief unter ihm liegenden Querschnittes nicht bestimmt wird, so wird jetzo, da der Querschnitt ist verengert worden, eben so viel zufliessen, als bey seiner vorigen Grösse, also

(*) Mens. aqu. L. IV. Prop. II. Schol.

Geschwindigkeit, als ihm der Druck der Wassersäule HO geben kann.

298. Wenn man den Querschnitt BE zum Theil von oben herein verschlösse z. E. den Theil EQ durch ein Schußbret RQ, daß nur BQ offen bliebe, so könnte mit der bisherigen Geschwindigkeit nicht so viel Wasser durch BQ laufen, als vorhin durch BE lief. Das Wasser müsste also vor dem Querschnitte aufschwellen; wenn es nun auch gleich bis an des Schußbretes oberstes Ende R gestiegen ist, so wird doch die Höhe, die es alsdenn über B hat, noch geringer seyn, als der Fall, dem die Geschwindigkeit des Wassers in B zugehört (wie in 297) und also wird der Druck dieses aufgeschwollenen Wassers noch immer die Geschwindigkeit in B nicht vermehren, folglich wird das Wasser noch immer aufschwellen, bis es über R wegläuft.

299. Könnte das Wasser nicht über R wegfliessen, wie z. E. wenn das Schußbret noch höher hinauf, und selbst an die Horizontallinie durch LI reichte, so würde das Wasser, das in dem Behälter, dessen Boden AK ist, beständig zufliesst, immer mehr und mehr aufschwellen, und müsste sich über die Horizontalfläche LI erheben, wenn das Wasser in B grössere Geschwindigkeit bekommen soll, als es bisher durch den Fall von LI nach B hatte.

300. Gulielmini erläutert diese Sätze durch Versuche, dazu man sich das wesentliche etwa so vorstellen kann: Daß man in (242) statt des

Was-

Wasserbehältnisses einen grossen Kasten versteht, der sich mit Wasser füllen lässt, und statt des Flußbettes, eine bewegliche Röhre, die sich um eine horizontale Axe, welche auf die Verticalfläche KAIL senkrecht wäre, drehen liesse, damit sie nach Gefallen ein mehr oder weniger geneigtes Flußbette vorstellen könnte. Sie wäre oben eben so wohl offen, als im Flußbette, und man könnte den Lauf des Wassers in ihr, wie man wollte, durch ein Schußbret hemmen. S. hat das Wasser in dem Kasten immer auf gleicher Höhe zu erhalten oder zu vermehren, Heber gebraucht, die es aus einem grossen Teiche in den Kasten führten. Abweichungen von der Theorie schreibt er dem Reiben des Wassers am Boden und an den Wänden, Wirbeln, die entstehen u. d. g. zu (*).

301. Wenn das Wasser nach (299) bis an eine gewisse Horizontalfläche über LI aufgeschwollen ist, und nun in derselben bleibt, so ist dieses ein Zeichen, daß nunmehro durch den verengerten Querschnitt BQ, eben so viel Wasser fliesst, als zuvor durch den grössern BE.

Denn weil in das Wasserbehältniß über AK, immer Wasser zufliesst, und dieser Zufluß durch die Grösse des tief unter ihm liegenden Querschnittes nicht bestimmt wird, so wird jetzo, da der Querschnitt ist verengert worden, eben so viel zufliessen, als bey seiner vorigen Grösse, also

(*) Mens. aqu. L. IV. Prop. II. Schol.

so muß auch durch den kleinern Querschnitt, nun eben so viel abfliessen, als vorhin durch den grössern. Das zufliessende Wasser müsste sonst über die Horizontalfläche, an der es doch stehen bleiben soll, aufschwellen oder unter sie sinken, nachdem durch den jetzigen Querschnitt mehr oder weniger abflösse, als durch den vorigen.

Der Regulator, noch eine praktische Art, des Wassers Geschwindigkeit zu messen.

302. I. Man erwähle einen solchen Querschnitt des Flusses, über und unter dem, das Wasserbette so viel als möglich gerade sey. Bey grossen Flüssen ist es nach Gulielminis Ausspruche leicht eine solche Stelle zu finden, und bey kleinen nicht allzuschwer (*).

II. Die unordentliche Gestalt zu vermeiden, welche des Flusses natürlicher Querschnitt (236) an einer solchen Stelle haben könnte, setze man dahin einen künstlichen, der aus gehauenen Steinen, Ziegeln, oder welches noch leichter ist, aus Balken zusammengesetzt wird; ein Rechteck, dessen Grundlinie AB genau wagrecht sey, (24 Fig.) die Seiten aber AC, BD, auf die Grundlinie senkrecht stehen; längst einer Seite z. E. BD hin, trage man ein gebräuchliches Maaß, Fusse, Ellen u. d. g. Oben bringe man ein Schußbret EG an, daß man dergestalt herablassen

(*) mens. aqu. L. IV. in f. Regula generalis pro mensurandis aquis quorumcunque fluminum.

lassen kann, daß sein unterster Rand EF immer wagrecht bleibt, und alles Wasser des Flusses, durch die Oeffnung AF, die das Schußbret frey läßt, zu gehen genöthigt ist.

III. Wenn man sieht, daß des Flusses Zustand ungeändert bleibt (239) lasse man das Schußbret herunter, daß sein unterster Rand EF unter die Oberfläche des Wassers kömmt. So wird das Wasser vor dem Schußbrete aufschwellen (299), bis an eine gewisse Gränze, dieselbe mag KL seyn.

IV. Man bemerke an der Seite BD (III.) die Stelle K, bis an welche das aufgeschwollene Wasser reicht; Sie wird meistens nicht viel höher seyn, als die Stelle dieser eingetheilten Seite, welche das Wasser erreichte, ehe man das Schußbret nieder ließ. Dieses folgt sowohl daraus, weil der meisten Flüsse Wasserbetten sehr wenig Neigung haben, als auch, weil die Beschleunigung der Bewegung, die das Wasser durch den Fall erhalten sollte, meistens durch allerley Hinderniße fast aufgehoben wird. Dergleichen Hinderniße sind: Ungleichheiten der Ufer und des Bodens, Neigungen der Ufer und des Bodens gegeneinander, Krümmungen des Wasserbettes, abwechselnde Verengerungen und Erweiterungen desselben u. s. w.

Wäre zu befürchten, daß das Wasser bey diesem Verfahren über die Ufer treten möchte, so müsste man die Ufer dagegen verwahren, und erhöhen.

V. Wenn das Wasser also bey einer beständigen Gränze stehen bleibt (III.) so läuft durch den verengerten künstlichen Querschnitt AF, so viel, als vorhin an dieser Stelle durch den natürlichen liefe (301).

VI. Kann man also die Wassermenge durch diesen künstlichen Querschnitt berechnen, so hat man auch die Wassermenge an dieser Stelle durch den natürlichen.

VII. Jene aber, wird man wohl aus 248 finden können. Denn dorten ward eben ein Querschnitt betrachtet, durch den das Wasser so floß, wie seine Geschwindigkeit sich nach der Wasserhöhe richtet, und dieses findet hier deßwegen statt, weil man die Beschleunigung durch den Fall beyseite setzen darf (IV.). Die Vergleichung wird also diese seyn

248 | B | E
hier | B | F

VIII. Die Geschwindigkeiten in B und F verhalten sich in den Zeichen (248) wie die Quadratwurzeln von u; v; der Tiefen der Puncte B; F, unter der Oberfläche des Wassers (247; 248.). Man nenne KF = p; FB = q; so sind diese Tiefen hier, $u = (p+q).\ \mathrm{col}\beta$; $v = p.\ \mathrm{col}\beta$, also wird in (259) das völlige Integral $\frac{2}{3}.\sqrt{}(m.\ \mathrm{col}\beta).\ ((p+q)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}})$.

IX. Dieses giebt, mit $2\sqrt{}g$ multiplicirt, die Wassermenge durch die Linie FB = q in einer Secunde.

X.

X. Und diese Wassermenge mit q dividirt, die mittlere Geschwindigkeit (189) durch den Weg, der mit ihr in einer Secunde zurückgelegt wird.

XI. Die Wassermenge durch FA in einer Secunde, kömmt also heraus, wenn man entweder (IX.) mit der Breite AB; oder (X.) mit der Fläche AF multiplicirt.

XII. Exempel. Es sey $p+q=10$ bononische Fuß, $q=8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$ also $p=\frac{5}{3}$; $\beta=5$ Grad. Meine Rechnung mit Gulielminis seiner (*) zu vergleichen, muß ich sein m aus (168) annehmen, und g in bononischen Fussen ausdrücken; davon der Logarithme (263) steht. So finde ich

$$\log \sqrt{mg} = 0,2561261$$

Ferner $\log p = 0,2218487$

halb $0,1109243$

$$\log p^{\frac{3}{2}} = 0,3327730$$

giebt diese Grösse $= 2,1517$

Eben so $\frac{3}{2}\log(p+q) = 1,5$ giebt die Grösse $(p+q)^{\frac{3}{2}} = 31,622$ also $(p+q)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} = 29,4703$

log

(*) Mens. aqu. §. Appendix; ex. III.

$\log 29,4703 = 1,4693801$
$\log \sqrt{mg} = 0,2561261$
$\log \sqrt{\cos \beta} = 4,9991721 - 5$
$\log \frac{4}{3} = 0,1249387$

$M = 1,8496170$
$\log q = 0,9208188$

$N = 0,9287982$

M ist der Logarithme der Wassermenge (IX.) N der Logarithme der mittlern Geschwindigkeit (X.) Sie beträgt 8,4878 Fuß in einer Secunde, also 509,2680 in einer Minute.

Gulielmini macht sie 462 Fuß 11 $\frac{479742}{6750000}$ Zoll in einer Minute. Dieser Ausdruck kann einen Begriff von G. Art zu rechnen geben, bey der solche Brüche nicht etwa am Ende, sondern überall im Fortgange der Rechnung vorkommen.

Er fängt aber seine Rechnung von einem ganz falschen Satze an, daß sich nähmlich die Quadrate der Geschwindigkeiten in B und F = KB:FB = 10:$\frac{2}{3}$ verhielten, da doch offenbahr die Geschwindigkeit in F durch die Tiefe des Wassers unter ihr nicht bestimmt wird. Es ist ohne Zweifel nur ein Versehen von Gul., daß er dieses Verhältniß KB:KF gebraucht habe, dieß macht indessen seine ganze mühsame Rechnung unrichtig. Der Fehler ist auch eben so in der italiänischen Uebersetzung beybehalten worden (*).

XIII.

(*) Nuova Raccolta Vol. I. p. 400.

XIII. Castelli hat diese Vorrichtung zuerst unter dem Nahmen Regulator vorgeschlagen (*). Beym Gebrauche desselben wird er sich geirrt haben, wenn er die Wassermenge nach seiner unrichtigen Theorie (92) berechnet hat. Gulielmini erkennt diese Erfindung für sehr nützlich, und glaubt mit Castellin, sie würde die Kosten bezahlen, die sie allerdings bey grossen Flüssen erfodert. Er bemerkt auch, daß manchmahl ohne neue Kosten, Gebäude, die schon in Flüssen vorhanden wären, als: Schleusen, Wehre, Brückenjoche u. d. g. statt eines solchen Regulators dienen könnten.

XIV. Man kann am bequemsten zu diesem **Regulator** das **Wassermaaß** rechnen, einen Kasten, in dem man Wasser aus einem Brunnen u. d. g. laufen läßt, es läuft an der andern Seite durch eine Oeffnung wieder heraus, die man vermittelst eines Schiebers nach Gefallen verengern kann. Man richtet diese Oeffnung so ein, daß das Wasser im Kasten beständig auf einer gewissen Höhe stehen bleibt, folglich so viel abläuft, als zufliesst, und so lässt sich finden, wie viel Wasser der Brunnen in einer gewissen Zeit giebt. Leupold hat dergleichen aus dem Bion beschrieben und verbessert (**).

XV. Ich bringe hieher Leonardo Ximenes, intorno agli effetti che fanno nelle piene di un

(*) Della misura dell' acqu. corr. L. II. def. 4. Nuova Raccolta Vol. I.

(**) Theatr. Mach. Gen. §. 469.

Fiume i nuovi ostacoli collocati a traverso il suo fondo; Atti dell' Acad. delle science di Siena, detta de' Fisio Critici. T. VII. Siena 1794; p. 1. Wie ein Fluß aufschwillt, wenn quer über seinem Boden Hindernisse angebracht werden.

Theoretische Untersuchungen über die Höhen der Querschnitte.

303. Aufg. Alles sey wie in 242 des Wassers Höhe von AK bis LI sey KL = h; Im Canale sey AY = c die Höhe des ersten Querschnittes; Man sucht eine Vergleichung zwischen h und c.

Aufl. I. Die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser sich in A und Y nach dem Canale hinunter bewegt, richten sich nach den Wasserhöhen über A, Y, diese Wasserhöhen aber sind h, und $h - c. \cos\beta$; Man kann also das, was (248) vom Querschnitte BE gesagt worden, hier anbringen, denn man darf sich nur vorstellen, daß BE auf AY falle; Also ist

dorten	u	v
hier	h	$h - c. \cos\beta$

und die Wassermenge durch AY verhält sich wie

$$\frac{2}{3}. \frac{(h^{\frac{3}{2}} - (h - c. \cos\beta)^{\frac{3}{2}})}{\cos\beta} \quad (249; 261).$$

II. Wenn aber das Wasser nicht in den schiefen Canal hinabflösse, sondern in einem horizontalen

talen fortflöſſe, deſſen Boden die verlängerte KA wäre, ſo verhielte ſich die Waſſermenge durch h, wie $\frac{2}{3}.h^{\frac{3}{2}}$ (267; das dortige c iſt hier h).

III. Jetzo nun ſoll eben das Waſſer, das im horizontalen Canale fortflöſſe, in dem ſchiefen hinabflieſſen, und da die Breite beyder Canäle bey A einerley iſt, ſo müſſen die Waſſermengen I; II; einerley ſeyn, folglich iſt

$$h^{\frac{3}{2}} = \frac{h^{\frac{3}{2}} - (h - c.\,\mathrm{col}\beta)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{col}\beta}$$

Dieſes giebt $(h - c.\,\mathrm{col}\beta)^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}}.(1 - \mathrm{col}\beta)$ und $h - c.\,\mathrm{col}\beta = h.\,(1 - \mathrm{col}\beta)^{\frac{2}{3}}$) alſo

$$\frac{h.\,(1 - (1 - \mathrm{col}\beta)^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{col}\beta} = c.$$

IV. Wenn man hier nach Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ. $\mathrm{sec}\beta$ ſtatt $\frac{1}{\mathrm{col}\beta}$ ſetzt, ſo kömmt

$$h.\,(\mathrm{sec}\beta - \mathrm{sec}\beta^{\frac{1}{3}}.(\mathrm{sec}\beta - 1)^{\frac{2}{3}}) = c.$$

V. Zur Berechnung möchte vielleicht folgender Ausdruck bequemer ſeyn: weil $1 - \mathrm{col}\beta = 2.\,\mathrm{sin}(\frac{1}{2}\beta)^2$ (Trig. 19. S. 7. Zuſ.) ſo wird

$$h.\,\mathrm{sec}\beta.(1 - \sqrt[3]{(4.(\mathrm{sin}\tfrac{1}{2}\beta)^4)}) = c.$$

VI. Aus III. findet man in I; $\frac{v}{u} = \sqrt[3]{}$

$(1 - \text{col}\beta)^2$ die Quadratwurzel. hievon $\sqrt[3]{}$ $(1 - \text{col}\beta)$; ist der Quotient, der herauskömmt, wenn man des Querschnittes kleinste Geschwindigkeit, die in Y, mit der grössten, der in A; dividirt.

VII. Wenn man zwischen $\text{sec}\beta$ und $\text{sec}\beta - 1$ zwo mittlere Proportionallinien sucht, so ist die erste von ihnen, die am nächsten bey $\text{sec}\beta$ liegt,

$= \sqrt[3]{}(\text{sec}\beta^2 . (\text{sec}\beta - 1))$ (Alg. 505; III.)
diese mit $\text{sec}\beta$ dividirt, giebt

$$\sqrt[3]{\frac{\text{sec}\beta - 1}{\text{sec}\beta}} = \sqrt[3]{}(1 - \text{col}\beta) \text{ (IV).}$$

Die grösste Geschwindigkeit (VI.) verhalte sich also zur kleinsten, wie $\text{sec}\beta$ zur erwähnten ersten Proportionallinie. So druckt Gulielmini den Satz aus (*).

VIII. Weil die Verhältniß h:c allein durch des Canals Neigung gegeben ist (IV.), so bleibt dieselbige ungeändert, wenn z. E. das Wasser über AK durch starken Zufluß höher aufschwölle, die neue h und die neue ihr zugehörige c würden sich eben so wie die vorigen beyden verhalten.

IX. Man ziehe LY, so kann das Wasser zwischen L und Y nicht über dieser Linie seyn, sonst

(*) mens. aqu. ft. L. V. Prop. 5. Schol. 1.

sonst wäre Y nicht die höchste Stelle des ersten Querschnittes. Nun fragt sich, ob seine Oberfläche zwischen diesen beyden Puncten eine gerade oder eine krumme Linie macht. Dieses läßt sich etwa so entscheiden: Man nehme zwischen A und L einen Punct S, und richte dadurch auf AL ein Perpendikel ST auf. Man setze, das Wasser reiche in diesem Perpendikel bis an T; ohne noch zu entscheiden, ob T in LY liegt. Man kann also ST für die Höhe eines Querschnittes annehmen, der in Absicht auf das Wasser, das sich von S nach L zu befindet, der erste wäre, wie AY in Absicht auf dasjenige der erste ist, das sich von A nach L zu befindet. Wenn also SV eine Verticallinie bis an LI ist, so würde man nach eben dem Verfahren, wie in III. die Vergleichung zwischen c und h ist gefunden worden, auch hier die zwischen ST und SV finden, folglich ist

$$h : c = SV : ST$$
$$LA : h = LS : SV$$

(Arithm. V. 51.) $LA : c = LS : ST$

folglich T in der geraden Linie LY.

Folglich macht das Wasser von L bis Y eine geneigte ebene Fläche; welches ich in (242) noch unentschieden ließ.

X. Wenn der Canal horizontal ist, also $\cos\beta = 1$; ist $h = c$ wie so ganz offenbahr ist (264).

XI.

XI. Aber, wenn KAB 20. F. ein rechter Winkel wäre, folglich PA die auf AB senkrecht steht, in die Verlängerung von KA fiele, so wäre für einen solchen senkrechten Canal $\cos\beta = 0$ und also würde in (III.) $\frac{h.0}{0} = 0$ ein Ausdruck, dessen Werth unbestimmt scheint. (Analys. Unendl. 372.). Wollte man den Ausdruck (V) brauchen, so wäre $\sec\beta = \infty$; aber $\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und dieser Ausdruck gabe $h.\infty.0 = c$, wieder etwas, das bald diese, bald jene Grösse bedeuten kann.

XII. Man suche $(1-\cos\beta)^{\frac{2}{3}}$ durch eine Reihe; (Analysis Unendl. 46.). Sie wird $1-\frac{2}{3}.\cos\beta-\frac{1}{9}.\cos\beta^2 \ldots$. Folglich ist in (III) allemahl $h.(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}.\cos\beta\ldots) = c$. Also wird für (XI.); $\frac{2}{3}h = c$.

XIII. Man begreift leicht, daß jetzo K auf A fällt, $AL = h$ eine Verticallinie durch A ist, mit welcher $AY = \frac{2}{3}h$ einen rechten Winkel macht, so daß LY die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks wird; ST wird horizontal auch $= \frac{2}{3}LS$ und so geht das Wasser wieder nach der geraden Linie LY in den senkrechten Canal hinunter.

XIV. Aus (VI) wird hier $\frac{v}{u} = 1$. Man begreift leicht, daß hier v durch AY überall einerley

nerley seyn muß, weil über allen Stellen von AY einerley Wasserhöhe ist.

XV. Machte man also in eines horizontalen Canals Boden ein Loch von der Gestalt eines Rechtecks, dessen eine Seite der Breite des Canals gleich wäre, die andere $\frac{2}{3}$ der Wasserhöhe im Canale betrüge, so würde durch dieses Loch so viel Wasser hinablaufen, als in gleicher Zeit, bey verschlossenem Loche durch den horizontalen Canal fortflösse.

XVI. Wäre die eine Seite des Lochs (XV) nicht so groß, als des Canals Breite, die b heissen mag, sondern hätte nur die Grösse e; so müsste man nur die andere Seite desselben so groß machen, daß doch die Fläche $\frac{2}{3}$h.b bliebe, denn durch jedes horizontale Loch, das eine gleiche Fläche hat, wird eben so viel Wasser fliessen, weil die Geschwindigkeit überall im Loche einerley ist.

Von Bewegung des Wassers in geradausgehenden prismatischen Canälen. Langsd. Lehrb. XIII. C.

304. Aufg. Wenn der Fluß immer einerley Breite behält, und die Höhe irgend eines Schnittes, an einer gegebenen Stelle bekannt ist, die Höhe jedes Schnitts an einer andern gegebenen Stelle zu finden.

Aufl. I. Das völlige Integral (248) muß hier wegen der unveränderlichen Breite, immer

einer-

einerley Grösse behalten. Man setze also $u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}$ = M einer gegebenen Grösse; diese Grösse wird dadurch bekannt werden, daß man in dem Schnitte, dessen Höhe gegeben ist, u und v nach (248) bestimmt. Solchergestalt ist $v = (u^{\frac{3}{2}} - M)^{\frac{2}{3}}$.

II. Die gesuchte Höhe sey des Schnittes BE = y für AB = w, weil seine Stelle gegeben wird, so ist w gegeben, also auch für ihn $u = h + w. \sin\beta$; Folglich wird in (I.) $u - y. \cos\beta = (u^{\frac{3}{2}} - M)^{\frac{2}{3}}$ oder $y = \frac{u - (u^{\frac{3}{2}} - M)^{\frac{2}{3}}.}{\cos\beta}$

III. Nimmt man M zu bestimmen den ersten Schnitt in (303) so wird $M = h^{\frac{3}{2}} - (h - c. \cos\beta)^{\frac{3}{2}}$.

IV. Für einen senkrechten Canal (303; XI.) wäre u = v, und weil solchergestalt y gar aus der Rechnung weggienge, so scheint es, als liesse sich diese Grösse solchergestalt nicht finden.

V. Weil aber allemahl $(u - y. \cos\beta)^{\frac{3}{2}} = u^{\frac{3}{2}} - M$ (II.) so verwandele man den linken Theil der Gleichung in die Reihe $u^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}. u^{\frac{1}{2}} y. \cos\beta$ .... Die folgenden Glieder werden alle höhere Potenzen von $y. \cos\beta$ enthalten.

VI.

VI. Ingleichen wird in (IV.) $(h - c. \operatorname{col} \beta)^{\frac{3}{2}}$ $= h^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} h^{\frac{1}{2}} c. \operatorname{col} \beta$ .... die folgenden Glieder enthalten alle höhere Potenzen von $c. \operatorname{col} \beta$.

VII. Folglich ist in (III.) $M = + \frac{3}{2}. h^{\frac{1}{2}}. c. \operatorname{col} \beta$.... so daß die folgenden Glieder höhere Potenzen von $c. \operatorname{col} \beta$ enthalten.

VIII. Und eben so in (V.)

$u^{\frac{3}{2}} - M = u^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} h^{\frac{1}{2}}. c. \operatorname{col} \beta$ . . . .

IX. Also die Reihen V; VIII. gleich gesetzt, und das erste Glied auf jeder Seite abgezogen

$+ \frac{3}{2}. u^{\frac{1}{2}}. y. \operatorname{col} \beta ..... = + \frac{3}{2}. h^{\frac{1}{2}}. c. \operatorname{col} \beta ....$

X. Das bisherige gilt für jede Neigung des Canals, wie auch dieses: wenn man in (IX.) mit $\operatorname{col} \beta$ dividirt, so kömmt $\frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}}. y ..... =$ $\frac{3}{2} h^{\frac{1}{2}}. c....$ dergestalt, daß in jeder der beyden Reihen, die folgenden Glieder, die hier nicht ausgedruckt werden, immer höhere Potenzen von $\operatorname{col} \beta$ enthalten.

XI. Für den senkrechten Canal also fallen diese Glieder weg, und es ist $u^{\frac{1}{2}} y = h^{\frac{1}{2}} c$ oder $y = c \sqrt{\frac{h}{u}}$ und weil hier $u = h + w$ (II.) so ist $y = c \sqrt{\frac{h}{h + w}}$ wo $c = \frac{2}{3} h$ (303; XII) also

so

so die Gleichung rational gemacht $y^2 = \frac{4}{9}$.

$$\frac{h}{h + w}.$$

XII. Weil Y, G, E, 20 F. in der äusern Fläche des Wassers, und zugleich in einer Verticalfläche durch AB sind (242) und hier AB lothrecht hinabgeht, so macht diese Verticalfläche, im senkrechten Canale die krumme Linie (XII.), deren grösste Ordinate die erste, $\frac{2}{3}$h ist, die folgenden immer abnehmen, so daß für $w = \infty$ die Ordinate verschwindet, und die krumme Linie eine Art von Hyperbel ist, die AB zur Asymptote hat.

XIII. So viel als ich jetzt erzählt habe, müsste man wirklich am Wasser sehen, wenn man es aus einem horizontalen Canale in einen senkrechten hinabstürzen liesse, es versteht sich, daß der letztere nebst dem Boden, in dem sich AB befindet, auch ein paar Seitenwände haben müsste, wie jeder Fluß Ufer hat.

Man nimmt zugleich an, daß das Wasser senkrecht an AB hinabgeht, gleichsam an dieser Verticalfläche sich anhängt; denn wenn kein senkrechter Canal da wäre, so würde man nicht erwarten, daß das Wasser aus dem horizontalen bey A lothrecht hinablaufen sollte; es würde vielmehr alsdenn ein Wasserfall entstehen, da das Wasser aus dem horizontalen Canale durch den Druck des über ihm befindlichen, nach Parabeln

sprützen

sprützen würde, wie ein Körper, den eine horizontale Kraft wirft (83).

XIV. Die Gleichung (XI) blos geometrisch als eine Gleichung für eine krumme Linie betrachtet, giebt $y = \infty$ für $w = -h$; oder, wenn man auf der verlängerten BA über A hinauf eine Länge $= h$, und durch den Punct, der sich solchergestalt gäbe, ein Perpendikel auf BA aufrichtete, so wäre solches eine andere Asymptote dieser krummen Linie.

Und weil dieses Perpendikel auf jeder Seite der Linie AB kann gezogen werden, so gäbe es zweene rechte Winkel dieser Asymptoten, in deren jedem ähnliche und gleiche Theile dieser krummen Linie lägen, denn zu jedem u; gehören zwey gleiche entgegengesetzte y.

305. Durch 304; XII; könnte man zu dem Einfalle veranlasst werden, auch für einen geneigten Canal überhaupt die krumme Linie zu suchen, in der eine Verticalfläche durch AB des Wassers Oberfläche schnitte. Man brauchte hiezu weiter nichts als in 304; II; die Gleichung zwischen u und y rational zu machen, und alsdenn $h + w \cdot \sin\beta$ statt u zu setzen, so hätte man eine Gleichung zwischen AB und BE. Die Rechnung müsste davon angefangen werden, daß $(u - y\cos\beta)^3 = (u^{\frac{3}{2}} - M)^2$: Und weil man, um alles rational zu machen, noch einmahl quadriren müsste, so würde eine Gleichung vom sechsten Grade herauskommen. Diese weitläuf-

tige Rechnung (weiter wäre es nichts) zu unternehmen, reißt uns nicht der geringste Nutzen.

306. Setzt man aber $v = u$, und das kömmt der Wahrheit ziemlich nahe in den (251) angeführten Umständen, oder wegen Hindernisse, die das Wasser am Boden findet, auch wenn die Höhen der Querschnitte sehr geringe sind, so verhält sich die Wassermenge durch y; wie $y \sqrt{u}$; dieses also einer beständigen Grösse $= N$ gleich, und statt u seinen Werth (246) gesetzt, giebt $y^2 (h + w. \sin \beta) = N^2$
Aber für den ersten Querschnitt ist $N = c \sqrt{h}$;
also kömmt $y^2 = \frac{c^2 h}{h + w \sin \beta}$.
Eine Hyperbel von eben der Art wie die (304; XI) nur daß hier die beständigen Grössen anders sind.

Bey ihr verschwindet y für $w = \infty$, und wird unendlich für $w = -\frac{h}{\sin \beta}$, welches ihre beyden Asymptoten giebt.

307. Man sieht leicht, daß unter der (306) im Anfang angenommenen Bedingung eben die Figur entstehen muß, wenn man an ein Gefäß eine Röhre, wie ein Flußbette gebildet, anbringt, und das Wasser durch eine Oeffnung aus dem Gefässe in diese Röhre laufen läßt; auch mag die Oeffnung nicht nur in der Seitenwand, sondern selbst im Boden des Gefässes, horizontal seyn, da doch die Röhre schief angesetzt werden

kann.

kann. Die Figuren, welche alsdenn entstehen betrachtet Grandi (*) nicht nur für gegenwärtigen Fall, sondern auch, wenn die Röhre cylindrisch wäre, oder eine andere gegebene Gestalt, der Boden irgend eine gegebene Krümmung hätte. Das sind meines Erachtens nur geometrische Belustigungen, zur Kenntniß der Natur und zur Ausübung helfen sie nichts. Die nächste Untersuchung scheint doch hier eine Stelle zu verdienen.

Figur des Wassers, das zu einer horizontalen Oeffnung im Boden eines Gefässes frey herausfällt.

308. I. M (25. Fig.) sey ein Punct in dieser Oeffnung, MO eine lothrechte Linie, das Wasser habe über M und über der ganzen Oeffnung, in der sich dieser Punct befindet, die Höhe a; Eine Verticalfläche durch MO, schneide die Oeffnung in MN, in OP aber das Wasser, das sich in einer horizontalen Ebene durch O befindet. Ich nehme an, die Figur, die des herausfallenden Wassers Durchschnitt mit jeder horizontalen Ebene giebt, sey der Oeffnung ähnlich. Die Fläche eines solchen Durchschnitts durch O, heisse S, der Oeffnung ihre D; weil in diesen beyden Figuren die Linien OP, MN, auf ähnliche Art bestimmt werden, eine wie die andere sich zugleich im herabfallenden Wasser, und

(*) del mov. dell' acqu. L. II. c. 3.

in einerley Verticalfläche durch MO befindet, so ist $D:S = MN^2 : OP^2$ (Geom. 42. S. 23. Zus.); Die Wasserhöhen über M, O, sind a, a + MO, und weil durch die Flächen D, S, gleich viel Wasser in gleichen Zeiten gehen muß, wenn die Gestalt, die das herabfallende Wasser macht, beständig bleiben soll (wie in 240.) so ist $S:D = \sqrt{a} : \sqrt{(a + MO)}$. Nennt man also MO $= x$; $MN = c$; $OP = Z$; so ist $Z^2 : c^2 = \sqrt{a} : \sqrt{(a + x)}$ und $Z^4 = \frac{a c^4}{a + x}$.

II. Ist die Oeffnung ein Kreis, so kann man für M seinen Mittelpunct annehmen, c ist alsdenn sein Halbmesser, und die krumme Linie, der die gefundene Gleichung zugehört, um ihre Axe MO gedreht, beschreibt die körperliche Figur des Wassers (*). Gulielmini nennt dieses figuram cadentis.

III. Bey dem senkrechten Canale (303. XI) machte das, was das schiefe Flußbette war, nur senkrecht gestellt, an drey Seiten die Grenzen aus, hier begränzt sich das Wasser ringsherum selbst. So unterscheidet sich dieses herabfallende Wasser vom senkrechten Canale. Daher käme auch in (303; XV.) nicht gegenwärtige Figur heraus. Dorten trat das Wasser im horizontalen Canale nur bis an eine Seite der viereckichten Oeffnung in seinem Boden, und fiel an derselben hinunter, hier, wenn in eines

Se:

(*) Mens. aqu. A. L. V. P. 9.

Gefässes Boden eine viereckichte Oeffnung wäre, müsste das Wasser an jeder ihrer vier Seiten herabfallen.

IV. Wenn Newton die Bewegung des Wassers, das aus einem Gefässe durch eine Oeffnung im Boden ausfliesst, bestimmen will (*), welche theoretische Untersuchung übrigens zu meiner jetzigen Absicht nicht gehört, so nimmt er dabey folgende Vorstellung an: PO (25. Fig.) sey der Halbmesser der Oeffnung; MN der Halbmesser des Gefässes, in einer gewissen Höhe über dem Boden; das Wasser, das durch die Oeffnung ausfliesst, ist alsdenn auf dieser Seite von MO, zwischen MO und einer gewissen krummen Linie NP enthalten, so daß die Figur MNPO um die Axe MO gedreht, das Wasser umschreibt, das durch die Oeffnung hinausfliesst. Newton nennt dieses Cataractam. Manfredi hat erinnert (**), daß dieser Cataracte Gestalt, mit Gulielminis figura cadentis einerley sey, welches auch aus der Gleichung für die Cataracte erhellt (***).

Von der Austheilung des Wassers aus horizontalen Canälen.

309. I. ABDC 26 F. sey der Boden eines horizontalen Canals, über dem sich das Wasser

(*) Princ. Phil. L. II. Prop. 36.
(**) In den Anmerk. über Gul. von der Nat. der Flüsse 1. Cap. 3. Anmerk.
(***) Newt. Princ. cum Comm. le Seur et Iacquier; h. l. not. 272.

auf der Höhe c befinde. In eine Seitenwand des Canals mache man eine Oeffnung in Gestalt eines Rechtecks, desselben eine horizontale Seite sey Pp, zugleich im Boden des Canals, die andere verticale sey = I;

II. Indem also durch dieses Rechteck, dessen Fläche = I. Pp. Wasser an der Seite herausläuft, so kann in die Querschnitte des Canals, die nach der Oeffnung folgen, und unter denen der erste, vertical über pE stünde, nicht soviel Wasser kommen, als wenn die Oeffnung verschlossen ist.

III. Die Wassermenge durch jeden der Querschnitte vor der Oeffnung, verhält sich wie c √ c (267. Man findet in 249; 259; die Factoren, womit diese Grösse müsste multiplicirt werden, die Wassermenge selbst zu geben.) Man setze, die Wassermenge durch die Oeffnung, verhalte sich zur Wassermenge durch einen dieser vorhergehenden Querschnitte = AO : OB, so geht in gleicher Zeit, durch einen der folgenden Querschnitte nur eine Wassermenge, die sich wie OB. c. √ c verhält. Behält also jeder der folgenden Querschnitte, die vorige Breite EP = AB, so muß das Wasser in ihm niedriger seyn, als in den vorhergehenden.

IV. Verschlösse man aber an ihm den Theil der Breite EH = AO, so daß nur PH = BO, bliebe, so würde durch diesen schmälern Querschnitt das Wasser, dessen Menge in eben der

Ver-

Verhältniß kleiner ist, in der er schmäler ist, unter eben der vorigen Höhe = c fortfliessen.

V. Durch dieses Mittel könnte man aus einem horizontalen Canale, durch soviel Oeffnungen man wollte, Wasser austheilen, daß es doch immer im Canale einerley Höhe behielte. Man machte nur nach jeder Oeffnung den Canal schmäler, so daß sich seine Breite vor der Oeffnung, zur verminderten Breite hinter der Oeffnung verhält, wie die Wassermenge, die durch einen Querschnitt vor der Oeffnung fliesst, zu dieser Wassermenge, um das vermindert, was durch die Oeffnung fliesst.

VI. Wenn die Wasserhöhe vermöge des Verfahrens (V.), durch den ganzen Canal immer = c erhalten wird, so ist klar, daß durch eine gegebene Oeffnung, immer gleichviel Wasser fliesst. Wird nun, etwa durch einen stärkern Zufluß im Anfange des Canals, Regen u. d. g. die Wasserhöhe vergrössert und nun = C; so ist klar, daß diese Wasserhöhe vermittelst der angezeigten Vorrichtung auch durch den ganzen Canal gleich erhalten wird, daß also jetzt durch den gegebenen Querschnitt mehr Wasser ausfliesst, als zuvor bey der geringern Wasserhöhe, aber immer gleichviel, so lange die Wasserhöhe = C bleibt. Eben so was gilt auch, wenn die Wasserhöhe im Canale abnimmt, nur daß alsdenn durch die gegebene Oeffnung weniger fliesst, als zuvor.

VII. Die Oeffnung (I.) sey eine Spalte, deren Länge die ganze Seitenwand hinaufgeht; ihre Breite Pp = p; so verhält sich die Wassermenge durch sie wie p. $c^{\frac{3}{2}}$ (193. I.). Wäre also weiter hin im Canale, bey Q, eine andere solche Spalte, deren Breite = q; so verhalten sich die Wassermengen = p:q wenn an beyden Spalten das Wasser gleich hoch steht, die Wasserhöhe c mag seyn was sie will. Also verhalten sich die Wassermengen durch beyde Spalten allemahl wie die Breiten, die Wasserhöhe mag wachsen oder abnehmen, nur (V.) beobachtet.

310. Aufg. An dem horizontalen Canale (26. F.) befinden sich bey P, Q, R, Anwohner, denen aus dem Canale Wasser soll zugetheilt werden, die Wassermengen, die jeder bekommen soll, sollen zu der, welche durch den Canal flösse, wenn kein Wasser abgeleitet würde, gegebene Verhältnisse haben.

Aufl. I. Die ganze Wassermenge verhalte sich zu dem, was der bey P bekommen soll = f : p; und so zu dem, was die bey Q, R, bekommen sollen = f:q und f:r; so verhalten sich die Wassermengen, welche diese dreye bekommen, unter sich wie p : q : r.

II. Man mache im Canale, an einem Orte, der hinter allen den Stellen liegt, wo Wasser abgeleitet werde, statt des Querschnitts CD, der = AB wäre, einen engern, so daß man CG : CD = p + q + r : f nimmt, und CG verschliesst.

schliesst. Machte man weiter nichts an dem Canale, so würde anfangs durch den schmälern Querschnitt DG nicht so viel Wasser abfliessen, als durch den breitern zuflösse; das Wasser würde also vor GD aufschwellen, und sich durchgehends bis an eine höhere Horizontalfläche erheben (264), bis vermöge dieser grössern Wasserhöhe durch den engern Querschnitt noch (193. I.) eben so viel Wasser gienge, als vorhin durch den weitern.

III. Nun mache man aber in die Seitenwand des Canals bey P, Q, R, Spalten, deren Breiten sich zur Breite AB wie p; q; r; zu f verhalten, so wird das Wasser durch diese Spalten mit gleicher Geschwindigkeit durch eine wie durch die andere hinaustreten, und weil es an allen diesen Spalten gleich hoch steht, und wenn sich seine Oberfläche senkt, wird sie sich bey allen Spalten gleich viel senken, also werden sich die Wassermengen durch diese Spalten, zu der durch AB wie p; q; r; zu f verhalten.

IV. Man begreift, daß statt der drey zum Exempel gebrauchten Stellen, so viel man wollte, seyn möchten, daß auch einige in BD andere in AC seyn dürften.

V. Exempel. Wenn man das Wasser eines Canals = 90 setzt, soll Titius davon 1 Theil bekommen, Sempron 3; Mävius 5; Cajus 7; Lucius 8; Annius 6; das macht zusammen 30 Theile, so bleiben noch 60 übrig, die fortfliessen sollen. Man mache also CG: GD

= 30 : 90 daß GD : CD = 60 : 90; und die Breite AB in 90 Theile getheilt, gebe man den Spalten die Breite 1; 3; 5; 7; 8; 6; so wird jeder die ihm bestimmte Wassermenge bekommen.

VI. Weil das Reiben in schmahlen Spalten beträchtlicher ist als in breiten (217) so schlägt Gulielmini (*) nach dem Castelli vor, alle gleich breit zu machen, und durch ihre Zahlen die Wassermenge in der gehörigen Verhältniß zu liefern, z. E. dem Mävius 5; dem Cajus 7 Spalten zu geben. Es ist auch klar, daß man statt dieser gleich breiten Spalten, andere gleich grosse Oeffnungen brauchen kann, nur daß bey einerley Wasserhöhe durch eine dieser Oeffnungen so viel gieng als durch die andere, wären es z. E. gleiche Quadrate, so müssten ihre untersten horizontalen Seiten alle in einer Horizontallinie seyn.

VII. Auf eine ähnliche Art läßt sich das Wasser aus einem Teiche, Wasserbehälter u. d. g. unter die Anwohner abtheilen, wo man die Verschliessung CG nicht einmahl nöthig hat, weil das Wasser da ohnedem nicht abläuft.

VIII. Damit an den Oeffnungen P, Q, u. s. w. das Wasser nicht etwa auf einer schiefen Fläche hinausläuft, und so anders hinausgeht, als es sollte, schlägt Gul. vor, horizontale Canäle daselbst anzubringen. Sie würden aber müssen genau horizontal seyn, und ihre Länge müsste mit AB rechte Winkel machen. Ein geneigter

(*) Mens. aqu. A. L. V. Prop. 3. Schol. 1.

neigter Canal, einer der in die Seitenwand schief eingesetzt wäre, einer der sich etwa von der Oeffnung hinunterwärts krümmte, und tiefer ausgösse, würde alle auf andere Art Wasser ableiten. Unterschiedene Fälle hievon betrachtet Fontana (*), und man kann diese Unterschiede schon aus Polenis auch hierinne lehrreichen Versuchen (148) abnehmen.

IX. Allemahl aber jedem eine gewisse Menge Wasser, die man durch Zolle auszudrücken pflegt, zu verschaffen, ist wohl nicht anders möglich, als wenn man das Wasser im Canale oder Teiche zu allen Zeiten auf einer Höhe erhalten kann, und das scheint nicht leicht thunlich.

X. Liessen sich Mittel angeben, daß sich in einem schiefen Canale, des Ablaufs durch Seitenöffnungen ungeachtet, das Wasser immer dem Boden parallel stellte, so könnte man diese Art des Wassers einzutheilen, auch bey schiefen Canälen bewerkstelligen. Aber Jul. weiß keine bequeme Mittel hiezu anzugeben.

XI. Die Beschaffenheit der römischen Wasserleitungen, die damaligen Arten, das Wasser auszutheilen, und was dazu gehört, lehret umständlich Frontinus in einer Schrift, von der Poleni eine vortreffliche Ausgabe besorgt hat (**).

Man

(*) Carlo Fontana dell' acque correnti (Rom 1696. fol.) L. I. c. 31; 32.

(**) Sex Iul. Frontini de aquae ductibus vrbis Romae Commentarius; antiquae fidei restitutus atque explicatus opera et studio Ioann. Poleni, Patau. 1722.

Man findet auch daselbst, was in den römischen Rechten die Wasserleitungen betrifft. Da die Gesetze der Bewegung des Wassers damahls gänzlich unbekannt waren (92), so darf man bey den Alten in dem Theile, der hierauf beruht, nichts zuverlässiges suchen. Buteons (146) angeführtes Werk gehört auch hieher.

Wie sich die Geschwindigkeit eines Flusses mit seiner Richtung ändert.

311. Wenn die Richtung der Ufer eines Flusses sich plötzlich ändert, so daß das folgende Ufer mit dem vorhergehenden einen beträchtlichen Winkel macht, so wird man sich vorstellen können, das Wasser ändere da seine Geschwindigkeit so, wie ein Körper sie ändert, der aus einem ersten Wege sich plötzlich in einen zweyten Weg lenkt. Man zerlegt zu dieser Absicht, die Geschwindigkeit, wie ihre Richtung dem ersten Wege parallel ist, in zweene Theile, davon der eine auf den zweyten Weg senkrecht, der andere selbigem parallel ist; Jener Theil wird völlig aufgehoben, dieser bleibt für die Geschwindigkeit des Körpers in dem zweyten Wege. Aus Höh. Mech. II. Abschn. 8. Zus. wird man sehen, wie man sich zu verhalten hat, wenn nur die μM; Mm, in der dortigen 15. Fig. nicht Elemente einer krummen Linie sind, sondern Linien, die einen beträchtlichen Winkel gegen einander machen. Machte aber das Ufer eine zusammenhän-

hängende Krümmung, wie wenn die krumme Linie BMA in dortiger Figur wäre, so würde die Geschwindigkeit sich nicht ändern (Hyh. Mech. a. a. O.). Solche Sätze führt Guido Grandi umständlicher aus (*). Mir scheint es nicht verstattet, Lehren, die einen einzigen Körper zum voraussetzen, auf das Wasser anzuwenden, wo so unzähliche Theilchen auf so mancherley Arten in einander wirken.

Von vereinigten Flüssen.

312. Die Rechnungen 248. u. f. können auch angewandt werden bey Flüssen, da einer in den andern fällt, die Folge davon zu bestimmen, wenn man gewisse Voraussetzungen dabey annimmt. Ein Exempel ist nachstehendes: (**)

Ein Fluß, der für horizontal angenommen wird, ist 760 F. breit. Die Geschwindigkeit auf seiner Oberfläche gehöre der Höhe 1 F.; er sey 30 F. tief, also gehört die Geschwindigkeit an seinem Boden der Höhe 31 F. In ihn soll ein anderer Fluß treten, der 139 Fuß breit ist, die Geschwindigkeit auf seiner Oberfläche gehört der Höhe von 8 Zollen, und er ist 11 F. tief, also gehört die Geschwindigkeit am Boden der Höhe von 11 F. 8 Z.

Nach der Vereinigung läuft also durch einen Querschnitt des ersten Flusses so viel Wasser, als zuvor

(*) del movim. dell' acqu. Cap. II.
(**) Guid. Grandi Prop. 37. esemp. 1.

zuvor durch die beyden einzelnen Querschnitte lief. Man setze, die Oberfläche des ersten, soll nach der Vereinigung eben die Geschwindigkeit behalten, die sie zuvor hatte, wie hoch muß also das Wasser in ihm anwachsen?

Des zweyten Flusses Breite heisse b, für ihn haben u; v; die bekannten Bedeutungen, und für den ersten Fluß bedeuten B, U; V; eben das, vor der Vereinigung. Nach der Vereinigung bleiben also R; U; aber statt V kömmt eine andere Grösse Z, wenn man diese gefunden hat, so ist die gesuchte Höhe des Querschnittes $= Z - U$.

Man hat also folgende Gleichung

$$R.(V^{\frac{3}{2}} - U^{\frac{3}{2}}) + b.(v^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}) = R.(Z^{\frac{3}{2}} - U^{\frac{3}{2}})$$

daraus findet sich

$$Z^{\frac{3}{2}} = V^{\frac{3}{2}} - + \frac{b}{B}.(v^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}).$$

Im Exempel wären $u = \frac{2}{3}$ $v = 11$; $b = 139$; $U = 1$; $V = 31$; $B = 760$. Die Rechnung ist mit den Logarithmen eben nicht weitläuftig; durch die paraboliſche Tafel (195) wird sie noch verkürzt. Man findet Z etwas über 31 F. 10 Zoll, und wenn man aus Grandis Tafel Proportionalzahlen nimmt, noch $\frac{1}{3}$ Zoll. Also ist des Querschnittes Höhe nach der Vereinigung 30 F. 20 Z. um 20 Zoll grösser als zuvor.

Man sieht aus diesem Beyspiele leicht, wie die Rechnung geführt würde, wenn man andere

Dinge

Dinge zum voraussetzte, z. E. daß sich U in eine andere Grösse verwandelte.

Eigentlich hätte man sollen u = o = U setzen (265), welches auch Grandi erinnert. Die Rechnung wäre alsdenn noch kürzer geworden.

313. I. Die Fläche vom Querschnitte eines Flusses heisse S; und ihre mittlere Geschwindigkeit (251) C; für einen andern Fluß bedeuten f; c; eben das; so ist $\frac{S.C+f.c}{S+f}$ eine mittlere Geschwindigkeit, vermöge der durch einen einzigen Querschnitt, der = S + f wäre, so viel Wasser flösse, als mit jenen beyden Geschwindigkeiten durch jene beyden Querschnitte fliesst. Man könnte dieses die aequirte Geschwindigkeit nennen, (velocita ragguagliata) (*).

II. Der Fluß h; fällt in den Fluß H; vor der Vereinigung hatte h, den Querschnitt f; die mittlere Geschwindigkeit c; H; für eben diese Grössen, S; C; so fliesst durch einen Querschnitt von H nach der Vereinigung die Wassermenge S.C + f.c in eben der Zeit, in welcher S.C.f.c durch die einzeln Querschnitte floß, wenn H von da an, wo er h in sich genommen hat, in ungeändertem Zustande bleibt (240).

III. Heisst also O der Querschnitt von H nach der Vereinigung, so ist die mittlere Geschwin-

(*) Guid. Grandi Prop. 21.

schwindigkeit alsdenn $\frac{S.C + s.c}{O}$; sie verhält sich zur äquirten (313) wie $S + s : O$.

III. Da nun die Erfahrung lehrt, daß allemahl $S + s > O$ (*), so ist die mittlere Geschwindigkeit (II.) allemahl grösser, als die äquirte.

Die Lehre von Zusammensetzung der Bewegung auf Flüsse anzuwenden.

314. Wenn ein paar Flüsse in gegebenen Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten zusammenstossen, so kann man wohl das Wasser in der Stelle, wo sie sich vereinigen, als einen Körper ansehen, der von zwo Kräften getrieben wird, die Richtungen der Kräfte sind die Richtungen der zusammenstossenden Flüsse, und die Kräfte werden sich wie die Geschwindigkeiten verhalten, (Höh. Mech. I. Abschn. 160.) weil jeder Fluß sein Wasser, nach seiner Richtung mit seiner Geschwindigkeit fortführt. Man würde also die Richtung und die Geschwindigkeit des Wassers nach der Vereinigung vermöge Stat. (60) bestimmen.

Ich finde hiebey eben solche Erinnerungen beträchtlich, wie in (311). Man müsste eigentlich in jedem Flusse jede Stelle seines Querschnittes von oben herab gerechnet, besonders mit einer solchen Stelle im andern vergleichen (241) und

(*) Guid. Grandi Prop. 23. Cor.

und wenn man auch durch den ganzen Querschnitt die Geschwindigkeit gleich annehmen wollte, würde doch selbst die Lage und Beschaffenheit der Ufer vieles in den Folgen ändern. Es kömmt mir daher nicht vor, als ob Lehrsätze hievon in Menge beyzubringen einen grossen praktischen Nutzen haben könnte, auch kann jeder dergleichen leicht nach der gegebenen Anleitung finden. Grandi ist hierin ziemlich weitläuftig (*). Nur eine Folge, die gleich zu übersehen ist, beyzubringen, so ist vermöge der Zusammensetzung der Bewegung, die Geschwindigkeit des Wassers nach der Vereinigung geringer, als die Summe der Geschwindigkeiten vor der Vereinigung.

Die Arve aus Savoyen fällt bey Genf in den Rhonefluß. Von schmelzendem Schnee schwillt sie so an, daß sie den Rhonefluß gegen den Genfer See zurücktreibt. Das ist 1572 geschehen, die Genfer Mühlräder sind einige Stunden lang, ihrem gewöhnlichen Gange entgegen umgegangen.

So wäre im Rhoneflusse bey der Vereinigung mit der Arve negative Geschwindigkeit entstanden. Blosse Zusammensetzung der Kräfte an einem Puncte, erklärt das nicht.

Ich fand diese Nachricht beym Blättern in einer Dissertatione historica de Molis, die unter Joh. Phil. Treuers Präsidio von Joh. Tob. Mühl-

(*) del mov. dell'acqu. Pr. 26...39.

Mühlberger aus Regenspurg ist vertheidigt worden, Jena 1695. Ganz am Ende 26 Seite. Es wird da der Autor der Abenteuer der Natur und künstlichen Sachen, in Sina und Europa, als Gewährsmann angeführt. Daß ich keinen wichtigern Gewährsmann für eine Erzählung aufsuche, die ich hie nur als einen sehr entbehrlichen Zusatz beybringe, erhalte ich wohl leicht Verzeihung.

315. Vom Po, und Ableitungen aus ihm aus Paul Frisi Berigt nopens de Verdeeling en Zamenloop der rivieren. Verhandelingen der Hollandschen Matschappye der Wetenschapen te Harlem 14 Deel 1773; 112 u. f. S.

I. Aus dem Venetianischen Arme des Po, Fornaci genannt, wird ein anderer Arm, Ariani genaunt, abgeleitet. Vor der Scheidung dieser Arme, ist der Querschnitt des Po 12070 Bononische Quadratfuß. Darnach wird des Fornaci Querschnitt = 12330½; und des Ariani 2365; wie Riviera, der alles untersucht hat, berichtet. Vor der Scheidung ist die Breite in dem gemeinen Busen 35 Fuß kleiner, und die Höhe nur 2 Zoll grösser, als sie nachdem, in dem andern Arme, Fornaci, gefunden wird. So giebt der Arm Ariani nur ein Sechstheil von vorgenanntem Arme (den vornaamen tak) da inzwischen in dem andern Arme die Breite grösser und der Durchschnitt weiter ist, und die Höhe indessen nur 2 Zoll abnimmt. Das steht a. a. O. 124. S.

II.

II. In diesen Angaben ist mir einiges dunkel, das ich so zu erläutern suche.

Querschnitt des	Höhen	Breiten
Po = P = 12070	a	b
Forn. = F = 12330,5	a + m	b + m
Arian = A = 2365,		

III. Die Einheit = 1 Fuß gesetzt, ist m = $-\frac{1}{6}$ n = + 35. Aber a, b, weiß ich nicht. Die suche ich.

IV. Also a. b = P; $a = \frac{P}{b}$

V. (a + m). (b + n) = F also

ab + mb + an + mn = F oder

$P + mb + \frac{nP}{b} + mn = F$; $Pb + mb^2 +$

$nP + mnb = Fb$; $mb^2 = (F - P - mn).\ b - nP$

$$b^2 = \frac{F-P-mn}{m} b - \frac{n}{m} P$$

$$b = \frac{F-P-mn}{2m} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{F-P-mn}{2m}\right)^2 - \frac{nP}{m}\right)}$$

VI. In den Zahlen ist; $mn = -\frac{35}{6}$ also

$$-m.n = +5,83333\ldots$$
$$F = 12330,5$$
$$F-m.n = +12336,33333\ldots$$
$$-P = -12070,$$
$$F-P-mn = +266,33333; \text{ Nun } 2m = -\frac{1}{3}$$
$$\frac{F-P-mn}{2m} = -798,99999 = -799,$$

VII. $\frac{P}{m} = -6.P = -72420$; Also $-\frac{nP}{m} = +35.72420$. Folglich die Wurzelgrösse $= -799. \pm \sqrt{\left(1+\frac{35.72420}{799^2}\right)}$

$\log 799 = 2,9025468$
$2\log 799 = 5,8050936$

$\log 72420 = 4,8598585$
$\log 35 = 1,5440680$

$6,4039265$
abgezogen $5,8050936$

$0,5988329$

der Logarithme giebt $\frac{35.72420}{799^2} = 3,9754$

Also die Grösse unter dem Wurzelzeichen 4,9754.

VIII. Nun ist log 4,9754 = 0,6968280
halb = 0,3484140
log 799 = 2,9025468

log der Wurzelgröſſe = 3,2509608

Die Wurzelgröſſe bejaht = 1782,2
Dazu (VI) — 799

b = 983,2

IX. log P = 4,0817073
log b = 2,9926419

log a = 1,0890654 (III)
a = 12,276

X. Alſo iſt für den

Po	Höhe	12,276	Breite	983,2
	—	0,166	+	35
Fornaci		12,110		1018,2

XI. Zu einer Probe

log 1018,2 = 3,0078331
log 12,110 = 1,0831441

Summe = 4,0909772
log 12330 = 4,0909631

352)1410(4

Alſo giebt die Summe der Logarithmen; 1018,2. 12,12,110 = 12330,4; Und des Fornaci Querſchnitt iſt = 12330,5 (I), welches über die Erwartung übereinſtimmt.

XII. Daß der Ariani nur $\frac{1}{6}$ giebt, erläutere ich so: die Menaen Wasser, die in gleicher Zeit, durch die Querschnitte des Po und des Ariani fliessen, verhalten sich wie diese Querschnitte, wofern Alles gleichförmig fortfliesst, und keiner dieser Flüsse aufschwillt oder abnimmt.

Man dividire also den Querschnitt des Po, mit des Ariani seinem.

log 12070 = 4,0817073
log 2365 = 3,3738311

0,7078762

gehört zu 5,103. Des Ariani Querschnitt ist also in des Po seinem etwas über fünfmahl enthalten, und gäbe also etwas mehr als den fünften Theil Wasser. Dafür wird F. den sechsten gesetzt haben.

XIII. Wäre etwa Fr. Meynung, den Ariani mit dem Fornaci zu vergleichen:

log 12330,5 = 4,0909807
3,3738311

0,7171496

gehört zu 5,213. Also ist auch des Fornaci Querschnitt nur etwas über fünfmahl gröſſer als des Ariani seiner.

XIV. Allein die Voraussetzung im Anfange von (XII) gäbe hie was ungereimtes. Denn schon F > P (II) noch vielmehr F + A, und durch

durch F und A kann doch in gleicher Zeit nicht mehr Wasser fliessen als durch P.

XV. Nähmlich durch F und A fliesst das Wasser langsamer als durch P. Die Wege, die es in einer gegebenen Zeit zurücklegt, seyn e durch P; f durch F; g durch A; so sind die Wassermengen in dieser Zeit P. e = F. f + A. g

XVI. Nun giebt aber Frisius e, f, g, nicht an; allenfalls liessen sich e und f vergleichen etwa nach Hydrodyn. 241 u. f., da man hie die Höhen von P und F weiß (X). Aber von A ist die Höhe nicht angegeben.

XVII. Indessen ist nach (XII) $\frac{A}{P} < \frac{1}{5}$ fliesst also wie natürlich das Wasser durch A langsamer als durch P (F. sagt so was selbst) so ist $g < e$ also $\frac{A.g}{P.e} < \frac{A}{P} < \frac{1}{5}$ und so wird zu erklären seyn, daß A den sechsten Theil der Wassermenge von P giebt (XII).

XVIII. Ueber Schlünde oder Mündungen der Flüsse (foci o ſbocchi) findet sich ein Aufsatz des Co. Simone Stratico in Saggi ſcientifici e letterarii dell' Accademia di Padova. T. III. P. I. (1794) 303 S. Er betrachtet dreyerley: Flüsse fallen ins Meer oder einen grossen See,

und machen damit eine einzige flüssige Masse aus. Flüsse stürzen aus einem Canale herab, und trennen so ihre eigene Masse und Fläche, von Masse und Fläche, die sie aufnimmt. Ein Fluß fliesst in den andern. Des Aufsatzes zweyter Theil in Saggi . . . P. II. p. 114.

Zweyter

Zweyter Abschnitt;
vom Stosse des Wassers, mit Anwendung dieser Lehre auf unterschlächtige Wasserräder. Auch von oberschlächtigen.

316. I. ABDC 26. F. bedeute eine Menge Wasser, die von B nach D zufliesse; so daß in AB statt des fortgeflossenen, immer anders kömmt, wie wenn diese Figur ein Theil eines Flusses ist. CD sey eine Hinderniß, die des Wassers Laufe senkrecht entgegengesetzt; das Wasser wird daran stossen; und es scheint, als könnte man sich von diesem Stosse leicht einen Begriff machen, wenn man sich etwa durch Linien mit CD parallel wie KP; Ep; das Wasser, so zu reden, in Querstreifen KPpE getheilt vorstellte, die man selbst unendlich schmahl, und für Elemente des Wassers annehmen könnte. Jeder solche Streifen stiesse für sich an, wie ein fester Körper anstösst, und der Stoß des ganzen Wassers wäre die Summe aller dieser einzeln Stösse.

II. Hiebey entsteht aber natürlich die Frage: Was geht mit jedem solchen Elemente vor, nachdem es seinen Stoß verrichtet hat? Würde es plötzlich vernichtet, oder auf die Seite geschafft, ehe das nächstfolgende in seine Stelle kömmt, so wäre bey dem Schlusse (I.) keine Bedenklich-

keit. Folgt ihm aber, wie man leicht sieht, daß geschehen muß, in dem Augenblicke, in dem es seinen Stoß gethan hat, ein zweytes nach, und sucht in die Stelle zu kommen, die jenes noch einnimmt, allenfalls nun erst zu verlassen anfängt, indem es etwa nach den Seiten abfliesst, so wird hiedurch des zweyten Stoß nothwendig geändert werden.

III. Weil sich nun von dieser Aenderung, von dem Wege, den das Wasser nimmt, schwerlich etwas deutliches und zuverlässiges sagen lässt, so setze man dieselben jetzo beyseite, und sich nur einigen Begriff von dem Stosse des Wassers zu machen, nehme man (I.) an,

317. I. Man stelle sich also die Länge AC in m gleiche Theile, wenn man will unendlich kleine, getheilt vor. Ein solcher Theil, wie KE, sey = e; die ganze Länge = m. c. Die Geschwindigkeit des Wassers heisse c. das bedeute z. E.: den Weg, der mit dieser Geschwindigkeit in einer Secunde zurückgelegt wird. Wenn KP = f; so ist ein Querstreifen wie PE; = e. f und die Grösse seiner Bewegung e. f. c (Höh. Mech. III. Abschn, 103.), die man für die Stärke des Stosses annehmen kann. Diese Bewegung nähmlich wird durch die Linie CD, die unbeweglich bleibt, vernichtet, und also muß CD diesen Stoß aushalten,

II. Wenn nun das Wasser mit der Geschwindigkeit c; in der Zeit t von B nach D kömmt,

oder

oder den Weg BD zurücklegt, so hat die Linie CD in dieser Zeit von m Elementen, Stösse bekommen, jeden = e. f. c; also ist die Summe dieser Stösse = m. e. f. c = BD. f. c Oder: die Summe der Stösse, welche eine gegebene Linie = f in der Zeit t bekömmt, verhält sich wie der Weg, den das Wasser in dieser Zeit zurücklegt, mit der Geschwindigkeit multiplicirt.

III. Wäre des Wassers Geschwindigkeit noch einmahl so groß als vorhin = 2. c, so legte es in der gleichen Zeit t; einen Weg = 2. BD zurück; und statt Bd, c; in (II.) nun 2Bd, 2c; gesetzt, wäre die Summe der Stösse = 2BD. 2. cf = 4. Bd. c. f; viermahl so groß als die in (II.). Die Sache ist daraus begreiflich, daß in gleicher Zeit noch einmahl so viel Elemente als vorhin, und jedes noch einmahl so stark, anstiesse, also geben zweymahl so viel doppelte Stösse, ohne Zweifel viermahl so viel, als die einfache Menge einfacher Stösse.

IV. Ueberhaupt habe das Wasser nun die Geschwindigkeit n. c; so stösst jetzo jedes Element mit dieser Geschwindigkeit an; und eine Linie = n. BD, enthält n mahl so viel Elemente, als BD in (II.). Von diesen n Elementen durchläuft das äuserste seine Entfernung von CD; nähmlich n. BD in eben der Zeit, in welcher in (II.), das äuserste bey AB, seine Entfernung BD durchläuft; also stossen jetzo n. m und vorhin m Elemente, in gleicher Zeit an; oder jetzt n mahl mehr als vorhin, aber auch jedes der jetzigen

ßigen n mahl stärker als jedes der vorigen, also ist die Summe der jeßigen Stösse ohne Zweifel n. n mahl grösser als die Summe der vorigen, oder wenn sich die Geschwindigkeiten = n : 1 verhalten, so verhalten sich die Summen der Stösse = n^2 : 1.

V. Man begreift, daß diese Verhältniß bleibt, wenn auch z. E. CD die Grundlinie eines Rechtecks wäre, auf welches ein Wasserstrom senkrecht stiesse, dessen horizontaler Durchschnitt ABDC wäre.

318. In dieser Bedeutung also, sagt man: der senkrechte Stoß des Wassers auf eine gegebene Fläche, verhalte sich wie das Quadrat seiner Geschwindigkeit, oder: wenn zweene Wasserströme, auf gleiche Flächen, senkrecht, aber mit ungleichen Geschwindigkeiten anstossen, so verhalten sich ihre Stösse, wie sich die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten verhalten. Das ist die 277 angenommene Vorausseßung.

319. In des Abbe Aubert journal des beaux arts et des Sciences Novembre 1768. 215. u. f. S. findet sich ein Brief des Hrn. Pauton zu Bagneux, von dem man auch eine Theorie de la vis d' Archimede hat (das Journal redet im Junius davon). Dieser Brief betrifft den Stoß des Wassers oder überhaupt flüssiger Materien. Herr P. glaubt, die Kräfte zwoer Columnen eines flüssigen Wesens, die beyde gleiche Grundflächen haben, verhalten sich wie ihre Geschwindig-

digkeiten. Denn, sagt er, man kann zwo solche Columnen als vollkommen ähnlich ansehen, und weil sich die Wirkungen wie die Ursachen verhalten, so verhalten sich die Ursachen, die solchen Columnen gleiche Geschwindigkeiten geben, wie die Geschwindigkeiten, und da sich die Wirkung der flüssigen Materie auf einen fremden Körper, (der Stoß) auch wie die Wirkung der ersten Ursache verhalten muß, die der flüssigen Materie diese Geschwindigkeit gab, so muß dieser Stoß sich auch wie die Geschwindigkeiten verhalten.

Es ist eine Kleinigkeit, daß Herr P. hier ähnliche Columnen statt gleicher nennt, in Wissenschaften aber, wo bestimmte Begriffe ihre bestimmten Wörter haben, erregt diese Unachtsamkeit einen Argwohn, daß man diese Begriffe nicht bestimmt genug gedacht habe. Ein Wasserprisma, dessen Grundfläche ein Quadratfuß, die Länge ein Fuß ist, mit der doppelten Geschwindigkeit zu bewegen, gehöre noch einmahl so viel Kraft, als es mit der einfachen zu bewegen. Wir wollen dieses annehmen, was folgt hieraus, für den Stoß des Wassers auf einer Fläche von einem Quadratfusse? Dieses: daß bey der doppelten Geschwindigkeit zwey solche Prismata, jedes mit doppelter Geschwindigkeit anstosse, indem mit der einfachen nur eines anstößt. Und deßwegen sieht man jenen Stoß als vierfach vor diesem an.

Aber, sagt dagegen Hr. P., diese zwey Prismata haben zusammen nur so viel Zeit zum Stos-

se

se, als das einfache, jedes hat für sich nur die halbe Zeit, und wenn man solche Prismata durch Querschnitte, die auf ihre Längen senkrecht stehen, in gleich dicke Schichten theilt, jede etwa so dick, als man sich des Wassers Elementartheilchen vorstellen will, so stossen in gleicher Zeit, eine Schicht mit der einfachen, zwo mit der doppelten an. Jede dieser zwo hat nun nur halb so viel Zeit zu wirken, als die vorige einzelne; in der halben Zeit, thut sie mit ihrer doppelten Geschwindigkeit so viel, als die gleiche Schicht mit der einfachen Geschwindigkeit in der ganzen; und so thun zwo Schichten in zwo halben Zeiten nur noch einmahl so viel als eine einzige Schicht in einer ganzen Zeit.

So hat ohngefähr Herr P. gedacht, und gründet sich also darauf, daß hier die Geschwindigkeiten als wirkende Ursachen angesehen werden, da die doppelte in der halben Zeit so viel thut, als die einfache in der ganzen. Mich deucht aber, für gegenwärtige Untersuchung muß man die Sache so betrachten: Die Fläche, welche den Stoß einer Schicht auffängt, muß dieser Schicht alle ihre Geschwindigkeit benehmen, und eben, was die Fläche hiedurch leidet, oder was für eine Kraft nöthig ist, die Fläche zu halten, daß sie dieses leisten kann, das nennt man den Stoß. Also benimmt diese Fläche, einmahl einer Schicht, die einfache Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit; zweytens einer gleichen Schicht, die doppelte Geschwindigkeit in der

halben

halben Zeit; heisst denn das letztere noch einmahl so viel ausrichten als das erstere? Ich dächte, man könnte so schliessen.

I) Die Schicht X. habe die einfache Geschwindigkeit und verliere sich in der Zeit T;

II) Die Schicht Y verliere die doppelte in $\frac{1}{2}$ T.

III) Eine dritte Z verliere die doppelte in T.

So ist doch folgendes offenbahr: wenn die Fläche das, was bey III. angezeigt ist, leistet, so thut sie noch einmahl so viel, als wenn sie I. leistet, oder der Stoß in III. ist noch einmahl so stark als in I.

Wenn die Fläche II. leistet, so thut sie noch einmahl so viel, als wenn sie III. leistet, denn sie thut gleiches in der halben Zeit. Der Stoß ist also in II. noch einmahl so stark als in III. Und folglich viermahl so stark als in I.

Die Betrachtung der Zeiten ist solchergestalt dem gemeinen Satze nicht zuwider. Wenn in einer gewissen Zeit, eine gewisse Menge Schichten, die einfache Geschwindigkeit verlieren, so verlieren in halb so viel Zeit eben so viel Schichten die doppelte, und das letzte auszurichten, ist viermahl so viel Kraft nöthig, als das erste.

Hr. P. giebt noch ein Exempel von ein paar gleichen Pumpen, aus dem ich nur so viel verstehe, daß die einfache Kraft in der einen eine gewisse Menge Wasser in der einfachen Zeit, die doppelte in der andern eben so viel Wasser in der halben Zeit, oder noch einmahl so viel in

der

der ganzen Heben kann, und das wiederspricht wohl dem angeführten Satze nicht.

Diese ganz neue Einwendung von jemanden, der sich unternommen, die Theorie der Wasserschraube zu geben, und der also seinen Einsichten etwas zutrauen muß, schien mir hier eine Stelle zu verdienen, weil sie eine fernere Aufklärung dieser Sache veranlasste.

320. I. Nimmt man diesen Satz (318) indessen als eine Hypothese an, so würde er sich mit Versuchen etwa so prüfen lassen. Man müsste eine gegebene Fläche, die ich K nennen will, senkrecht einem Wasserstrome entgegen stellen, dessen Geschwindigkeit bekannt, $= c$ wäre. Sie gegen den Stoß dieses Stromes zu erhalten, daß sie davon nicht fortgetrieben würde, wäre ein gewisses Gewicht $= p$ nöthig. Setzte man alsdenn eben diese Fläche gleichfalls senkrecht einem Strome entgegen, dessen Geschwindigkeit $= C$ wäre, und erhielte sie darinnen mit einem Gewichte $= P$; so gäbe dieser Satz $c^2 : C_2 = p : P$, man kann leicht sehen, ob das mit der Erfahrung übereintrifft.

II. Eigentlich findet man nicht das Gewicht durch die Erfahrung, das den Stoß genau aufhält; sondern, wenn man Gewichte, die anfangs zu klein sind, nach und nach vermehrt, so erhält man p ein wenig grösser, als das eigentlich gesuchte Gewicht. Man findet also wenigstens Gränzen, zwischen welche das Gewicht,

das

das den Stoß genau aufhielte, fallen muß, und kann diese Gränzen sehr enge zusammen bringen; Es ist eben ein solches Verfahren, wie man gebraucht, die Grösse des Reibens zu bestimmen (Höh. Mech. III. Absch. 83.).

321. I. Man sieht auch leicht, wie sich etwa Werkzeuge zu solchen Versuchen angeben liessen. Mariotte (*) bediente sich dazu einer stehenden Welle, die statt der Arme ein paar Liniale kreuzweis gesetzt hatte; die breiteste Fläche des einen Linials war horizontal, des andern seine verticale, in dieser letztern befand sich die Axe der stehenden Welle. Jedes Linial erstreckte sich genau auf gleiche Weite nach jeder Seite von der Axe hinaus. Wenn man die Welle auf die Art ins Wasser gesetzt hätte, daß das andere Linial mit seiner verticalen Breite, im Wasser, dem Strome gerade entgegen gestanden hätte, so würde sich die Maschine wohl nicht gedreht haben; denn das Wasser hätte an die eine Hälfte des Linials völlig so gestossen, wie an die andere, das Linial hätte einen gleicharmichten Hebel vorgestellt, der an beyden Seiten auf einerley Art beschwert ist. Man befestigte also an dem einen Ende dieses Linials eine ebene Fläche, auch senkrecht dem Strome entgegen. Das war ein sehr dünnes Bretchen sechs Zoll ins Gevierte. Man brachte dieses Bretchen so tief ins Was-

ser,

(*) du Mouv. d. E. II. Part. 3. disc. p. 402.

ser, daß das Wasser 2 bis 3 Zoll darüber wegslief; und nun legte man an das Ende des horizontalen Linials nach und nach Gewichte, bis sie machten, daß das Bretchen den Stoß des Wassers unbewegt aufhielt. Die Gewichte wurden genau so weit von der Axe der Welle gelegt, als des Bretchens Mittel davon entfernt war. Man konnte sich nämlich die Stösse der einzelnen Reihen von Wassertheilchen, deren eine auf die Stelle des Bretchens, die andere auf eine andere stieß, im Mittel des Bretchens vereinigt vorstellen, weil diese einzelnen Stösse alle mit einander parallel und gleich waren, wie die Stösse der Schnexe auf die einzelnen Theile eines solchen Bretchens, die sich auf alle im Mittelpuncte vereinigen liessen. Dieses ist Stat. 135. umständlich gezeigt worden. Das horizontale Linial musste sich wohl hiebey auser dem Wasser befinden, und solchergestalt an der Welle etwas über dem Verticalen angebracht seyn, obgleich M. das nicht erwähnt.

II. Wenn Wasser durch eine Oeffnung im Boden eines Gefässes herausläuft, so könnte man die vorige Maschine leicht so ändern, daß sich hier die Stärke des Stosses untersuchen liesse, die Welle müsste horizontal liegen. Man brauche nur ein Linial, dessen breite Seite horizontal läge, das Wasser fiele auf das eine Ende, vielleicht auch auf ein daselbst angebrachtes Bretchen, und auf das andere Ende würde nach und nach so viel Gewicht gesetzt, bis das Bretchen

unter

unter dem darauf fallenden Wasser unbewegt stehen bliebe.

322. Mariotte hat a. a. O. gefunden, daß ein Strohm, der in einer Secunde $3\frac{1}{4}$ Fuß zurücklegte (285) auf eine Fläche von 6 Zoll ins Gevierte, mit einer Gewalt anstieß, die $3\frac{3}{4}$ Pfund erforderte. Bey einer Geschwindigkeit von $1\frac{1}{4}$ Fuß, betrug der Stoß 9 Unzen $=$ $\frac{9}{16}$ eines Pfundes. Diese Geschwindigkeiten verhalten sich wie $\frac{13}{4} : \frac{5}{4} = 13 : 5$, ihre Quadrate $= 169 : 25$, beträgt der ersten ihr Stoß $\frac{15}{4}$ Pfund; so betrüge der andern ihrer nach dem Satze; $\frac{25.15}{169.4} = 055$ Pfund $= 8$, 8 Unzen; welches mit der Erfahrung übereintrifft. Er hat mehr Versuche angestellt, die auf eben die Art zusammentreffen.

323. Wenn man einen solchen Versuch zum Grunde legt, so ist es leicht nach (320; I.) zu berechnen, wie stark der Stoß auf eine gleiche Fläche, bey einer andern Geschwindigkeit ist. Und auf eine grössere oder kleinere Fläche, wird dieser nur gefundene Stoß auch in der Verhältniß der Fläche grösser oder kleiner seyn. Man hat also leicht hieraus allgemeine Regeln, den Stoß auf jede gegebene Fläche zu berechnen. Es ist auch nach (252) leicht statt der Geschwindigkeiten, die Höhen zu setzen, denen sie gehören.

Dieß

Dieß macht den Innhalt einer Abhandlung des de la Hire aus (*), da der erste von Mariottens nur angeführten Versuchen zum Grund gelegt ist, sonst aber keine neuen Erfahrungen oder andere Bestätigungen enthalten sind.

324. I. Alles bisherige für wahr angenommen, so kann man doch nur aus der Stärke eines Stosses, welche die Erfahrung muß gelehrt haben, die Stärke anderer berechnen. Da doch die Stärke jedes Stosses ohne Zweifel auf die Geschwindigkeit ankömmt, so könnte man auf die Gedanken gerathen, ob sich nicht überhaupt eine Vergleichung zwischen dem Stosse, und der Geschwindigkeit, oder etwa der Höhe derselben finden liesse. An die Höhe denkt man natürlicher Weise, weil es die einzige bestimmte Linie ist, die man bey der Geschwindigkeit annehmen kann. Denn die Geschwindigkeit selbst liesse sich eben so gut durch den Weg einer Minute oder Stunde, als durch den einer Secunde angeben, daher hat die Linie, die sie selbst ausdrückt, keinen bestimmten Werth. Wie man nun die Stärke des Stosses durch ein Gewicht ausdruckt, so wäre es wohl natürlich, dieses Gewicht durch eine gewisse Wassersäule anzugeben. Auch würde man leicht darauf fallen, daß die Grundfläche dieser Wassersäule eben die Fläche seyn müsste, die

(*) Mem. de l' Ac. des Sc. 1702. p. 256. ed. de Paris.

die den Stoß auffängt. Also würde man nur etwa die Länge dieser Wassersäule suchen, und sehen, ob sich solche etwa mit der Geschwindigkeit des Wassers, oder der zugehörigen Höhe auf eine leichte Art vergleichen liesse.

II. Dergleichen mit Mariottens erstem Versuche vorzunehmen, sey x die Länge einer Wassersäule, die zur Grundfläche 6 Zoll ins Gevierte, oder $\frac{1}{4}$ eines Quadratfusses hätte, und $\frac{15}{4}$ Pfund schwer wäre. Weil Mariotte den Cubikfuß Wasser 70 Pfund schwer setzt, so ist $\frac{1}{4}$. x. 70 $= \frac{15}{4}$ daher x $= \frac{15}{70} = 0'$, 214285 die Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehöret, findet sich nach (154) $0'$, 17492. Diese beyden Grössen verhalten sich ohngefähr wie 1, 2 : 1 und das giebt keine Anleitung zu einer allgemeinen Vergleichung zwischen x und der Höhe der Geschwindigkeit. Ein Wasserprisma, das die letztere zur Länge, und $\frac{1}{4}$ Quadratfuß zur Grundfläche hätte, wöge 3,0611 Pfund.

325. I. Den Stoß des Wassers mit einer Wassersäule, deren Grundfläche die Fläche wäre, welche gestossen wird, zu vergleichen, hat man sich in der pariser Akademie der Wissenschaften, schon um 1667 beschäfftiget. Man brauchte ein cylindrisches Gefäß, 3 Fuß hoch, dessen Boden 6 Zoll weit war, und eine runde Oeffnung von 4 Linien im Durchmesser hatte. Man ließ das Wasser auf eine Platte fallen, die an den einen Arm eines Wagbalkens befestigt

und mit der Schale am andern Arme ins Gleichgewicht gebracht war. Bey wiederhohlten Versuchen fand sich, daß der Stoß $2\frac{1}{2}$ Unze bey 35 Zoll Wasserhöhe, aber $1\frac{3}{4}$ Unzen bey 24 Zoll Wasserhöhe betrug.

II. Man berechnete, daß eine Wassersäule, so weit als die Oeffnung war, 35 Zoll hoch, $2\frac{1}{3}$ Unzen, 2 F. hoch $1\frac{3}{8}$ Unzen wiegen müsste, welches mit den gefundenen Gewichten übereinstimmt, und diese Gelehrten, unter denen sich auch Huygens befand, veranlasste, anzunehmen, der Stoß des Wassers betrage so viel, als das Gewicht einer Wassersäule, die zur Grundfläche die Oeffnung, und zur Höhe die Wasserhöhe hat (*).

III. Diese Zahlen stimmen nicht wohl mit einander überein. Man kann sie gleich dadurch prüfen, ob sich die angegebenen Gewichte wie die Längen der Röhren verhalten. Die Verhältniß dieser Gewichte ist $\frac{7}{3} : \frac{11}{8} = 56 : 33 = 35 : 20\frac{20}{56}$, aber der kürzeren Röhre Länge war 24.

IV. Das aber trifft zu, daß sich die Stärken der Stösse beynahe wie die Wasserhöhen verhalten, denn $35 : 24 = \frac{5}{2} : 1,714$ und der Stoß bey der Wasserhöhe 24 war 1,75; Hunderttheile der Unze können hier gewiß nicht betrachtet werden.

Da sich nun die Wasserhöhen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten (101), so bestätiget dieser Versuch doch (320; I).

V.

(*) Duhamel, Reg. Scient. Ac. Historia (Lipsiae 1700 4to) L. I. Sect. III. cap. 5. p. 52.

V. Dieß ist der erste Versuch, den man unternommen hat, die Stärke des Stosses durch eine gewisse Wassersäule auszudrücken. Versuche, wie etwa (180) die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers betreffend, werden vom Du Hamel kurz zuvor angeführt.

VI. Der Schluß selbst in II. aber scheint vom Huygens etwas zu übereilt gemacht zu seyn. Das Gewicht der Wassersäule 2 F. hoch betrug $1\frac{3}{8}$ Unzen, der Stoß $1\frac{3}{4}$ Unzen, dieser um $\frac{3}{8}$ einer Unze mehr als jenes. Der Unterschied ist an sich so gar geringe nicht, hier aber kömmt nicht seine Grösse für sich allein, sondern die Verhältniß, die er zum Stosse oder zum Gewicht der Wassersäule hat, vornehmlich in Betrachtung. Er beträgt mehr als den vierten Theil des angegebenen Gewichts, und es ist wohl nicht sehr zuverlässig, den Stoß dem Gewichte gleich zu seßen, wenn vermöge dieser Erfahrung der Stoß mehr als $\frac{5}{4}$ des Gewichts beträgt. Die Verhältniß des Stosses zum Gewichte ist 14 : 11 kann man dieses für die Verhältniß 1 : 1 annehmen?

VII. Diese Schwürigkeit hat man damals schon bemerkt, und darauf die Antwort gegeben: Die Platte, welche den Stoß auffing, sey ein wenig vom Loche entfernt gewesen. Diese Entfernung hat vermuthlich bey weitem nicht einen ganzen Zoll betragen, sonst hätte man sie durch ein genaues Maaß, und nicht nur dadurch angegeben, daß sie sehr geringe gewesen. Man

nehme sie einen Zoll an, so bekäme man statt der 24 Zoll langen Wassersäule, eine, die noch um $\frac{1}{24}$ länger, folglich auch um soviel schwerer wäre. Zu dem Gewichte der vorigen Wassersäule müsste man also noch seinen 24sten Theil = $\frac{11}{8.24}$ Unzen sezzen. Das beträgt noch nicht $\frac{1}{16}$ Unze, und also bey weitem noch nicht so viel, als der Unterschied zwischen dem Stosse und dem Gewichte der vorigen Wassersäule betrug. Dieser Unterschied wird selbst noch nicht aufgehoben, wenn man die Platte sogar 2 Zoll tiefer als das Loch sezzte, dadurch käme noch nicht $\frac{1}{8}$ Unze zum Gewicht der vorigen Wassersäule, von 24 Zoll; diesem Gewicht fehlten aber $\frac{3}{8}$ Unzen zum Stosse. Also lässt sich die Schwürigkeit durch die Entfernung der Platte nicht heben und dieses bestätiget den Verdacht, daß man in Berechnung aller Umstände nicht gar zu sorgfältig gewesen ist.

VIII. Vermuthlich sind die Akademisten auf diesen Gedanken, den Stoß durch das Gewicht der Wassersäule auszudrücken, dadurch gebracht worden, weil sie zugleich angenommen haben, die Geschwindigkeit des anstossenden Wassers gehöre der Wasserhöhe. Allein, wenn dieses lezztere auch gleich nach der Theorie seyn sollte, so richtet sich doch der Stoß ohne Zweifel nicht nach der Geschwindigkeit, die das Wasser vermöge der Theorie haben sollte, sondern nach der, die

es

es wirklich hat, und die immer etwas kleiner ist (164). Auch müsste man für den Durchmesser des Wassers, das wirklich anstösst, nicht der Oeffnung ihren annehmen, sondern des zusammengezogenen Wasserstrahls seinen (156). Dergleichen Erinnerungen macht hiebey Hr. Daniel Bernoulli (*), und bemerkt, daß auch andere Versuche, dadurch man etwa den Satz (325. II) hat bestätigen wollen, eben so unzulänglich sind, und es nur ein Zufall ist, wenn manche damit besser übereinzustimmen schienen (Siehe unten 329. V).

VI. In Mém. de l'Ac. R. des Sc. de Turin Ann. 1788; 89; Vol. IV. ist unter den Memoires présentés p. 121; observations et experiences sur la mesure du choc d'une veine fluide par M. Ignace Michelotti, wo im Eingange mehr hieher gehörige Untersuchungen erwähnt werden. Ich finde nicht, daß Herr J. M. viel entscheidet. Ueber den schiefen Stoß habe er nicht genug Versuche. Er beschäfftigt sich sehr mit der Untersuchung, was es giebt, wenn ▽ aus Oeffnungen oder aus Röhren hervordringt.

In eben dem Bande in den Mém. Historiques p. LXXVI wird erzählt, Herr Therese Micholotti habe bemerkt, daß der Wasserstrahl, der aus einem orifice hervordringt, und sich zu-

(*) Diss. de legibus quibusdam mechanicis nondum descriptis Pars II. §. 1-3. Commentar. Ac. Sc. Petrop. T. VIII. ad ann. 1736. p. 113.

sammenzieht, allemahl die verkehrte Gestalt der Oeffnung darstelle, ist sie ein Dreyeck, dessen Spitze unten ist, so giebt er ein Dreyeck, dessen Spitze oben ist. Das haben mehre mit ihm gesehn.

326. Bernoulli giebt am nur angef. Orte selbst eine Theorie von der Stärke des Wasserstosses, bey der er als eine Erfahrung annimmt, wenn ein Wasserstrahl senkrecht auf eine Fläche stösst, daß alle Wassertheilchen längst der Fläche abfliessen. In der 27 Fig. bedeute BD eine Verticalfläche, ein Wasserstrahl gehe horizontal nach CB auf sie zu, das Wasser lenkt sich an der Fläche so, daß es bey Q parallel mit ihr abgeht. Man kann sich also vorstellen, in einer geringen Entfernung vor der Fläche, etwa in A, fangen die Theile, aus denen der Wasserstrahl der Länge nach besteht, die man etwa mit parallelen Fäden vergleichen könnte, an, sich zu beugen, so daß ein solcher Theil die Krümmung AMQ annimmt, wo die Tangente in Q mit BD parallel ist, also mit AB, der Tangente bey A rechte Winkel macht. Das wird man etwa so ausdrücken können: Das Wasser fange sich kurz vor der Fläche an, aus seinem bisherigen Wege zu lenken, so daß es sich an der Fläche um einen rechten Winkel abgelenket hat. Nun wird dieses ohne Zweifel durch die Fläche verursacht, die dem Wasser nicht verstattet, in seinem Wege gerade fortzugehn. Dieses Nichtverstatten ist eigentlich keine Wirkung, aber es setzt zum voraus, daß die

die Fläche etwas von der Wirkung des Wassers aufhält, und dieser Theil der Wirkung, den sie aufhält, wird eben der Stoß seyn, den sie leidet.

Diese Theorie wird im nachfolgenden vorgetragen. Der Lehnsatz ist auch sonst nützlich (Höh. Mech. III. Absch. 232).

Lehnsatz (27. Fig.)

327. Ein Körper bewegt sich in einer krummen Linie AM; die von AB in A berührt wird, AP aber senkrecht auf AB zur Axe hat. Man soll seine Normalkraft und seine Tangentialkraft (Höh. Mech. 164. 167.), jede für sich, in zwo Kräfte zerlegen, von denen eine mit AB, die andere mit AP parallel ist.

Auflös. I. Man ziehe MP, NQ, einander unendlich nahe, senkrecht auf die Axe, und MO mit ihr parallel, so ist $AP = x$; $PM = y$; $PQ = MO = dx$; $ON = dy$;

Ferner sey MR der Halbmesser der Krümmung und schneide die Axe in V; die Tangente an M, begegne der Linie AB in S; eine Parallele durch S mit der Axe gezogen, begegne der Ordinate in W; wo $SW = x$.

Endlich setze man $dy = pdx$; so ist $PV = py$ (An. Un. 92.) und $MV = y\sqrt{(1+pp)}$; auch $MW : WS = dy : dx = p : 1$ daher $MW = px$ und $MS = x\sqrt{(1+pp)}$ auch $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ oder $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ und $\frac{ds}{dx} = \sqrt{(1+pp)}$.

II.

II. Nun heisse die Normalkraft N; so giebt sie (Stat. 63.) mit MP parallel eine Kraft $\frac{MP}{MV} . N = \frac{N}{\sqrt{(1+pp)}}$ und mit PV parallel eine Kraft $\frac{PV}{MV} . N = \frac{p.N}{\sqrt{(1+pp)}}$.

III. Die Tangentialkraft T; giebt mit MP parallel eine Kraft $\frac{MW}{MS} . T = \frac{p.T}{\sqrt{(1+pp)}}$ und mit AP parallel eine Kraft $\frac{SW}{MS} . T = \frac{T}{\sqrt{(1+pp)}}$.

IV. Ich gebe die Richtungen der neuen Kräfte nur so an, daß ich bemerke, was für Linien sie parallel sind. Ob aber die Kraft mit MP parallel, die aus der Normalkraft entsteht, gegen die Axe zu, oder von ihr weg treiben soll, ob ihre Richtung, wie man dieses kurz ausdrücken kann MP; oder PM, ist, das wird darauf ankommen, ob die Normalkraft von M nach R zu treibt, oder von R nach M zu, im letzten Falle eine Schwungkraft wäre. Eben so, wenn die Normalkraft eine Schwungkraft ist, wird aus ihr, mit der Axe parallel eine Kraft nicht nach PV sondern nach VP entstehen.

Ist die Richtung der Tangentialkraft, von M weiter vorwärts, so daß sie die Bewegung beschleuniget, so entstehen aus ihr Kräfte nach

PM

PM und AP; geht diese Richtung aber rückwärts von M nach S, so entstehen aus ihr Kräfte nach MP; PA.

Diesen Unterschied giebt die Rechnung durch das bejahte oder verneinte Zeichen der Kräfte an (Höh. Mech. 2. Abschn. 2; 6;).

V. Weil $N = \frac{2v}{r}$ (das. 2. Abschn. 6.) und $r = \frac{-dx.(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$ (An. Un. 543; II.) so ist $N = \frac{-2vdp}{dx.(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. Es geht aber in diesem Falle, der Halbmesser der Krümmung und die Richtung der Normalkraft nach der Axe zu, also entsteht aus dieser Normalkraft

nach MP eine Kraft $\frac{-2vdp}{dx.(1+pp)^2} = \frac{-2vdp}{ds.(1+p^2)^{3:2}}$

nach AP ..... $\frac{-2vpdp}{dx.(1+pp)^2} = \frac{-2vpdp}{ds.(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$

Verwandelt sich die Normalkraft in eine Schwungkraft, so gehen diese Kräfte nach PM und PA.

VI. Auch ist $T = \pm\frac{dv}{ds}$ (Höhere Mech. 2. Abschn. 6.) also ist aus IV. die Kraft

nach PM $= \frac{pdv}{ds\sqrt{(1+pp)}}$

nach

nach $AP = \frac{dv}{ds\sqrt{(1+pp)}}$

welche Kräfte die entgegengesetzte Zeichen bekommen und nach MP, PA gerichtet sind, wenn die Tangentialkraft nach MS geht.

VII. Das Element der Zeit heisse dt, und f eine veränderliche oder unveränderliche Kraft; so wird man fdt die **augenblickliche Wirkung** nennen können, die nähmlich in jedem Augenblicke von der Kraft ausgeübt wird. Dan. Bernoulli (a. a. O. p. 100 seq.) nennt sie potentiam momentaneam. Ein Körper kömmt mit der Geschwindigkeit, die der Höhe zugehört, in der Zeit dt durch $2dt.\sqrt{gv} = ds$; also ist $dt = \frac{ds}{2\sqrt{gv}}$.

VIII. Folglich $\frac{2v}{r}.dt$ oder der Normalkraft augenblickliche Wirkung $\sqrt{(\frac{v}{g})}.\frac{ds}{r}$. Wirkt nun in den Körper keine andere Kraft als die Normalkraft, so ist die Geschwindigkeit unveränderlich, (Höh. Mech. 1. Abschn. 167.) daher die Summe aller dieser Wirkungen $= \sqrt{\frac{v}{g}}.\int\frac{ds}{r}$.

Wenn man nun bey M, N, Normalen auf die krumme Linie zieht, so ist der Winkel dieser Normalen $= \frac{ds}{r}$; Aber eben dieser Winkel ist

auch

auch der Winkel, den die Tangente bey M mit der bey N macht, weil die Normalen auf die Tangenten senkrecht sind; oder, es ist der Winkel, um den sich die Richtung des Körpers ändert, indem er aus M in N kömmt. Die Summe dieser Aenderungen der Richtungen ist also $\int \frac{ds}{r}$. Nun sind in A, M, die Richtungen AB, SM; also ist der Winkel BSM, die Summe dieser Aenderungen der Richtungen oder der Winkel, um den sich die Richtung von A bis M geändert hat; angulus mutatae directionis). Man setze BSM $= \lambda$; so ist die Summe der augenblicklichen Wirkungen $= \sqrt{\frac{v}{g}}. \lambda$. Diese Summe ist also bey zweenen Körpern einerley, wenn beyde einerley Geschwindigkeit haben, und beyder Richtung sich um gleich viel geändert hat, obgleich der eine in einer ganz andern krummen Linie geht als der andere.

IX. Das bisherige betrifft nur die beschleunigende Kraft. Will man die bewegende haben, so sey m des Körpers Masse, und die Summe der augenblicklichen Wirkungen, der bewegenden Normalkräfte ist $m. \lambda. \sqrt{\frac{v}{g}}$.

X. Bedeutet f (VII.) unsere Schwere, so ist im Zeittheilchen dT, ihre augenblickliche Wirkung fdT, also die Summe dieser Wirkungen fT. Soll nun T die Menge von Secunden seyn,

seyn, in der ein Körper durch die Höhe v fällt, oder die Geschwindigkeit erlangt, die dieser Höhe zukömmt, so ist $T = \sqrt{\frac{v}{g}}$ und die nur gefundene Summe $= \sqrt{\frac{v}{g}}$ weil man $f = 1$ setzt. Diese Summe mit des Körpers Masse multiplicirt giebt also $m\sqrt{\frac{v}{g}}$ für die Summe aller augenblicklichen Würkungen der Schwere in die Masse m, wodurch die Geschwindigkeit entstanden ist, die der Höhe v zugehört. Dan. Bernoulli nennt dieß a. a. O. quantitatem motus corpori insitam.

XI. Die Summen X; IX; verhalten sich $= 1 : \lambda$; wie der Halbmesser zum Maasse des Winkels, um den sich die Richtung geändert hat.

XII. Aus der Normalkraft und Tangentialkraft zusammen, entsteht eine Kraft nach MP

$$\frac{-2vdp}{ds.(1+p^2).\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{pdv}{ds\sqrt{(1+p^2)}}$$

(V. VI.) diese Kraft mit dem Werthe von dt (VII) multiplicirt, giebt die augenblickliche Wirkung einer Kraft, die senkrecht gegen die Axe gerichtet ist, und aus jenen beyden Kräften entsteht

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}.\left(\frac{\sqrt{v}.dp}{(1+p^2).\sqrt{(1+p^2)}} + \frac{pdv}{2\sqrt{v}.\sqrt{(1+p^2)}}\right)$$

Nun ist $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$ das Differential von $\sqrt{v}$. Man kann also auf die Vermuthung gerathen, was

hier

hier in $\frac{1}{\sqrt{g}}$ multiplicirt ist, sey das Differential eines Products. Alsdenn aber müsste, nach dem, was vom Differentiale eines Products bekannt ist, der andere Factor $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ seyn; Es kömmt also darauf an, ob diese Grösse differential $\frac{dp}{(1+p^2).\sqrt{(1+p^2)}}$ ist. Die Rechnung wird solches bestätigen, und dadurch die Muthmassung zur Gewißheit bringen.

Daher ist die Summe der augenblicklichen Wirkungen Const $-\frac{\sqrt{v}.p}{\sqrt{(1+p^2)}.\sqrt{g}}$.

Nun ist $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{MW}{MS}$ (I.) = sin MSW = col λ also nur die gefundene Summe Const $-$ col λ. $\sqrt{\frac{v}{g}}$ diese Summe verschwindet in A wo die Kräfte erst zu wirken anfangen, eben daselbst aber ist $\lambda = o$, und die Geschwindigkeit daselbst gehöre der Höhe b; folglich ist $o = \text{Const} - \sqrt{\frac{b}{g}}$ und daher die vollständige Summe $\frac{1}{\sqrt{g}}.(\sqrt{b} - \text{col}\,\lambda.\sqrt{v})$.

XIII. Das nur gefundene mit m multiplicirt, giebt die Summe der augenblicklichen Wirkungen, der bewegenden Kräfte nach MP; zu

welcher sich die Summe X; verhält, wie $\sqrt{v}$: $\sqrt{b} - \cos\lambda \sqrt{v}$ und also wie $1 : 1 - \cos\lambda$ wenn die letzte Geschwindigkeit der ersten gleich ist, wie sich auch indessen die Geschwnidigkeiten mögen geändert haben.

Wenn $\lambda = 90$ Gr; so ist $\cos\lambda = 0$ und die nur gefundene Summe $= m\sqrt{\frac{b}{g}}$, so groß als das, was in X. herauskömmt, wenn man statt v die Höhe b setzt, die der Geschwindigkeit im Anfange zugehört. Bey dieser Summe kömmt also nichts auf die Geschwindigkeit an, mit welcher der Körper in M, parallel mit AP oder BD fortgeht.

XIV. Aus der Normalkraft und Tangentialkraft zusammen entsteht vermöge V; VI; eine Kraft nach AP $\frac{-2vpdp}{ds.(1+p^2).\sqrt{(1+p^2)}} + \frac{dv}{ds.\sqrt{(1+p^2)}}$; diese mit dem Werthe von dt (VII.) multiplicirt, giebt die augenblickliche Wirkung der nach AP gerichteten Kraft $\frac{1}{\sqrt{g}}$. $\left(\frac{dv}{2\sqrt{v}.\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{\sqrt{v}.p.dp}{(1+p^2).(1+p^2)}\right)$.

Hier entsteht eine ähnliche Muthmassung, ob man etwa ein Differential von einer Grösse habe, deren einer Factor $\sqrt{v}$; ist, der andere

$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$ seyn müsste. Die Rechnung wird auch dieses bestätigen; also ist die Summe aller augenblicklichen Wirkungen der Kräfte nach AP;

$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Const. Aber

$\frac{1}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{x}{MS}$ (I.) $=$ sin SMW $=$ sin λ,

daher ist diese Summe $\sqrt{\frac{v}{g}} \cdot$ sin $\lambda +$ Const. Sie verschwindet in A, wo $\lambda = 0$; also ist Const $= 0$ und die Summe vollständig sin $\lambda \cdot \sqrt{\frac{v}{g}}$.

XV. Mit m multiplicirt giebt sie die Summe der bewegenden Kräfte nach AP; und zu derselben verhält sich die Summe X; wie 1 : sin λ.

XVI. Wenn sich ein Körper in einer krummen Linie bewegt, so lassen sich alle Kräfte, die in ihn wirken, in Normal- und Tangentialkräfte und diese in Kräfte nach MP und nach AP zerlegen. Fängt nun der Körper seine Bewegung in A mit einer gegebenen Geschwindigkeit an, die der Höhe b zugehört, hat er in M eine gegebene Geschwindigkeit, die der Höhe v gehört, und ist er daselbst von seinem ersten Wege, der Tangente in A, um einen gegebenen Winkel abgewichen, so ist die Summe der augenblicklichen Wirkungen aller Kräfte nach MP, die durch den ganzen Weg AM in ihn gewirkt haben, einerley,

was auch der Weg AM für eine Krümmung haben mag, und wie sich von A bis M die Geschwindigkeiten mögen geändert haben (XII). Gesetzt also, zweene Körper beschreiben ganz unterschiedene Wege, der eine aber hat in einer gewissen Stelle seines Weges eben die Geschwindigkeit, die der andere in einer gewissen Stelle des seinigen hat, und von seiner ersten Richtung ist jeder an seiner Stelle gleichviel abgewichen; so ist die Summe der augenblicklichen Wirkungen der Kräfte nach MP in einem so groß als in dem andern.

XVII. Alles dieses gilt auch von der Summe der augenblicklichen Wirkungen der Kräfte nach AP, noch in so weit allgemeiner, daß hier auf die Geschwindigkeit, mit der die Bewegung angeht, nichts ankömmt, sondern solche bey einem Körper grösser, als bey dem andern seyn mag, wenn nur die Geschwindigkeiten in M einerley sind (XIII.).

XVIII. Man kann nach XIII; XV; die Summen der nur genannten Wirkungen mit den Summen der augenblicklichen Wirkungen der Schwere vergleichen, von denen die letzte Geschwindigkeit des Körpers entsteht. Bey diesen Vergleichungen geht die Geschwindigkeit aus dem Ausdrucke der Verhältnisse heraus, und was auch die letzte Geschwindigkeit seyn mag, so kommen doch die Verhältnisse nur auf den Winkel an, um den sich die Richtung geändert hat.

XIX.

XIX. Die bisherigen Sätze hat Dan. Bernoulli in der (324. VIII.) angeführten Abhandlung vorgetragen, und den Umstand, daß die Summe der augenblicklichen Wirkungen aller, wie man will, veränderlichen Kräfte einerley ist, wenn nur die letzte Richtung und die letzte Geschwindigkeit auch in XVI. dazu die erste, einerley sind, mit der Erhaltung der lebendigen Kräfte verglichen. Er stellt sich nähmlich die lebendige Kraft als die Summe aller Wirkungen vor, durch die ein Körper eine gegebene Geschwindigkeit erhält, wie in Hdh. Mech. 3. Abschn. 204.

328. Aufg. In einem Canale AanN (27. Fig.), der unendlich schmahl angenommen wird, bewegt sich eine flüssige Materie, man sucht die Kräfte, welche nöthig sind, sie in dieser Krümmung zu erhalten.

Aufl. I. Die Grössen, welche im Lehnsatze (327) benannt sind, behalten hier eben die Benennung.

II. Die Geschwindigkeit in M gehört also der Höhe v; die Geschwindigkeit in A gehöre der Höhe b; der Querschnitt des Canals in A verhalte sich zum Querschnitte in M; wie a:z; so ist (240) $a:z = \sqrt{v}:\sqrt{b}$ oder $z = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$.

III. Das Element der flüssigen Materie MmnN ist $= MN.\ z = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}}.\ ds.$

IV. Man setze, der Canal werde von M nach N zu weiter; so nimmt die Geschwindigkeit ab, und man muß sich im Lehnsatze die Tangentialkraft nach MS gerichtet vorstellen. Die Normalkraft aber muß nach MR gerichtet seyn.

V. Wenn man die im Lehnsatze V; VI; gefundenen Kräfte, welches beschleunigende waren, mit dem Elemente hier (III.) multiplicirt, so erhält man die bewegenden Kräfte.

VI. Es kömmt also nach der Richtung MP, die bewegende Kraft, aus der Normalkraft und Tangentialkraft zusammen (327; V; VI.)

$$-\frac{2a\sqrt{(bv)}.\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{ap\sqrt{b}.dv}{\sqrt{v}.\sqrt{(1+p^2)}}.$$

VII. Und die bewegende Kraft nach der Richtung AP, aus der Normal- und Tangentialkraft

$$-\frac{2a\sqrt{(bv)}.\,pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a\sqrt{b}.dv}{\sqrt{v}.\sqrt{(1+p^2)}}.$$

VIII. Die Kraft in VI. läßt sich so ausdrucken

$$-2a\sqrt{b}.\left(\frac{\sqrt{v}.dp}{(1+p^2).\sqrt{(1+p^2)}}+\frac{pdv}{2\sqrt{v}.\sqrt{(1+p^2)}}\right)$$

Dieses Differential ist von dem 327; XII. in nichts unterschieden, als daß der beständige Factor dorten $-\frac{1}{\sqrt{g}}$; hier $-2a\sqrt{b}$ ist. Also wird sogleich aus dem dortigen Integrale das hiesige werden: $2a\sqrt{b}.(\sqrt{b}-\cos\lambda.\sqrt{v})$ oder $2ab-2a.\cos\lambda.\sqrt{(b.v)}$

Dieses

Dieses ist die Summe aller mit BA parallelen von B nach A gerichteten Kräfte, die von A bis M in die flüssige Masse wirken müssen, damit sie sich in der Krümmung AM bewegt.

IX. Wenn die flüssige Materie in Q mit BD parallel geht, also $\lambda = 90$ Gr., so ist die Summe aller Kräfte (VIII.) $= 2ab$.

X. Eben das würde erfolgen, wenn die Geschwindigkeit in Q verschwände, oder $v = o$.

XI. Setzte man die Geschwindigkeit unveränderlich, $v = b$ also $dv = o$, so fiele die Tangentialkraft weg und die bewegende Kraft in VI. würde $- \frac{2abdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Hievon das Integral

$$\text{Const} - \frac{2abp}{\sqrt{(1+p^2)}} = \text{Const} - 2ab.\cos\lambda$$

und weil wieder $o = \text{Const} - 2ab$; so ist in diesem Falle die Summe aller Kräfte $2ab.(1-\cos\lambda)$ wie man aus der letzten Formel in VIII. auch gefunden hätte, wenn man $v = b$ gesetzt hätte. Das hätte aber können statt finden, ohne daß die Geschwindigkeit durchaus unveränderlich gewesen wäre.

XII. In diesem letzten Falle (XI.) gehe die flüssige Materie von Q senkrecht auf AB zurücke, als wenn sie reflectirt würde. Damit dieses so erhalten wird, daß der Voraussetzung gemäß die Krümmung AMQ gegen BD beständig erhoben (convex) bleibt, so muß man sich vorstellen, der Weg der flüssigen Materie sey MQq; so

daß die Tangente bey q senkrecht auf BD wäre. Ist alsdenn λ der Winkel, den diese Tangente bey q mit der bey A macht, so muß die Tangente bey q, senkrecht von BD weggehen, wie die bey A senkrecht darauf zu geht, das heisst, λ muß bey q bis auf 180 Gr. wachsen, oder daselbst ist $\cos\lambda = -1$ und die Summe aller Kräfte aus XI; 4 a b.

XIII. Die Kraft in VII. läßt sich so ausdrucken:

$$2a\sqrt{b}.\left(\frac{dv}{2\sqrt{v}.\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{\sqrt{v}.pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Also ist wie im Lehnsatz XIV. die Summe aller Kräfte, die mit AP parallel gehen,

$$\text{Const} + 2a\sqrt{b}.\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(1+p^2)}};$$ oder

$\text{Const} + 2a\sqrt{(bv)}.\sin\lambda$; aber $\text{Const} = 0$ also die Summe aller dieser Kräfte $2a\sqrt{(b.v)}.\sin\lambda$.

XIV. In der Voraussetzung (VIII.) wäre die Summe dieser Kräfte $2a.\sqrt{(b.v)}$, und $= 2ab$ für $v = b$: In der Voraussetzung (XII.) wäre $\sin\lambda = 0$; und die Summe dieser Kräfte $= 0$. Das heisst soviel: Indem sich das Wasser durch den Canal bewegt, werden sich darinnen Kräfte befinden, die mit AP, andere, die jenen gerade entgegen, mit PA parallel wirken. Beyde zusammen müssen einander aufheben, so daß bey q nichts übrig bleibt, das das Wasser mit der Verlängerung von BD, oder mit DB

parallel

parallel triebe, sonst würde es daselbst nicht senkrecht von BD zurückgehen.

XV. Weil a eine Fläche bedeutet (II.) so ist 2b. a der Innhalt eines senkrechten Cylinders oder Prisma, dessen Grundfläche der Querschnitt bey A, die Länge $= 2b$ wäre. Eben der Ausdruck aber zeigt hier in (VIII.) eine Summe bewegender Kräfte an (VI.), und muß also nicht bloß den Raum eines geometrischen Körpers, sondern eine gewisse Menge Materie andeuten. Man erhielt aber diese bewegenden Kräfte, indem man mit einem Elemente solcher flüssigen Materie multiplicirte, wie sich im Canale bewegt (V.), also ist klar, daß hier dergleichen Materie verstanden wird, und der Satz VIII. heisst so: Die Summe der bewegenden Kräfte beträgt soviel, als das Gewicht des Wassers, davon der angegebene Cylinder, oder das angegebene Prisma ausgefüllt würde.

Man sieht leicht, wie dieses auf die anderen vorhin gefundenen Ausdrückungen für die Summe der Kräfte anzuwenden. Diese Ausdrükkungen werden immer den Innhalt gewisser Cylinder oder Prismen geben, und man muß sich den geometrischen Raum solcher Körper mit dergleichen Materie gefüllt vorstellen, wie hier betrachtet wird.

XVI. Die Gründe dieser Untersuchung hat, wie in 327 zwar Dan. Bernoulli gelegt, und auch die Anwendung davon auf den Stoß des Wassers gemacht. In dem Vortrage gegenwär-

tigen 328 Art. aber bin ich mehr Hr. Eulern gefolgt (*), dadurch mir die Sache etwas deutlicher zu werden schiene.

329. I. Nun bedeute BD die Hälfte einer Fläche, die einem Wasserstrahle senkrecht entgegensteht, der mit AB parallel auf sie anstösst, und auch längst AB in ähnliche Hälften getheilt wird. Was also auf einer Seite von AB vorgeht, kann man sich auch auf der andern vorstellen. Man setze, auf AP werde dieses Strahls halbe Breite genommen, so kann man dieselbe als in eine Menge unendlich kleiner Theile getheilt ansehen, davon Aa einer wäre, die andern auf AP weiter hinaus lägen. Finge sich nun das Wasser, das durch Aa durchgeht, daselbst in die Krümmung AMQ zu beugen an, so daß es bey Q parallel mit der Fläche abliefe (326) so wären dazu die (328. VII.) gefundenen Kräfte nach BA nöthig. Das wird wohl so viel heissen: Das Wasser wendet, nach AB gerade fortzugehen, zusammen diese Kräfte an, die Fläche aber, die es nicht fortläfft, sondern bey Q auf die beschriebene Art abzulaufen nöthigt, muß alle diese Kräfte aufhalten. Und folglich werden wohl diese Kräfte zusammen anzeigen, wie stark die Fläche von diesem Wasser gestossen wird, das ist, der Stoß dieses Wassers auf die Fläche wird durch das in (328. XV.) angegebene Gewicht ausgedrückt.

II.

(*) Erläuterte Artillerie; 3 Anmerk. zum 1 Satze des 2. Capit. 459. Seite.

II. Der Begriff des Canals, den man in (328) angebracht hat, wird hier so statt finden: Wenn sich Wasser bey A nach AMQ zu lenken anfängt, so wird in dem Raume zwischen dieser Krümmung und ABD welches stehen bleiben; dieses wird von dem Wasser gedrückt, das sich nach AMQ krümmen muß, ob es gleich gerade fortgehen wollte; denjenigen Theil dieser Drückungen, der mit AB parallel ist, pflanzt dieses Wasser weiter bis auf BD fort, wie überhaupt Druck, der an irgend einer Stelle auf Wasser ausgeübt wird, sich durch dasselbe bis an seine Gränze fortpflanzt.

So gienge es auf der Seite AMQ; an der andern amn, wird Wasser von den Theilen des Wasserstrahles befindlich seyn, deren Anfänge ich zwischen a und P (I.) wie Aa der Anfang des gegenwärtigen ist. Diese Theile, die sich ebenfalls krümmen müssen, da sie gerade fortgehen wollten, drücken auf das Wasser, von dem ich rede, an der Seite anm und erhalten es dadurch daselbst in seiner Krümmung. Wenn diese Vorstellung nicht recht befriedigend ist, so fällt der Vorwurf gänzlich auf mich. Die beyden Schriftsteller, deren ich mich bediene, haben es als offenbahr angenommen, daß man den Canal hier anbringen könne. Meine Vorstellung ist ohngefähr von der Art, wie die, welche ich Hydrostat. 10:24 gegeben habe.

III. Hat man nun die halbe Breite, wie in (I.) in unzählige Theile getheilt, deren jeder

einen

einen solchen Canal (II.) giebt, dergestallt, daß das Wasser in ihm parallel mit der Fläche abläuft, so ist der Stoß jedes dieser Canäle so groß, als das Gewicht eines Prisma voll Wasser, dessen Grundfläche der Anfang des Canals, die Höhe 2b wäre. Diese Höhe ist für alle Canäle einerley, und ihre Anfänge zusammen machen den Querschnitt des Wasserstrahls bey A aus. Also wird der Stoß des Wasserstrahls auf die Fläche BD so viel betragen als: das Gewicht eines Prisma voll Wasser, dessen Grundfläche der Querschnitt des Wasserstrahls ist, die Höhe, noch einmahl so groß ist, als die Höhe, welche der Geschwindigkeit gehört.

Wenn man sich auf der andern Seite von AB alles, wie auf dieser vorstellt, so kömmt für beydes auf beyden Seiten zusammen, statt der Fläche BD eine, die noch einmahl so groß ist, statt des Theils vom Querschnitte des Wasserstrahls der ganze Querschnitt, wie er AB auf beyden Seiten ungiebt, und so bleibt dafür der Satz unter dieser Ausdrückung völlig eben so wahr.

IV. Hr. Bern. erinnert ausdrücklich, diese ganze Theorie gründe sich auf die physische Hypothese, daß alles Wasser parallel mit der Fläche ablaufe. Dieses angenommen, sey alles übrige mathematisch erwiesen.

An der Hypothese aber zweifelt Hr. Euler. Er glaubt, sie finde nur bey den mittelsten Canälen

nälen statt; je weiter die Canäle sich von a hinaus gegen P zu anfangen, desto weniger habe sich das Wasser an ihrem Ende bey der Fläche, von der senkrechten Richtung auf die Fläche, die es im Anfange hatte, abgelenkt, desto geringer sey also auch die Summe der Kräfte 328. VIII; (nähmlich cos λ ist desto grösser, je weniger sich das Wasser abgelenkt hat) oder der Stoß eines solchen Canals. Er schliesst daraus: der Stoß des ganzen Wasserstrahls sey viel kleiner als ihn (II.) angiebt; Da wir aber gar nichts sehen, woraus sich die Krümmungen der Theile des Wasserstrahls bestimmen liessen, so hat man auch bisher keine Hoffnung zu einer sicherern Theorie des Stosses.

V. Wenn die Wasserhöhe für die Höhe genommen wird, die der Geschwindigkeit zugehört, und der Querschnitt des Wasserstrahls hier und in 325. einerley ist, so giebt gegenwärtige Theorie den Stoß noch einmahl so groß als 325; II; Aber hier soll man für des Cylinders Grundfläche den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahls nehmen (156) und dorten nahm man dafür die grössere Fläche der Oeffnung. Dorten brauchte man also einen Cylinder, dessen Höhe nur halb so groß war als hier; aber seine Grundfläche war' grösser als hier. Nun könnte es leicht seyn, daß die Fläche der Oeffnung fast noch einmahl so groß wäre, als der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahls (im VI. Vers. in 122. war sie etwa anderthalbmahl so

groß)

groß) wenn also gegenwärtige Theorie richtig ist, so kann doch eine Rechnung nach 325; II. etwas damit und mit der Erfahrung übereinstimmendes geben. Bey einer solchen Rechnung ist des Cylinders Höhe zu klein, seine Grundfläche zu groß, und beyde Fehler zusammen können einander aufheben.

So wird gerechtfertiget, was 323; VIII. am Ende steht, und so müsste sich allenfalls auch Gravesands Versuch (*) beantworten lassen, der den Stoß nach 325; II; berechnet, 127 Gran, nach der Erfahrung 119 Gran angibt. Daß indessen diese genaue Uebereinstimmung doch wohl nur ein Zufall seyn könnte, möchte dadurch muthmaßlich werden, weil Graves. selbst gesteht, daß seinen Versuch mit dieser Theorie zu vergleichen, unterschiedene Betrachtungen und selbst andere Versuche müssen angestellt werden, bey deren jedem wohl kleine Unrichtigkeiten möglich sind; Er lässt einen elfenbeinernen Cylinder an ein paar Fäden herab, vor der Oeffnung hängen, daraus das Wasser horizontal strömet, und bemerkt, wie viel der Cylinder durch den Stoß des Wassers gehoben wird. Dieß Verfahren ist also im Wesentlichen einerley mit dem Pendel (278; 283.).

330. Hr. Dan. Bernoulli hat selbst eine andere Theorie des Stosses gegeben (**), die sich ohne

(*) El. Phys. T. I. §. 1769.

(**) de pressione aquar. fluent. Com. Ac. Petrop. T. II. p. 304.

ohngefähr auf solche Begriffe, wie (317. II.) angenommen worden, gründet. Der Stoß gleicht nach derselben einem Wasserprisma, dessen Grundfläche der Querschnitt des Wasserstrahls die Höhe viermahl so groß ist, als die Höhe der Geschwindigkeit. Das gäbe den Stoß noch einmahl so groß als die vorhergehende Theorie. B. stellte einen Versuch an, und glaubte den Stoß nur dem Cylinder gleich zu finden, der die Höhe der Geschwindigkeit zur Höhe hat, wie (325), dieser Versuch bestätigte also seine Theorie nicht, den Versuch selbst aber erkennt er in der vorhin angeführten Abhandlung für unzuverlässig. Newton giebt eben diese Theorie (*) mit andern Ausdrückungen. Hr. d'Alembert (**) findet, was man will, den Stoß dem Cylinder von der einfachen Höhe der Geschwindigkeit oder von der doppelten gleich. Den Satz (329; III.) hat Hr. Dan. Bern. auch in der Hydrodynamik gelehrt (***), aber nicht so umständlich ausgeführt, als in der (325; VIII.) angezeigten Abhandlung, die neuer ist als jenes Buch.

331. Bey dieser Unsicherheit der blossen Theorie könnte man wohl wieder einige Erfahrungen wünschen. Solche, wie (321; II.), sind deswegen nicht vollkommen sicher, weil man da die wirkliche Geschwindigkeit des Wassers nicht

(*) Princ. Lib. II. Prop. 38. ed. 1. et 2.
(**) de l'equil. et du mouv. des fluides art. 249.
(***) Sect. 13. §. 16.

nicht zuverlässig weiß (325; VIII.). Ein Mittel, diese wirkliche Geschwindigkeit zu finden, ist (83) angegeben. Will man sich desselben bedienen, so muß man den Stoß des Wassers, das bey N 13 Fig. anfangs horizontal herausschiesst, gleich daselbst auffangen, und mit Gewichten vergleichen. Dazu liesse sich etwa folgende Vorrichtung erdenken: VTS 28. Fig. sey ein Winkelhebel, etwa von Holz, sein Winkel bey T sey ein rechter. Man henke ihn über irgend einer Unterlage so auf, daß der Schenkel TV gerade vor N 13. Fig. herabhängt, und das Wasser, das bey N herausprützt, auf diesen Schenkel nach der Richtung GX senkrecht anstösst. Wenn die Unterlage, auf welcher der Arm TS ruht, sich in H befindet, und man setzt, eben daselbst sey der Schwerpunct des Hebels, so wird der Hebel für sich allein sich so stellen, daß der Arm TS wagrecht, der Arm TV lothrecht ist: Stösst nun das Wasser nach GX daran, so wird es den Arm TV aus seiner lothrechten Lage bringen; Um ihn darinnen zu erhalten, wird man am Arme TS, an irgend einer Stelle wie I, ein Gewicht anbringen. Wenn nun dieses Gewicht macht, daß der Arm TV, indem das Wasser immer daran stösst, lothrecht stehen bleibt, so wird das wohl so viel heissen: es erhält den Arm TV, daß er des Wassers Stoß aufhalten kann, und so wird sich wohl etwa vermöge der Eigenschaften des Winkelhebels, oder vermöge solcher Kenntnisse, die sich darauf grün-

den,

den, das Gewicht bey I, mit der Stärke des Stosses bey X vergleichen lassen.

Den Weg zu dieser Vergleichung bahnt folgender Lehnsatz aus der Statik, den ich etwas allgemeiner vortrage, als nur zu gegenwärtiger Absicht unumgänglich nöthig wäre, um zu zeigen, wie sich die Zusammensetzung der Kräfte anwenden lässt, wenn eine Kraft in eine Stelle eines gegebenen Körpers, eine andere Kraft in eine andere Stelle wirkt.

332. Aufg. Ein Winkelhebel VTL, wo die beyden Schenkel bey T einen rechten Winkel machen, hat seine Unterlage in H; sein Schwerpunct ist in L und sein eignes Gewicht = c; In I ist an ihn ein Gewicht = p angebracht, das lothrecht herabzieht, und auf X wirkt eine bewegende Kraft = q nach der horizontalen Richtung GX; Man sucht die Vergleichung zwischen q; c; p:

Aufl. I. Weil man sich vorstellen kann, der Arm TS sey eine mathematische Linie, die in L das eigne Gewicht des Hebels, in I das Gewicht = p habe (Stat. 50.), so suche man, wie sich diese beyden Gewichte in eine Stelle zusammen bringen liessen. Diese Stelle sey M; so ist $HM = \frac{HL.\ c + HI.\ p}{p + c}$ (Stat. 45.).

Man kann sich also statt des wirklich schweren Arms TS, an dem in I ein Gewicht hängt, eine mathematische Linie TS vorstellen, an der in

M ein Gewicht p + c hängt, das Gewicht des Arms TV kömmt hier gar nicht in Betrachtung, wenn er vertical herabhängt, denn in dieser Stellung muß sein Gewicht völlig von der Unterlage, nebst der Kraft, die ihn in dieser Stellung erhält, getragen werden, (Stat. 18.). Man kann also annehmen, die Kraft q, die nach GX in ihn wirkt, werde an einer blossen mathematischen Linie TV angebracht; und also fragt es sich, wie sich die Kräfte q an X und p + c an M verhalten müssen, damit TV lothrecht, TS wagrecht bleibt.

II. Die verticale Richtung der Kraft in M, ist MR, und der Kraft in X horizontale Richtung XR, beyde stossen in R zusammen, so muß aus beyden Kräften, deren Richtungen XR, MR sind, eine mittlere entstehen, deren Richtung durch die Unterlage geht, und also HR ist, sonst können beyde Kräfte einander nicht im Gleichgewichte erhalten. (Stat. 58.). Also ist (Stat. 65.)

die Kraft nach XR: Kraft nach MR = sin HRM: sin HRX; Aber HRX = RHM; Also sin HRM: sin HRX = HM: MR = HM: TX; die vorhin bekannten Werthe der beyden Kräfte also gebraucht, ist; $q : p + c = HM : TX$;

folglich $q = \frac{HL.\ c + HI.\ p}{TX}$ wo also q gegeben ist, wenn man alles übrige weiß.

III.

III. Henkt man den Hebel in seinem Schwerpuncte auf, wie 331. annimmt, so ist HL = o und $q = \frac{Hl.\ p}{TX}$.

333. So ist von Dan. Bernoulli selbst in der 325. VIII. angeführten Abhandlung ein Versuch angestellt worden und andere die Kraft angestellt hat, befinden sich zweymahl in den Abhandlungen der petersburgischen Akad. der Wissenschaften (*). Die Anstalten, die Kraft dazu gemacht hat, sind folgende. Er bediente sich eines grossen viereckichten hölzernen Gefässes, wie etwa PH, 13. Fig. vorstellen könnte. Da war AD = 15 londner Zoll und die Höhe 2 Zoll. Er setzte darinn bey N, eine glatte Röhre von Messing (s. 87. u. 123.). Der Winkelhebel war von Eichenholze, in seinem Schwerpuncte aufgehenkt; am Arme HS, ließ sich ein Ring mit einer daran hängenden Wageschale nach Gefallen verschieben und so in jede Stelle I, bringen; bey X., wo das Wasser anstossen sollte, befand sich eine kleine hölzerne Scheibe, die den Stoß des Wassers senkrecht auffing. Das Gefäß stand in einem hölzernen Kasten, auf dessen vollkommen horizontalem Boden sich genau ab-

(*) de vi venae aqueae contra planum incurrentis experimenta; auct. Georg. Kraft T. VIII. p. 253. und eben dieselben T. XI. p. 234. nach einer andern in der Ordnung der Versuche und Kleinigkeiten unterschiedenen Abschrift.

abmessen ließ, wie weit das Wasser, wenn ihm nichts im Wege war, sprützte; daß der Arm TV vertical stand, prüfte man durch ein daran gehaltenes Loth; und man verschob die Wagschale mit Gewichten daran, am Arme HS so lange, oder man vermehrte die Gewichte so lange, bis der Arm TV, während daß der Wasserstrahl an ihn anstieß, immer lothrecht stehen blieb. So sind die Versuche angestellt worden, von denen ich etwas, das die Geschwindigkeiten betrifft, schon (87; 89.) erwähnt habe. Man begreift, daß unter dem Gewichte bey I; nicht nur das verstanden wird, was in der Wagschale lag, sondern das Gewicht der Schaale, mit Ringe und Schnur auch dazu gehört.

II. Um das Gewicht einer gegebenen Menge Wasser zu haben, füllte Kr. mit eben dem Wasser, dessen er sich hier bediente, einen Cylinder an, dessen Durchmesser = 675; die Höhe = 685 (die Einheit ist 86 angegeben), das Wasser darinnen wog 13111 Gran, deren 7680 ein holländisches Pfund ausmachen, also 60 auf ein Quentchen gehen; der Röhre, woraus das Wasser sprützte, Durchmesser war 89.

334. I. Bey Krafts erstem Versuche gehörte die Geschwindigkeit der Höhe 2557 (86). Wollte man also berechnen, wie viel das Wasser wiegt, das einen Cylinder ausfüllt, dessen Durchmesser 89; die Länge 2557 ist, so sagte man (Geom. 60 S. 8. Zus.) aus (334. II.) $675^2 . 685 : 89^2 .$

2557

2557 = 131111 : 850,83; die vierte Zahl habe ich so durch die Logarithme gefunden. Kraft setzt sie $850\frac{2}{3}$.

Dieses Gewicht verdoppelt gäbe nach Bern. Theorie (329; III.) die Grösse des Stosses = 1701,66 Gran.

Die Schale mit Ring und Schnuren wog 829 Gran, man musste bey dem Versuche noch 720 Gran zulegen, also war in (332. III.) p = 1549 Gran; Ferner HI = 2010; TX = 2218 von der geraden Linie an gemessen, die durch das Mittel des Arms ST gieng. Daraus kömmt $q = \frac{2010}{2218} \cdot 1549 = 1403,7$ Gran. Kraft hat $1403\frac{2}{3}$.

II. Der Stoß, wie ihn die Theorie angiebt, heisse r; so ist hier $r - q = 297,9$ oder 298 Gran, oder um so viel giebt die Theorie den Stoß grösser an, als die Erfahrung.

III. Kraft begnügt sich blos, diesen Unterschied anzugeben. Mich deucht, einen bestimmten Begriff, wie weit die Theorie von der Erfahrung abweicht, giebt nur die Verhältniß dieses Unterschiedes, zu dem, was die Theorie forderte. Ich berechne also $\frac{r-q}{r} = \frac{298}{1702} = 0,11$ so daß der Unterschied etwas über $\frac{1}{10}$ der Theorie beträgt, oder die Erfahrung den Stoß etwa um $\frac{1}{10}$ dessen, was ihn die Theorie angab, kleiner zeigt.

groß) wenn also gegenwärtige Theorie richtig ist, so kann doch eine Rechnung nach 325; II. etwas damit und mit der Erfahrung übereinstimmendes geben. Bey einer solchen Rechnung ist des Cylinders Höhe zu klein, seine Grundfläche zu groß, und beyde Fehler zusammen können einander aufheben.

So wird gerechtfertiget, was 323; VIII. am Ende steht, und so müsste sich allenfalls auch Gravesands Versuch (*) beantworten lassen, der den Stoß nach 325; II; berechnet, 127 Gran, nach der Erfahrung 119 Gran angibt. Daß indessen diese genaue Uebereinstimmung doch wohl nur ein Zufall seyn könnte, möchte dadurch muthmaßlich werden, weil Graves. selbst gesteht, daß seinen Versuch mit dieser Theorie zu vergleichen, unterschiedene Betrachtungen und selbst andere Versuche müssen angestellt werden, bey deren jedem wohl kleine Unrichtigkeiten möglich sind; Er lässt einen elfenbeinernen Cylinder an ein paar Fäden herab, vor der Oeffnung hängen, daraus das Wasser horizontal strömet, und bemerkt, wie viel der Cylinder durch den Stoß des Wassers gehoben wird. Dieß Verfahren ist also im Wesentlichen einerley mit dem Pendel (278; 283.).

330. Hr. Dan. Bernoulli hat selbst eine andere Theorie des Stosses gegeben (**), die sich ohn-

(*) El. Phys. T. I. §. 1769.

(**) de pressione aquar. fluent. Com. Ac. Petrop. T. II. p. 304.

ohngefähr auf solche Begriffe, wie (317. II.) angenommen worden, gründet. Der Stoß gleicht nach derselben einem Wasserprisma, dessen Grundfläche der Querschnitt des Wasserstrahls die Höhe viermahl so groß ist, als die Höhe der Geschwindigkeit. Das gäbe den Stoß noch einmahl so groß als die vorhergehende Theorie. B. stellte einen Versuch an, und glaubte den Stoß nur dem Cylinder gleich zu finden, der die Höhe der Geschwindigkeit zur Höhe hat, wie (325), dieser Versuch bestätigte also seine Theorie nicht, den Versuch selbst aber erkennt er in der vorhin angeführten Abhandlung für unzuverlässig. Newton giebt eben diese Theorie (*) mit andern Ausdrückungen. Hr. d'Alembert (**) findet, was man will, den Stoß dem Cylinder von der einfachen Höhe der Geschwindigkeit oder von der doppelten gleich. Den Satz (329; III.) hat Hr. Dan. Bern. auch in der Hydrodynamik gelehrt (***), aber nicht so umständlich ausgeführt, als in der (325; VIII.) angezeigten Abhandlung, die neuer ist als jenes Buch.

331. Bey dieser Unsicherheit der blossen Theorie könnte man wohl wieder einige Erfahrungen wünschen. Solche, wie (321; II.), sind deswegen nicht vollkommen sicher, weil man da die wirkliche Geschwindigkeit des Wassers nicht

(*) Princ. Lib. II. Prop. 38. ed. 1. et 2.
(**) de l'equil. et du mouv. des fluides art. 249.
(***) Sect. 13. §. 16.

nicht zuverlässig weiß (325; VIII.). Ein Mittel, diese wirkliche Geschwindigkeit zu finden, ist (83) angegeben. Will man sich desselben bedienen, so muß man den Stoß des Wassers, das bey N 13 Fig. anfangs horizontal herausschiesst, gleich daselbst auffangen, und mit Gewichten vergleichen. Dazu liesse sich etwa folgende Vorrichtung erdenken: VTS 28. Fig. sey ein Winkelhebel, etwa von Holz, sein Winkel bey T sey ein rechter. Man henke ihn über irgend einer Unterlage so auf, daß der Schenkel TV gerade vor N 13. Fig. herabhängt, und das Wasser, das bey N herausprützt, auf diesen Schenkel nach der Richtung GX senkrecht anstösst. Wenn die Unterlage, auf welcher der Arm TS ruht, sich in H befindet, und man setzt, eben daselbst sey der Schwerpunct des Hebels, so wird der Hebel für sich allein sich so stellen, daß der Arm TS wagrecht, der Arm TV lothrecht ist: Stösst nun das Wasser nach GX daran, so wird es den Arm TV aus seiner lothrechten Lage bringen; Um ihn darinnen zu erhalten, wird man am Arme TS, an irgend einer Stelle wie I, ein Gewicht anbringen. Wenn nun dieses Gewicht macht, daß der Arm TV, indem das Wasser immer daran stösst, lothrecht stehen bleibt, so wird das wohl so viel heissen: es erhält den Arm TV, daß er des Wassers Stoß aufhalten kann, und so wird sich wohl etwa vermöge der Eigenschaften des Winkelhebels, oder vermöge solcher Kenntnisse, die sich darauf grün-

den,

den, das Gewicht bey I, mit der Stärke des Stosses bey X vergleichen lassen.

Den Weg zu dieser Vergleichung bahnt folgender Lehnsatz aus der Statik, den ich etwas allgemeiner vortrage, als nur zu gegenwärtiger Absicht unumgänglich nöthig wäre, um zu zeigen, wie sich die Zusammensetzung der Kräfte anwenden lässt, wenn eine Kraft in eine Stelle eines gegebenen Körpers, eine andere Kraft in eine andere Stelle wirkt.

332. Aufg. Ein Winkelhebel VTL, wo die beyden Schenkel bey T einen rechten Winkel machen, hat seine Unterlage in H; sein Schwerpunct ist in L und sein eignes Gewicht = c; In I ist an ihn ein Gewicht = p angebracht, das lothrecht herabzieht, und auf X wirkt eine bewegende Kraft = q nach der horizontalen Richtung GX; Man sucht die Vergleichung zwischen q; c; p:

Aufl. I. Weil man sich vorstellen kann, der Arm TS sey eine mathematische Linie, die in L das eigne Gewicht des Hebels, in I das Gewicht = p habe (Stat. 50.), so suche man, wie sich diese beyden Gewichte in eine Stelle zusammen bringen liessen. Diese Stelle sey M; so ist $HM = \frac{HL.\ c + HI.\ p}{p + c}$ (Stat. 45.).

Man kann sich also statt des wirklich schweren Arms TS, an dem in I ein Gewicht hängt, eine mathematische Linie TS vorstellen, an der in

IV. Die Wasserhöhe über der Oeffnung war 3738; daraus berechnet Kraft T. XI. Comm. den Stoß nach der Theorie (325. I.) 1743 Gran, diese Theorie also gäbe den Stoß um 160 Gran kleiner als die Erfahrung, und dieser Unterschied, um welchen die Theorie weniger giebt, als die Erfahrung beträgt $\frac{160}{1243} = 0{,}128$ der Theorie.

V. Kraft erinnert noch bey diesem Versuche, die Röhre habe 218 Theile aus dem Gefässe hervorgeragt, und ihr äuserstes Ende sey von der Scheibe um 135 Theile entfernt gewesen. Wenn er, bey diesem Versuche oder bey den folgenden, ohne den Arm TS mit einem fremden Gewichte zu beschweren, den Arm TV so stellte, daß die Scheibe an die Oeffnung der Röhre rührte, so hieng sie so stark daran, daß sie fast alle Bewegung des Wassers hemmte.

VI. Die Versuche, welche Kraft anführt, lassen sich nach der Ordnung, wie sie T. VIII. Comm. stehen, in folgende Tafel bringen

Versuch	q	r	(r−q):r
I	1403	1701	0,11
II	1463	1720	0,14
III	1486	1651	0,11
IV	1401	1602	0,14
V	1021	1072	0,049
VI	1403	1528	0,088

VII. Der V. Versuch ist Daniel Bernoullis selbst in dem (324; VIII.) angeführten Aufsatze. Die Theorie wäre wohl auser allem Zwei-

fel gesetzt, wenn alle Erfahrungen so genau mit ihr übereinstimmten, als diese, oder auch als die VI; die wieder von Kraften ist. Kraft giebt das Gewicht p in allen seinen Versuchen, den 4. ausgenommen, 1549 Gran an; er hat also nur nach Erfodern die Wagschale verschoben und HI gemessen: Bernoulli hatte an einer Stelle I ein Scheibchen befestigt, auf welches die nöthigen Gewichte allemahl gelegt wurden, der Mittelpunct des Scheibchens bey X. war so weit von T, als der Mittelpunct dessen bey I von H; Man muß voraussetzen, daß die Gewichte auch alle mit ihren Schwerpuncten über diesen Mittelpunct gelegt worden. Daher kömmt in (332. III.) für B. Versuch $q = p$, er erwähnet auch ausdrücklich, sein Winkelhebel sey sehr leicht, und um seinen Zapfen schnell zu bewegen gewesen. Krafts eichner Hebel scheint dieses nicht so sehr zu versprechen, und er braucht statt B. gleicharmigter Wage, eine Art von Schnellwage, wie es mir vorkömmt, mit mehr Gefahr kleine Fehler zu begehen.

334. Man kann sich den anstossenden Wasserstrahl, der Länge nach in parallele, gleich dicke Reihen von Wassertheilchen getheilt vorstellen, eine solche Reihe stösst alsdenn so stark an, als die andere, wenn eine so viel Geschwindigkeit hat als die andere, und wenn man sich also die Ebene, welche gestossen wird, in gleiche Theile getheilt einbildet, auf deren jeden eine solche Reihe Wassertheilchen anstösst, so kann

man sich die Wirkungen aller dieser einzelnen Stösse, in der Ebene Schwerpuncte vereinigt vorstellen. Denn legte man eine gleiche Ebene horizontal, und setzte auf jeden ihrer Theile, ein Gewicht so groß als der Stoß einer solchen Reihe Wassertheilchen, so könnte man die Wirkung aller dieser Gewichte im Schwerpuncte der Ebene vereinigen, und diese Gewichte wirken, nur nach verticalen Richtungen, so, wie die Stösse nach horizontalen.

Es sey also des Wasserstrahls Querschnitt $= Z$; die Geschwindigkeit des Wassers gehöre der Höhe u; so gleicht der Stoß dem Gewichte einer Wassersäule, deren Innhalt $= 2Z.u$, und die Ebene bleibt stehen, wenn man in ihrem Schwerpuncte, der Richtung des Wasserstrahls gerade entgegen, eine Kraft anbringt, die diesem Gewichte gleich ist.

Memoria del Sig. Ab. Pietro Zuliani della Forza osia azione d'una vena d'acqua che esce da un vaso, e colpisce direttamente un plano. In: Saggi scientifici e letterarii dell' Accademia di Padova Tomo III. P. I. (1794) p. 337. Die bekannten Versuche und Folgerungen daraus . . . wie sie sich meist bey mir im vorhergehenden finden, . . . gesammelt und beurtheilt. Herr Z. glaubt, diese Lehre sey noch nicht zur Vollkommenheit gebracht.

335. Wenn nicht alle Reihen von Wassertheilen (334) gleiche Geschwindigkeit hätten, aber

aber das Gesetz, nach dem sich die Geschwindigkeit bey ihnen ändert, bekannt wäre, so könnte man doch diesen Satz anbringen. Ein leichtes Exempel ist folgendes.

Aufg. In einem horizontalen Flusse steht ein Bret, des Flusses Richtung gerade entgegen, man fragt nach dem Stosse des Wassers darauf.

Aufl. In der 18. Fig. mag HG das Bret bedeuten, H in des Flusses Oberfläche, FG im Boden seyn, auch sey HP = u; die Höhe, der die Geschwindigkeit des Wassers in P gehört (265). Auch sey PM = b; PK = du, so ist der Stoß auf das Element PN; 2u. bdu; und der Stoß auf HN; bu^2 und auf das ganze Bret b. $HF^2 = HF.HG$; noch einmahl so groß, als der Druck stillstehenden Wassers wäre (11).

Aus dieser Uebereinstimmung des Stosses und des Drucks erhellt auch, daß eine Kraft, die das Bret gegen den Stoß erhalten sollte, im Mittelpuncte des Drucks (20) müsste angebracht seyn.

Wer 324; II; annimmt, wie Belidor (*), für den ist gegenwärtige Untersuchung mit (11) völlig einerley.

Vom schiefen Stosse.

326. I. Beym senkrechten Stosse läßt sich ohne Schwürigkeit der Wasserstrahl etwa vers

(*) Archit. hydraul. I. Part. T. I. art. 570.

mittelst einer Verticalfläche durch AB, in ähnliche Hälften theilen; (329. III.) aber beym schiefen findet dieses nicht wohl statt. Die Vorstellung sich zu erleichtern, nehme man an, der Wasserstrahl sey ein Parallelepipedum, und cabf 29. Fig. sein Durchschnitt mit einer verticalen Ebene, diese Ebene schneidet die Fläche, auf welche der Wasserstrahl schief stösst, in AB. Wollte man sich nun auch gleich eine Linie LP längst dieses Durchschnittes vom Wasserstrahle mitten zwischen ca und fb gezogen vorstellen, die ihn halbirte, so liesse sich doch nicht annehmen, daß dem Theile, welchen ca begränzt, eben das widerführe, was dem widerfährt, welchen fb begränzt. Gesetzt, das Wasser liefe von jenem längst aA, von diesem längst bB hin, so änderte es seine Richtung dorten um den spitzigen Winkel caB, hier um den stumpfen fbA, der mit jenem 2R macht.

II. Man wäre aber auch gar nicht berechtiget, diese Theilungslinie mitten zwischen den Gränzen des Wasserstrahls zu ziehen. Diese beyden Theile, die nach aA, bB abflössen, könnten irgend eine andere Verhältniß haben, die uns gänzlich unbekannt ist, so wie die Verhältniß der Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser nach diesen beyden Seiten abfliesst.

III. Nähme man diese beyden Verhältnisse als gegeben an, so liesse sich auf jeden Theil des Wasserstrahls besonders, 328; VIII. anbringen, wo λ für den einen caB, für den andern fbA

fbA wäre; beydes zusammen gäbe den Stoß auf AB nuch der Richtung ca; und dieser Stoß mit sin caB multiplicirt, gäbe die senkrechte Wirkung auf die Fläche.

IV. Noch käme eine andere Untersuchung hiebey vor. Indem sich der Theil cLPa von seiner bisherigen Richtung ablenkt, muß er nicht nur an der Seite PA sondern auch an der Seite LP gehalten werden, sonst, wenn ihn an der letzten Seite nichts aufhält, fliesst etwas von ihm von P nach B zu. Dieses kann man wohl so ausdrücken: LP leide einen Druck nach der Richtung PB. Man kann aus diesem Drucke den suchen, der senkrecht auf LP gerichtet ist.

Wenn man eben so mit dem Theile LfbP verfährt, so erhellt, daß sich LP zwischen zwo senkrechten entgegengesetzten Drückungen befindet, und mit beyder Unterschiede der stärkern nachgetrieben wird. Soll es also nicht weichen, das ist: soll die Abtheilung des Wasserstrahls durch LP ungeändert bleiben, so muß man aus diesem Drucke auf LP einen herleiten, der senkrecht auf AB gerichtet ist, und dadurch aufgehalten wird. So hält AB diesen Druck, und den Stoß (III) zusammen, und das ist endlich die völlige Gewalt, die AB leidet.

V. In 329. wird die dortige AB auch von beyden Hälften des dortigen Wasserstrahles gedruckt, aber von einem so stark als vom andern, und nach Richtungen, die mit der dortigen BD parallel sind. Daher heben diese beyden

den Drückungen einander auf, und es entstehet aus ihnen keine Wirkung auf die dortige Fläche.

VI. Auf diese Art hat Daniel Bernoulli die Sache betrachtet (*). Berechnungen nach diesen Begriffen hier anzubringen, ist desto unnöthiger, da die Verhältnisse, die hiebey zum Grunde müssten gelegt werden (III.) gänzlich unbekannt sind; und die Rechnungen also völlig unbrauchbar wären.

337. **Voraussetzung.** Es ist verstattet, die Gesetze des schiefen Stosses, wie Höh. Mech. III. Absch. 174. bey festen Körpern geschehen ist, auf flüssige anzuwenden.

Ich nehme dieses mit allen, die über diesen Gegenstand geschrieben haben, an, und ausserdem muß man aller Berechnung des schiefen Stosses entsagen. Indessen macht Dan. Bernoulli, vermöge des 336. angeführten, Bedenklichkeiten dagegen. Mir ist nicht bekannt, daß jemand hierüber Versuche angestellt hätte.

338. I. Man richte durch b 29. Fig. in der Ebene fbac ein Perpendikel auf f. Durch dieses Perpendikel lege man eine Ebene senkrecht auf fbca. Die schneidet also den Wasserstrahl senkrecht. So viel von ihr als den völligen Wasserstrahl auffängt, ist ein Rechteck, dessen Höhe nur angegebenes Perpendikel ist, die Grundlinie, eine Linie von gegebener Länge, auf jenes Per-

(*) am 325. angef. O. P. II. §. 12.

Perpendikel und so auf die Ebene fbac senkrecht. Die Fläche dieses Rechtecks sey $= z^2$.

II. Durch ab lege man eine Ebene senkrecht auf fbac; Sie schneidet den Wasserstrahl schief, ein Rechteck auf ihr, das ein Paar Seiten der Linie ab parallel und gleich hat. Die Grundlinie mit der in (I) angegebenen einerley, und ihr gegenüber eine Parallele gleiche fasst auch den ganzen Wasserstrahl, wenn ihn das Rechteck (I) nicht aufgehalten hat.

III. Die beyden Rechtecke nenne ich I senkrechte, II schiefen Querschnitt des Wasserstrahls. Ein Balken, einmahl senkrecht auf seine Länge, dann schief durchschnitten, aber so, daß beyder Schnitte Ebenen senkrecht auf die Ebene stehn, die den Balken seiner Länge nach halbirt, zeigt dergleichen Querschnitte.

IV. Es sey der Winkel cab $= \theta$, so verhält sich der senkrechte Querschnitt zum schiefen $= 1 : \sin\theta$, der senkrechte ist des schiefen orthographische Projection (An. endl. Gr. 520).

V. Nennt man also den schiefen Querschnitt $= T$, so ist $T = z^2 : \sin\theta$.

VI. Ein Parallelepiped, dessen Grundfläche das Rechteck T ist, jede seiner vier Kanten $=$ fb; hat zur Höhe fb $\sin\theta$; und also zum Innhalte fb. z^2 wie das Parallelepiped, das bey gleichen Kanten das Rechteck (I) zur Grundfläche hätte.

339. Aufg. Die Wirkungen des Wasserstrahls auf beyde Querschnitte zu vergleichen.

Aufl. I. Es sey fb der Weg, den das Wasser in einer Secunde zurücklegt; des Wassers Geschwindigkeit gehöre der Höhe v; also fb = 2. $\sqrt{v.g.}$

II. So fliesst in einer Secunde gleichviel Wasser auf jeden der beyden Querschnitte. Von so viel Wassertheilchen, als der Raum fb. z^2 enthält, stösst jedes an einen der beyden Querschnitte mit einer Geschwindigkeit an, die der Höhe v gehört, nur an den ersten senkrecht, an den andern unter dem Winkel θ. Was mit jedem vorgeht, nachdem es gestossen hat, betrachte ich jezo nicht (316; II).

III. Was auf den senkrechten Querschnitt von allen diesen Stössen gewirkt wird, heisse = S; so ist S. sin θ, was von allen diesen Stössen auf den schiefen gewirkt wird.

Nähmlich die Bewegung des Wassertheilchens nach der Richtung fb, wird in zwo zerlegt, eine senkrecht auf ab, die andre mit ab parallel. Nur der ersten ist der schiefe Querschnitt hinderlich, die andre geht bey ihm vorbey.

IV. Diese Wirkung = S. sin θ, strebt also jeden Punct des schiefen Querschnittes nach einer Richtung zu treiben, die auf den schiefen Querschnitt senkrecht ist, also mit PY gleichlaufend, wenn BPY = 90 Gr. in der Ebene fbac ist. 29 Fig.

340. Aufg. In nur genannter Ebene mache PG mit PY einen willkührlichen Winkel,

YPG

YPG = ζ. Man kann sich vorstellen, aus der Wirkung (339; IV) entstehe im schiefen Querschnitte ein Trieb, daß jeder seiner Puncte nach einer Linie mit PG parallel, gehen will. Wie groß ist dieser Trieb?

Aufl. I. Man zerlege die Wirkung nach PY, in zweene Theile, einen nach PG, den andern senkrecht auf PG. Diese beyden Theile verhalten sich zu der Wirkung nach PY, wie $\cos\zeta$ und $\sin\zeta$ zum Sinus totus. So ist der Trieb nach PG; = S. $\sin\theta$. $\cos\zeta$ senkrecht auf PG; = S. $\sin\theta$. $\sin\zeta$.

II. PG sey in der Verlängerung von LP; also $\zeta = 90° - \theta$; so ist der Trieb nach des Wasserstrahls verlängerter Richtung = S. $\sin\theta^2$ und senkrecht auf diese Richtung = S. $\frac{1}{2}$. $\sin 2\theta$.

III. Man setze, die Linie, die ich PG genannt habe, sey PH, daß BPH = η (unten 355; II;) also $\zeta = \eta - 90°$. So ist der Trieb nach PH; = − S. $\sin\theta$. $\sin\eta$; und senkrecht auf PH; = − S. $\sin\theta$. $\cos\eta$.

IV. Wenn man aus dem Triebe nach PY, zweene herleitet; und nur einer wirksam bleiben soll, so muß der andre durch etwas gehemmt werden, wie in Stat. 98; 99; eine Kraft, die senkrecht auf die schiefe Ebene gerichtet ist, von der schiefen Ebene getragen wird.

V. Was hie in II; senkrecht auf die Richtung des Wasserstrahls entsteht, kömmt unten in der Lehre vom Stosse auf runde Körper vor, und da wird gewiesen, wie es aufgehoben wird.

VI.

VI. Den Trieb senkrecht auf PH (III) hält die Festigkeit des Rades (unten 355; II.)

341. Aufg. Den Stoß des Wasserstrahls auf den schiefen Querschnit (339; III) durch das Gewicht einer Wassersäule auszudrucken.

Aufl. I. S (339; III) wird in (329; III) durch das Gewicht einer Wassersäule angegeben. Man drucke alle Längen in Fussen aus, und setze das Gewicht eines Kubikfusses Wasser = n Pfund, so ist $S = 2.\ v.\ z^2.\ n$ für den Stoß auf den senkrechten Querschnitt. Also der Stoß auf den schiefen, die Fläche des schiefen in den Ausdruck gebracht, $= 2.\ v.\ n.\ \sin\theta^2.\ T$ (338; II. und 339; III.).

II. Nimmt man, daß andrer flüssigen Materien senkrechter Stoß, sich auch so ausdrucken lässt, wie des Wassers seiner, so bedeutet n das Gewicht eines Kubikfusses einer solchen flüssigen Materie. Auch kann es überhaupt die Dichte der flüssigen Materie bedeuten, das Gewicht eines gegebenen körperlichen Raums mit dieser Materie ausgefüllt, wenn man z, in eben dem Längenmaasse ausdruckt, durch welches man den körperlichen Raum bestimmt. So könnte für Windmühlen (Stat. 136) n die Dichte der Luft bedeuten, wenn man annähme, sie stiesse nach einerley Gesetze mit dem Wasser.

III. Bleibt man nur bey Wasser, so kann man n weglassen, und sagen, der Stoß auf den schiefen Querschnitt, beträgt so viel, als ein

Was-

Wasserprisma wiegt, dessen Innhalt = 2. v. T. $\sin\theta^2 = 2.v.z^2.\sin\theta$.

IV. Und von diesem Stosse beträgt der Theil, welcher den schiefen Querschnitt nach der Richtung des Wasserstrahls treibt (340; II) soviel, als das Gewicht eines Wasserprisma, dessen Innhalt = 2. v. T. $\sin\theta^3$.

V. Aus 334; auch, wie es in (Stat. 135) von Windmühlenflügeln gezeigt wird, begreift man, daß sich die Kraft, wodurch der schiefe Querschnitt gehalten wird, dem Stosse nicht auszuweichen, in seinem Schwerpuncte anzubringen ist.

VI. Wenigstens, wenn man nicht daran denkt, daß die obern Wassertheilchen, vermöge ihres Gewichts, auf die untern drucken.

VII. Teoria fisico matematica intorno al moto de' Liquidi uscenti da fori delle conserve del Sig. Car. Lorgna Memorie della Società Italiana T. IV. p. 369; Verona 1788.

Wenn die Geschwindigkeit der Höhe v gehört, α die Schiefe des Stosses ist, z^2 des Strahls Querschnitt senkrecht auf ihn; sey der schiefe Stoß $z^2.\sin\alpha.\ 2.\ v$ pag. 423. blos Schlüsse, nicht Erfahrungen.

342. Zus. In einer Secunde geht durch den senkrechten Querschnitt die Wassermenge $2z^2.\ v$ (g. v.) (166), und eben soviel fällt in einer Secunde, auf den schiefen, zum vorausgesetzt, daß die Fläche bey AB groß genug ist, den ganzen Wasserstrahl aufzufangen. Setzt man diese

Grösse = A; so wird in (341.) der Stoß auf die schiefe Fläche A sin θ. $\sqrt{\frac{v}{g}}$. Das Gewicht einer Wassersäule nähmlich, welche diesen Innhalt hätte, drückt die Gewalt aus, mit welcher die Ebene ab nach einer Richtung PY getrieben wird, die auf ab senkrecht ist. Der letztere Umstand erhellt daraus, weil man eben das, was die Fläche ab von dem schief anstossenden Wasserstrahl leidet, in 339; IV. auf einen solchen Stoß, der auf sie senkrecht ist, gebracht hat.

343. Ich folge in dem nachstehenden meistens einer Schrift, durch welche Hr. Joh. Albert Euler 1754. einen Preiß erhalten hat, der von der kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen auf die Untersuchung der Maschinen, die vom Wasser getrieben werden, gesetzt war (*). Man wird leicht urtheilen, daß dieser Aufsatz mit den Gedanken des ältern Hrn. Eulers übereinstimmt.

344. Die Rechnung wird zwar nach (329; III.) geführt, aber dabey erinnert (**), daß die Wahrheit hievon auf die Grösse der Fläche ankomme, die den Stoß auffängt. Wäre diese Fläche nur so groß, daß sie den Wasserstrahl gleich auffinge, wie wenn ihre Länge = ab 29. Fig.

(*) Enodatio quaestionis: quomodo vis aquae aliusue fluidi cum maximo lucro ad molas circumagendas, aliaue opera perficienda impendi possit. Auct. Io. Alb. Euler. Praemio ornata a Soc. Reg. Sc. Gott. a. d. 9. Nou. 1754. 4.

(**) §. 4.

Fig. wäre, so erklärt Hr. Euler für gewiß, daß der einfache Cylinder (325; II.) müste gebraucht werden, ist sie aber viel grösser, als des Wasserstrahls Querschnitt, wie AB, so wird seinen Gedanken nach die Gewalt, welche diese Ebene leidet, dadurch vergrössert, daß das Wasser noch auf sie wirkt, das an den Seiten abfliesst; und kann, fast noch einmahl so groß (wie nach Dan. Bernoullis Theorie) werden, wenn die Ebene, die den Stoß auffängt, in Vergleichung mit dem Wasserstrahle sehr groß ist. (Die Grössen dieser Flächen bey den Versuchen (333; VI.) sind nicht angegeben. Sie aus den beygefügten Figuren zu beurtheilen, ist wohl eben nicht zuverlässig, sonst zeigt die Figur von Bernoullis Versuche, der doch so genau zutraf, diese Fläche nicht viel grösser als der Wasserstrahl). Hr. E. bemerkt daher, wenn die Fläche nicht viel grösser wäre als den Wasserstrahl, müsse man in (342) den Stoß $\frac{1}{2}$A. sin θ. $\sqrt{\frac{v}{g}}$ setzen, und ihm die dort angegebene Grösse nur alsdenn zutrauen, wenn die Fläche in Vergleichung mit dem Wasserstrahle sehr groß sey. In den Fällen, wo die Fläche des Wasserstrahls Querschnitt nicht so gar vielmahl übertrifft, müsse man zwischen beyden angegebenen Grössen des Stosses ein Mittel nehmen. Die Rechnung wird nach dem grössten Werthe des Stosses geführt, weil man die Maschinen wo möglich,

lich, allemahl so einrichten soll, daß sie die grösste Gewalt vom Wasser auffangen.

Etwas mehr Beweise, und genauere Bestimmungen bey diesen Erinnerungen, wären wohl zu wünschen gewesen. Sie können leicht jemanden, der seine Bequemlichkeit nur mittelmässig liebt, von allen ferneren Rechnungen nach solchen Grundsätzen abschrecken. Etwas hieher gehöriges ist schon 329; IV; erwähnt. Wegen des schiefen Stosses scheinen Dan. Bernoullis Einwendungen (337) bey Hr. Eulern keinen Eindruck gemacht zu haben.

345. Einige Schriftsteller haben den schiefen Stoß so berechnen gelehrt: Wenn eine Fläche $= y^2$ unter dem Winkel θ mit der Geschwindigkeit, die der Höhe v gehört, gestossen wird, so verhielte sich dieser Stoß zum senkrechten von gleichviel Wasser auf die gleiche Fläche wie $\sin\theta : 1$ und wäre also $=$ v. y^2. $\sin\theta$ wenn man den senkrechten Stoß nach (325; II.) rechnet. Aber die Fläche y^2 so gestellt, daß sie mit dem Wasserstrahle den Winkel θ macht, fängt weniger Wasser auf, als wenn sie dem Wasserstrahle senkrecht entgegen stünde, und der Stoß auf sie unter dieser Schiefe ist so vielmahl geringer, als der nur berechnete, so vielmahl die jetzt angezeigte Wassermenge geringer ist, als die ganze. Dieses zu finden, stelle man sich in der 29. Fig. ein Perpendikel durch b auf fb bis an ca vor, dieses fängt alles Wasser im Wasserstrahle auf,

so

so wohl als ab; und verhält sich zu ab = sin θ : 1. Nun nehme man auf ba von b an ein Stück, das diesem Perpendikel gleicht, so fängt dieses Stück nur einen Theil des Wasserstrahls auf, der sich zum ganzen verhält, wie das Stück zu ab oder wie sin θ : 1. Also wird die Fläche y^2 dem Wasserstrahle schief entgegengesetzt, nur den Theil auffangen, der sich zum Ganzen verhält, wie sin θ : 1; und weil der Stoß auf sie vom Ganzen, v. y^2. sin θ wäre, so ist der Stoß dieses Theiles auf sie v. y^2. sin θ^2.

Hier verhält sich also der schiefe Stoß zum senkrechten, wie das Quadrat des Sinus der Schiefe, zum Quadrate des Halbmessers. Nach 341; verhielten sie sich, wie der Sinus selbst zum Halbmesser. Dorten nähmlich nahm man die Fläche AB groß genug an, daß sie auf ab den völligen Wasserstrahl auffangen konnte, hier, fängt die schiefe Fläche von gegebener Grösse = y^2 nur einen Theil des Wasserstrahls auf.

Ist also die Fläche y^2, die vom Wasser schief gestossen wird, kleiner, als daß sie den ganzen Wasserstrahl auffangen könnte, kleiner als $\frac{z^2}{\sin\theta}$ (338; IV.) so wird man den Stoß auf sie = v. y^2. sin θ^2 setzen. Man braucht die einfache Höhe, und nicht die doppelte nach Hrn. Eulers Gedanken (344.).

346. Aufg. Die Fläche AB ist nicht unbeweglich, sondern bewegt sich so, daß alle Punkte

von ihr, gleich geschwinde, nach parallelen Richtungen fortgehen. Man sucht die Wirkung des Stosses auf sie.

Aufl. I. Man setze, sie bewege sich so, daß jede Stelle auf ihr wie A; in der Linie AB nur weiter herunter oder hinauf geht. Hier ändert sich nichts als die Stelle auf ihr, die den Wasserstrahl auffängt, diese Stelle würde bald an einem Ende der Fläche, bald an dem andern seyn. Die Stärke des Stosses also bleibt hier einerley.

Wollte man untersuchen, ob sich die Wirkung des Stosses hiedurch änderte, so müsste man dabey noch andere Umstände von der Fläche annehmen. Gesetzt, AB liesse sich um A wie um einen Mittelpunct drehen, und stellte so einen Hebel vor, so hätte der gleiche Stoß, ein grösser Moment, wenn er nahe an dem andern Ende B, als wenn er in der Mitte unweit A angebracht würde. Solche Umstände werden hier noch nicht betrachtet.

II. Der Punct P der Fläche gehe, nach PG der verlängerten Richtung des Wasserstrahls LP, mit einer Geschwindigkeit fort, die der Höhe x gehört. Es ist klar, daß hier die Fläche dem Stosse zum Theil ausweicht, und daß der Stoß so erfolgt, als wenn die Fläche unbeweglich wäre, die Geschwindigkeit des Wasserstrahls aber nur soviel betrüge, soviel seine jezige Geschwindigkeit der Fläche ihre übertrifft, daß sich also der Stoß nach der relativen Geschwindigkeit richtet.

richtet. Nun ist der Unterschied beyder Geschwindigkeiten $2\sqrt{gv} - 2\sqrt{gx} = 2\sqrt{g}.(\sqrt{v} - \sqrt{x})$, welcher der Höhe $(\sqrt{v} - \sqrt{x})^2$ zugehört (152). Diese Höhe also, statt v in (341) gesetzt, giebt hier den Stoß $2z^2.(\sqrt{v} - \sqrt{x})^2.\sin\theta = \frac{A.(\sqrt{v} - \sqrt{x})^2.\sin\theta}{\sqrt{gv}}$ (342).

III. Geht der Punct P, mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört, nach einer Richtung PH fort, die mit BP den Winkel $BPH = \eta$ macht, so zerlege man diese Bewegung in eine nach PG, und eine nach BP. Weil es hiemit eben so zugeht, wie mit Zerlegung der Kräfte, so verhält sich die nach PG zu der nach $PH = \sin BPH : \sin BPG$ (Stat. 65.) $= \sin\eta : \sin\theta$, da also P nach PH die Geschwindigkeit $2\sqrt{gu}$ hat, so entsteht daraus die Geschwindigkeit $\frac{\sin\eta.2\sqrt{gu}}{\sin\theta}$. nach PG, welche der Höhe $u.\left(\frac{\sin\eta}{\sin\theta}\right)^2$ gehört. Man hat hier blos diese Geschwindigkeit zu betrachten, so wie die, welche der Höhe x zugehörte, in (II.) die Geschwindigkeit nach BP, ändert im Stosse nichts (I.)

Man setze also in (II.) $x = u.\left(\frac{\sin\eta}{\sin\theta}\right)^2$

so wird der Stoß

=

$$= \frac{2.z^2.(\sin\theta\sqrt{v}-\sin\eta.\sqrt{u})^2}{\sin\theta}$$

$$= \frac{A.(\sin\theta.\sqrt{v}-\sin\eta.\sqrt{u})^2}{\sin\theta.\sqrt{(gv)}}$$

Die Richtung dieses Stoßes ist nach PY auf die Fläche senkrecht (342).

347. Zus. Bewegte sich die Fläche nach der Richtung HP dem Wasserstrahle entgegen, so bekäme in diesen Ausdrückungen ihre Geschwindigkeit, die sich wie $\sqrt{u}$ verhält, den entgegengesetzten Werth, und man schriebe nur $+\sin\eta.\sqrt{u}$ alles übrige bliebe.

348. Zus. Wenn der Wasserstrahl senkrecht auf die Fläche stößt, so ist $\theta = 90$ Gr. und der Stoß $\frac{A.(\sqrt{v}-\sin\eta\sqrt{u})^2}{\sqrt{gv}}$, und wenn die Fläche auch nach der Richtung dieses Stoßes ausweicht, wird er $\frac{A.(\sqrt{v}-\sqrt{u})^2}{\sqrt{gv}}$ weil alsdenn auch $\eta = 90$ Gr.

Soll ein Stoß möglich seyn, so muß des Wasserstrahls Geschwindigkeit mehr betragen, als der Fläche Geschwindigkeit nach PG, oder, es ist $\sin\theta.\sqrt{v} > \sin\eta.\sqrt{u}$.

349. Zus. Weil der Stoß nur durch den Sinus des Winkels η ausgedruckt wird, und dieser Sinus einem spitzigen und einem stumpfen Winkel auf einerley Art zugehört, so ist es gleichviel, ob PH mit BP einen gewissen spitzigen Winkel

kel, oder desselben stumpfen Nebenwinkel macht, ob z. E. die Richtung, nach welcher P fortgeht, mit BP einen Winkel von 50 Gr. oder von 130 Gr. macht, und bey zweyerley Bewegungen leidet die Fläche einerley Stoß.

350. I. Daß ich die bisher vorgetragene Berechnung des Stosses nicht für sehr zuverlässig halte, habe ich schon verschiedentlich erklärt. Langsdorf, Lehrb. vierzehntes Capitel hat diese Untersuchung mit viel Fleiß, Scharfsinn, auch eignen sorgfältigen Erfahrungen angestellt.

II. Er betrachtet zuerst: Einzelnen Wasserstrahl von einer Fläche aufgefangen, die groß genug ist, seinen ganzen Stoß zu fassen.

III. Der Geschwindigkeit, mit welcher sich das Stoßwasser fortbewegen würde, wenn ihm keine Fläche entgegenstünde, gehöre die Höhe $= H$, der, mit welcher die Fläche dem stossenden Wasser ausweicht, die Höhe $= h$, die Geschwindigkeiten selbst sind $C = 2. \sqrt{g.H}$; $c = 2. \sqrt{gh}$;

So glaubt er, man könne die ganze Wirkung des Stosses aus zween Theilen zusammensetzen, einem hydrostatischen, welchen der Unterschied der Höhen angiebt, und einem hydraulischen, nach dem Quadrate des Unterschiedes der Geschwindigkeiten. Wenn also z die gestossene Fläche bedeutet, so sey die Wirkung $= (H - h + \frac{(C-c)^2}{4.g}).z.$

Die gemeine Lehre, sagt er: druckt den Stoß so aus, daß in nur angegebener Formel, H – h fehlt, das weicht aber von der Erfahrung zu beträchtlich ab.

IV. Die gemeine Lehre steht hie in (348), den dasigen Winkel auch = 90 Gr. gesetzt. Es ist nähmlich

mir	v	u	z^2	A : gv (324)
L.	H	h	z	2. z

So giebt (348) in Langsdorfs Zeichen den Stoß = $\frac{(C-c)^2}{2.g}$. z noch einmahl so groß als ihn L. setzt. Einfach und doppelt sind, wie ich an mehr Stellen erinnert habe, unentschieden.

V. Schiefen Stoß des einzelnen Wasserstrahls behandelt er mit Zerlegung der Kräfte wie hie 339 ... zweifelt aber in seinem 211. §. ob die Erfahrung mit der Theorie übereinstimme, weil die Schriftsteller die beyden Fälle nicht unterscheiden, ob der Wasserstrahl einzeln ist, oder die anstossende Wassermasse selbst von Wasser umgeben wird, das in ein weites Bett eingeschlossen ist. Versuche, wie ich (337) vermisst habe, seyn auch seitdem von niemanden angestellt.

VI. Ueber schiefen Stoß einzelner Strahlen hat er selbst Versuche angestellt. Den Anstoßwinkel genauer als auf halbe Grade zu messen, und die Stärke des Stosses durch Gewichte aufs genauste anzugeben, war nicht thunlich.

Unter=

Unterschlächtige Wasserräder.

351. Man stelle sich ein Rad vor, an dessen Umfange irgendwo ein Seil befestiget sey, das an seinem andern Ende eine Last hängen hat. Wenn also das Rad umgedreht wird, so wird die Last gehoben. Wird nun eine Kraft angebracht, die das Rad immer mit gleicher Geschwindigkeit herumdreht, so wird diese Last immer in gleicher Zeit um gleichviel gehoben. Eine solche Wirkung nennt man gleichförmig.

Es erhellt, daß ich diesen Begriff auf eine leichte Art zu geben, nur eines von den gewöhnlichen Exempeln gewählt habe, und man sieht leicht, wie man sich gleichförmige Wirkungen in andern Fällen vorzustellen hat. Selbst hier pflegt auch wohl der Strick nicht um das Rad selbst, sondern um seine Welle gewanden zu seyn. So könnte man eine Last auf einer schiefen Fläche hinauf schieben oder ziehen, daß sie sich in gleicher Zeit immer gleich viel erhübe.

Bewegt aber das Rad, indem es für sich immer mit gleicher Geschwindigkeit herumgeht, seine Last bald geschwinder bald langsamer, so heisst eine solche Wirkung **ungleichförmig**. Die Vorrichtung, die man den krummen Zapfen nennt, giebt ein Beyspiel.

352. Diese beyden Arten von Wirkungen, werden besonders in einer Schrift des den Wissenschaften zu frühzeitig entrissenen Peter Elvius

vius (*) untersucht. Diese Schrift ist älter als die Eulerische (343) aber in Deutschland wohl nicht weiter bekannt worden, als durch eine kurze Anzeige ihres Innhalts im Jahre 1742. der Abhandlungen der K. Schwed. Akad. der Wissenschaften, davon die Uebersetzung 1750. herausgekommen ist. Ich habe mein Exemplar Hrn. Wargentin zu danken. Von den gewöhnlichen Arten der Wasserräder enthält sie die theoretischen Sätze, die in der Eulerischen zu finden sind, und noch mehrere, mit Anwendungen auf wirklich gebaute Maschinen, die zugleich von der tiefen Einsicht des Verfassers, und von seinen praktischen Kenntnissen zeugen. Es wäre zu wünschen, daß sie bekannter würde. Eine Uebersetzung wäre dazu kein bequemes Mittel, sondern eigentlich eine Umarbeitung, wo die theoretischen Sätze analytisch vorgetragen, deutlicher gemacht, und die Anwendungen ordentlicher gezeigt würden. Der Gebrauch, den ich im folgenden davon mache, wird zeigen, wie ich eine solche Umarbeitung wollte eingerichtet haben, die freylich mehr Mühe und Zeit kostet, als ihr jemand ansieht, der das Original nicht dagegen halten kann. Nur die Sätze sind grösstentheils aus

(*) Mathematisk Tractat om effecter af Vatn-Drifter, efter brukeliga Vatn Värks art och Lag författad af Pehr Elvius K. S. V. Acàdemiens Ledamot; utgifven af Kongl. Vetenskaps Academien. Stockholm 1742. 8vo. 260 Seiten 5 Kupfertafeln.

aus dem Buche genommen, die Beweise durchzudenken, hatte ich die Gedult nicht, sondern suchte, wie sich diese Sätze aus den vorhin gewiesenen analytischen Formeln herleiten liessen. Des Elvius Vortrag ist meist synthetisch und wird auserdem durch Ausdrückungen schwer, die mit deutlichern hätten können verwechselt werden, dem Verfasser aber desto leichter zu verstatten sind, da er in einer solchen Abhandlung eben keinen Vorgänger hatte, dessen Redensarten er brauchen konnte.

353. Eine gleichförmige Wirkung zu schätzen, muß man wohl zugleich auf die Grösse der Last, welche gehoben wird, und auf die Geschwindigkeit sehen, mit der sie gehoben wird. Wird also in einer Secunde, durch eine erste gleichförmige Wirkung die Last P um den Raum S gehoben, durch eine zweyte, eine gleiche Last um den Raum s; durch eine dritte, die Last p um den Raum s; so ist ohne Zweifel

die erste zur zweyten = S : s
zweyte zur dritten = P : p

Erste zur dritten = P. S : p. s

oder die Grösse einer gleichförmigen Wirkung zeigt sich durch ein Product aus der Last, in den Raum, um welche die Last innerhalb einer Secunde gehoben wird.

354. CP 30. Fig. sey der Halbmesser, und C, der Mittelpunct eines Rades. Der Punct P, bewege sich in dem Kreise, den er beschrei-

ben

ben muß, mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört. Diese Geschwindigkeit ist in jeder Lage des Halbmessers CP, nach PH, einem Perpendikel auf CP gerichtet, weil dieses Perpendikel die Tangente an dem beschriebenen Kreise an dieser Stelle ist. Mit dieser Geschwindigkeit beschreibt also der Punct P in einer Secunde einen Bogen, dessen Länge $= 2\sqrt{gu}$; und von einem Seile (351) würde in einer Secunde soviel auf des Rades Umfang aufgewikkelt, und eine Last, die daran hienge, um soviel gehoben.

Der Winkel, um den sich des Rades Halbmesser in einer Secunde fortdreht, ist $\frac{2\sqrt{gu}}{CP}$

welches die Winkelgeschwindigkeit giebt (Höhere Mechan. III. Abschn. 217. VIII.).

355. **Aufg.** An dem nur beschriebenen Halbmesser befinde sich in P eine Fläche befestiget, deren Durchschnitt mit einer Fläche, die auf des Rades Axe senkrecht steht, BA ist. Diese Fläche könnte die Schaufel eines unterschlächtigen Wasserrades vorstellen (Stat. 73). Auf sie stosse ein Wasserstrahl, dessen Durchschnitt mit der vorerwähnten Fläche, die auf des Rades Axe senkrecht steht, cabf ist; Man fragt nach der Grösse der gleichförmigen Wirkung des Wasserstrahls auf diese Schaufel.

Aufl. I. Dieß ist offenbahr eine Fortsetzung der bis (346) angestellten Untersuchung. Hier

kömmt

kömmt nähmlich noch der Umstand dazu, daß sich die Fläche nur so bewegen kann, wie es ihr der Halbmesser des Rades, an dem sie befestiget ist, verstattet.

II. Hier ist also BPH = η (346; III.) dieser Winkel mag spitzig oder stumpf seyn (350), heisst nun auch, wie vorhin fbB = θ; so findet sich in 346; der Stoß nach der Richtung PY. Ich will ihn M nennen. Man zerlege ihn in zweene Theile, deren einer nach CP, der andere, senkrecht auf CP, nach PH gerichtet ist. Jener wollte den Punct P von C entfernen, oder näher dazu treiben, und weil die Festigkeit des Rades dieses nicht verstattet, so wird er dadurch völlig aufgehalten, und von ihm kömmt hier nichts in Betrachtung. Der andere aber treibt den Punct P eben nach der Richtung, nach welcher allein dieser Punct sich völlig ungehindert bewegen kann, und daher thut dieser andere Theil hier seine völlige Wirkung.

III. Wenn man sich von Y ein Perpendikel auf PH herabgelassen vorstellt, so ist solches = PY. sin YPH, und schneidet zwischen sich und dem Puncte P, auf PH ein Stück PY. cos YPH ab. Stellt also PY den ganzen Stoß nach dieser Richtung vor, so werden die beyden Theile nach CP und nach PH, durch die erwähnten Linien ausgedrückt, und der erste ist also M. sin YPH der andere M. cos YPH.

IV. Weil der erste in keine Betrachtung kömmt, so suche ich nur den andern bequemer aus-

auszudrücken. Es ist aber YPH $= \eta -$ BPY $=$ $\eta -$ R also R $-$ YPH $= 2$ R $- \eta$ folglich cos YPH $=$ sin η und der gesuchte andere Theil $=$ M. sin η

$$= \frac{\text{A. } (\sin\theta \sqrt{v} - \sin\eta \sqrt{u})^2}{\sin\theta . \sqrt{g v}} \sin\eta = 2 z^2.$$

$(\sin\theta . \sqrt{v} - \sin\eta . \sqrt{u})^2 . \frac{\sin\eta}{\sin\theta}$ aus (342).

V. Hier bedeutet A eine gewisse Menge Wasser, die in gegebener Zeit auf die Schaufel fällt. Bey den Künsten in Bergwerken nennt man es Aufschlagewasser. Das, was in A multiplicirt ist, kann als ein Bruch angesehen werden, da die Grössen, welche Linien bedeuten, v; u; g; im Zähler zusammen soviel Abmessungen haben, als im Nenner, die Sinus aber Zahlen sind, die zur Einheit den Halbmesser haben. Also wird hier A in eine gewisse Zahl multiplicirt, oder der Stoß durch das Gewicht einer gewissen Menge Wasser ausgedruckt.

VI. Wäre u $= 0$; so würde dieser Ausdruck A sin θ. sin $\eta . \sqrt{\frac{v}{g}} = 2 . z^2 . v .$ sin $\theta .$ sin η und zeigte an, der Stoß auf die stillstehende Schaufel betrage soviel, als das Gewicht einer solchen Wassermenge, das ist, wenn eine Kraft, die soviel betrüge, nach der Richtung HP, wirkte, so hielte sie den Stoß auf, oder: der Stoß auf die eine Seite der Schaufel und die Kraft auf die andere Seite der Schaufel angebracht, erhielten einander, daß das Rad stehen bliebe.

VII.

VII. Wäre also um des Rades Umfang ein Seil gewunden, daran eine Last, so schwer als die Wassermenge in VI. hinge, dergestalt, daß, wenn diese Last sinken sollte, der Punct P nach der verlängerten HP, von P weiter hinausgehen müsste, so verträte diese Last die Stelle der in (VI.) angegebenen Kraft, und durch den Stoß des Wassers, würde also genau diese Last am Rade erhalten, daß das Rad zwischen dem Stosse und dieser Last stehen bliebe. Würde der Stoß stärker, (etwa durch grössere Geschwindigkeit des Wassers) so wiche ihm die Schaufel aus. Vermehrte man die Last, ohne den Stoß zu ändern, so würde dadurch die Schaufel dem Wasser entgegengetrieben. Es versteht sich hiebey, daß man für den Umfang des Rades einen Kreis um des Rades Mittelpunct annehmen müsste, dessen Umfang durch die Stelle I der Schaufel durch gienge, wo man sich den Stoß vereinigt vorstellt (342), weil diese Last und der Stoß in gleicher Weite vom Mittelpuncte des Rades müssen angebracht seyn, wenn man sie auf diese Art vergleichen will.

VIII. Weil A die Wassermenge wäre, die in einer Secunde auf die Schaufel fiele (342), wenn nur die Schaufel so groß ist, als dorten erfordert wird, so fällt auf die Schaufel in $\sqrt{\frac{v}{g}}$ Secunden die Wassermenge $A.\sqrt{\frac{v}{g}}$. In soviel

Secunden aber erhielte ein schwerer Körper, durch seinen Fall, die Geschwindigkeit, die der Höhe v zugehört (Hdh. Mech. I. Abschn. 37.) der Stoß in VI; beträgt also soviel, als die Menge Wasser, welche in der Zeit auf die Schaufel fällt, in welcher ein Körper durch den Fall die Geschwindigkeit des Wassers erlangen könnte, mit dem Producte der angezeigten beyden Sinusse multiplicirt.

Wenn man das Rad durch eine angehenkte Last nach (VII) stehend machte, so könnte man sagen: das Rad geht unendlich langsam. Die Last würde alsdenn nicht gehoben, nur erhalten, daher hat Elvius diesen Satz so ausgedruckt (*). "Wenn das Rad unendlich langsam geht, so ist die Last, die alsdenn mit der Geschwindigkeit des Umfangs erhoben wird, so groß als das Gewicht Wasser, das auf das Rad in so langer Zeit fällt, als eben dieses Wasser seine Geschwindigkeit durch einen lothrechten Fall hätte erhalten können, doch in der Verhältniß vermindert, welche das Rechteck aus den Sinussen der Winkel, welche die Schaufel mit der Richtung des Wassers und mit des Rades Umfange macht, zum Quadrat des Halbmessers hat". Man wird dieses leicht in die bisher gebrauchten Zeichen übersetzen. Ich führe es hier an, so wohl als eine Probe von der vorzüglichen Bequemlichkeit und Kürze der analytischen Ausdrückungen, als auch zu weisen, daß Elvius eben die Gründe angenommen hat, die sich in der eulerischen Schrift

(*) Prop. II. finden,

finden, und daher beyder Untersuchungen können vereinigt werden.

IX. Bisher von (VI.) an, ist die gleichförmige Wirkung als ein blosses beständiges Erhalten einer Last betrachtet worden. Geht man nun auf den allgemeinen Ausdruck (IV.) zurück, so wird derselbe folgendes andeuten: Bey dem angezeigten Stosse geht jeder Punct im Umfange des Rades, um den Weg $2\sqrt{gu}$ in einer Secunde fort; So viel wickelt sich also innerhalb einer Secunde von einem Seile auf (351), an dessen Ende eine Last hienge, so schwer als das Wasser, dessen Menge der Stoß ausdrückt (V.), diese Last wird also in jeder Secunde um den angezeigten Raum gehoben, und daher ist die **gleichförmige Wirkung** nach (353) $M. \sin\eta. 2\sqrt{gu}$ oder

$$2A.(\sin\theta.\sqrt{v} - \sin\eta.\sqrt{u})^2.\sin\eta \cdot \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot$$
$$\sin\theta$$

X. Ist die Schaufel nicht viel grösser als der Wasserstrahl, so nimmt Hr. Euler wegen (344) die Wirkung nur halb so groß an, als sie in (IX.) berechnet worden.

356. Aufg. Die Verhältniß der Geschwindigkeiten des Wassers und des Rades zu finden, wenn die Wirkung (355; IX.) am grösten wird.

Aufl. I. Man setze $\sqrt{\frac{u}{v}} = y$ oder $\sqrt{u} = y\sqrt{v}$ so verwandelt sich der Ausdruck der Wir-

kung in $\frac{2.A.\sin\eta.v}{\sin\theta}.(\sin\theta - y.\sin\eta)^2.y.$

II. Hier kann man y allein als die veränderliche Grösse ansehen, und daher nur den Factor, welcher y enthält, differentiiren. Sein Differential ist $(\sin\theta - y.\sin\eta)^2.dy - 2.(\sin\theta - y.\sin\eta).y.\sin\eta.dy.$

III. Dieses $= o$ gesetzt, verstattet mit $\sin\theta - y.\sin\eta$ zu dividiren, und giebt $y = \frac{\sin\theta}{3.\sin\eta}$.

IV. Dieser Wehrt, in den Ausdruck der Wirkung (I.) gesetzt, giebt $\frac{2.A.\sin\eta.v}{\sin\theta}.(\sin\theta - \frac{1}{3}.\sin\theta)^2.\frac{\sin\theta}{3.\sin\eta}$ oder $\frac{8}{27}$ A. v. $\sin\theta^2$.

V. Daß dieser Werth ein grösstes und kein kleinstes ist, erhellt ohne weitere Untersuchungen daraus, daß die Wirkung (I.), wie aus ihrem Ausdrucke, und selbst aus der Natur der Sache folgt, nie verneint wird, also ihr kleinster Werth der ist, wo sie $= o$ wird, das ist, wo $y = \frac{\sin\delta}{\sin\eta}$. In der That erhält man auch diesen Werth von y mit, wenn man den veränderlichen Factor so ausdrückt: $y.\sin\theta^2 - 2y^2.\sin\theta.\sin\eta + y^3.\sin\eta^2$, differentiirt man diesen Ausdruck, und setzt das Differential $= o$, so erhält man für y eine quadratische Gleichung, deren beyde Wurzeln die Werthe der in III; und der jetzige sind. In dem Differentiale, wie es in (II.) ausgedruckt

druckt ist, stecken ebenfalls diese beyden Werthe, denn es wird nicht nur = o, wenn man damit nach (111). verfährt, sondern auch, wenn man $\sin\theta - y.\sin\eta = o$ setzt. Da die Methode der grösten und kleinsten, beyde zugleich giebt, wenn beyde statt finden, so dienen gegenwärtige Bemerkungen, die Allgemeinheit und Sicherheit des Verfahrens zu zeigen.

357. Zus. Wenn also die Geschwindigkeit des Wassers, sein Winkel mit der Schaufel, und die Stellung der Schaufel gegen des Rades Halbmesser gegeben sind, so muß man, die grösste Wirkung zu erhalten, die unter diesen Umständen statt findet, des Rades Geschwindigkeit so zu mässigen suchen, daß sie zu des Wassers gegebener Geschwindigkeit die gehörige Verhältniß bekömmt. Es ist offenbahr, daß dieses durch die Last geschehen muß, die man dem Rade zu erheben giebt.

358. Giebt man ihm gar keine, sondern lässt es leer gehen, so weicht es ohne Zweifel dem Stosse des Wassers schneller aus, oder es geht schneller herum, als unter irgend andern Umständen, aber doch erfolgt hier keine Wirkung, weil nichts gehoben wird, und die Wirkung nicht heisst: ein Rad drehen, sondern: eine Last heben.

Die Geschwindigkeit dieses leergehenden Rades lässt sich so finden: Aus 355; IX. erhellt, daß in 355; IV; die Last angegeben ist, die das Rad mit der Geschwindigkeit erhebt, welche der

Hölze u gehört. Man setze also diese Last = o, so hat man die Vergleichung zwischen v und u für den Fall, wenn das Rad leer geht. Ich will aber für diesen Fall w statt u schreiben, so daß w die Höhe bedeutet, die der Geschwindigkeit des leergehenden Rades zugehört. Dieses giebt

$$\sqrt{w} = \frac{\sin\theta . \sqrt{v}}{\sin\eta}.$$

359. Wie hier das Rad am schnellsten gienge, wenn es keine Last zu heben hat, so hält es in (355; VI.) die grösste Last, die es unter den in 357. im Anfange angegebenen Umständen halten kann, (355; VII.) aber es bleibt stehen, und daher wird man auch dieses bloße Erhalten, ohne Erheben, keine Wirkung nennen. Mit einer geringern Last beschwert, geht das Rad herum, schneller oder langsamer, nachdem die Last kleiner oder grösser ist.

360. Aufg. Die Last zu finden, mit welcher das Rad muß beschwert werden, daß die Wirkung am grösten wird.

Aufl. In dem Ausdrucke der Last (355, IV.) setze man $\sqrt{u} = y\sqrt{v}$ und ferner den Werth für y aus (356; III.) so kömmt diese Last $\frac{4}{9}$. A. $\sin\theta . \sin\eta . \sqrt{\frac{v}{g}}$ oder $\frac{4}{9}$ der grössesten Last (355; VI.).

361. Zus. Die Geschwindigkeit (356; III.) ist $\frac{1}{3}$ der grösten Geschwindigkeit (358).

362. Aufg. Die allergrösste Wirkung zu erhalten.

Aufl. Aus 356. IV. erhellt, daß die dort gefundene grösste Wirkung, bey gegebener Geschwindigkeit des Wassers, desto grösser ist, je grösser $\sin\theta$ ist. Man setze also $\sin\theta = 1$ oder man stelle die Schaufel so, daß es senkrecht auf sie stösst.

Diese grösste Wirkung $\frac{8A.}{27}v$ ist also noch desto grösser, je grösser v ist; und weil die Geschwindigkeit des Wassers nie grösser werden kann, als so groß sie die Höhe geben kann, von der das Wasser herabfällt, so sey diese Höhe $= a$; sie giebt statt v gesetzt, die grösste Wirkung $\frac{8}{27}Aa$;

363. Bey einer kleinen Schaufel würde sie nur halb so groß geschätzt (355. X.).

364. Diese Berechnungen von der grösten Wirkung hat Parent zuerst bekannt gemacht (*). Man findet sie beym Belidor (**), die Grössen sind bey ihm so wie in (363) angegeben (335).

365. Die Producte aus der Kraft in ihren Weg, und aus der Last in den ihrigen heisst Hr. Euler **Momente**, der **stossenden Kraft**, und der **Wirkung** (momenta; vis impellentis und efficaciae); und setzt sie nach den Regeln der Statik einander gleich. Das Product aber aus der Menge Wasser in die Höhe seines Falls, heisst er **Moment des Stosses** oder **Triebes** momen-

(*) Mem. de l'Ac. Roy. des Sc. 1704.
(**) Arch. hydr. Prem. P. T. I. art. 588.

(momentum impulsionis) das letztere wäre in (362) A. a, das zweyte $\frac{8}{27}$ A. a.

366. Bey einem gegebenen Momente des Stosses also, kann das Moment der Wirkung nie mehr als $\frac{8}{27}$ davon betragen, wenn die Maschine aufs vollkommenste eingerichtet ist.

367. Einerley Moment des Stosses aber lässt sich auf mehr als einerley Art erhalten. Wenn die Menge Wassers $\frac{1}{n}$ A; aber die Höhe seines Falles n. A wäre, so ist das Moment des Stosses noch A. a: So thut wenig Wasser bey viel Gefälle einerley mit viel Wasser bey wenig Gefälle.

368. Die Last heisse R, und die Höhe, um welche sie in einer Secunde gehoben wird r; so ist das grösseste R. r das sich erhalten lässt $\frac{8}{27}$. A. a (362). Soll also ein Rad soviel Wasser erheben, als auf seine Schaufel fällt, so ist R $= A$; und $r = \frac{8}{27}$ a, oder: soviel Wasser kann in einer Secunde nicht höher gehoben werden, als auf $\frac{8}{27}$ des Gefälles. Soll $r = a$ seyn, so ist $R = \frac{8}{27} A$. Also kann die Maschine so hoch, als das Gefälle des Wassers ist, das sie treibt, nur $\frac{8}{27}$ dieses Wassers heben, und sie erfodert folglich mehr Wasser, ihre Bewegung zu unterhalten, als sie erhebt.

369. Der Winkel η ist ganz willkührlich, wenn man nur in 362; die Geschwindigkeit des Rades so mässiget, daß nach (356; III.) $\sqrt{u} =$

$\sqrt{a}$

$\frac{\sqrt{a}}{3.\sin\eta}$, hieraus folgt, daß bey einerley a, das Rad desto schneller geht, je kleiner sin η ist, und unendlich schnell gehen müsste, wenn BPH = 0 oder = 180. Gr. Am langsamsten geht das Rad, wenn BPH = 90 Gr. oder die Schaufel in der Richtung des Halbmessers liegt; alsdenn ist des Punctes P Geschwindigkeit $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Wassers.

370. Es sey des Rades Halbmesser CP = k; der Umfang $2\pi.k$, so drehet sich das Rad in $\frac{2\pi.k}{2\sqrt{gu}}$ Secunden ganz herum, weil P, in einer Secunde einen Bogen $= 2\sqrt{gu}$ durchläuft (354) also von P der ganze Umfang in soviel Secunden durchlaufen wird, so vielmahl dieser Bogen im ganzen Umfange enthalten ist. In diesen Ausdruck den Werth von u aus (369) gesetzt, kömmt die Zeit des ganzen Umlaufs $\frac{3\pi.k.\sin\eta}{\sqrt{ag}}$ Secunden. Man setze diese Zahl von Secunden = n, so lässt sich entweder k oder η, welches man will, so bestimmen, daß das Rad seinen Umlauf in einer gegebenen Zeit vollendet.

371. Also werden sich die Umstände, welche die grösste Wirkung zu erhalten nöthig sind, folgendergestalt zusammen übersehen lassen.

I. Die Schaufeln groß genug zu machen. (355; X:).

II. Das Wasser senkrecht darauf zu leiten (362).

III. Den Stoß in der tiefsten Stelle, wo es thunlich ist, aufzufangen, damit die Geschwindigkeit des Wassers daselbst so groß als möglich ist (362).

IV. Die Geschwindigkeit des Rades nach (360) zu mässigen, woraus sich die Zeit des Umlaufs giebt (370).

Noch einige Sätze von der Wirkung überhaupt, wenn sie gleich nicht die grösste ist, aus dem Elvius (*).

372. Die Last des Rades, das mit der Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört, fortgeht, verhält sich zur Last des stillstehenden Rades (355; IV. V; VI.), wie das Quadrat des Unterschiedes der Geschwindigkeiten, dieses beschwerten und des leergehenden Rades (358) zum Quadrate der Geschwindigkeit des leergehenden Rades. Die Rechnung wird dieses leicht zeigen. Heisst also Q die Last des fortgehenden Rades, (was in 355; IV; M. sin η hieß), P des stillstehenden seine, w was es in 358 heisst, so ist $Q = \frac{P.(\sqrt{w} - \sqrt{u})^2}{w}$.

373. I. Wenn $\sqrt{u} = m.\sqrt{w}$ oder diese beyden Geschwindigkeiten in einer gegebenen Verhältniß sind, so ist auch $Q = (1 - m)^2 P$ oder die Verhältniß $Q : P$ ist gegeben.

II.

(*) Prop. III. u. Coroll.

II. Auch $\sqrt{Q}.\sqrt{w} = \sqrt{P}.(\sqrt{w} - \sqrt{u})$
daher $\sqrt{w} : \sqrt{u} = \sqrt{P} : \sqrt{P} - \sqrt{Q}$ auch (358).

$$\sqrt{v} : \sqrt{u} = \frac{\sin\eta}{\sin\theta} . \sqrt{P} : \sqrt{P} - \sqrt{Q}.$$

374. Der Effect oder die gleichförmige Wirkung (355; IX.) ist also $Q.2\sqrt{gu}; = 2m\sqrt{gw}).(1-m)^2 P.$

375. Setzt man hier statt P seinen Werth aus (355; VI.) statt w den seinigen aus (358) so kömmt der Effect $= 2m.(1-m)^2 \sin\theta^2 A.v$ und verhält sich also hier wie das Auffschlagewasser mit der Höhe des Falles multiplicirt.

376. Auch ist der Effect aus (342); $4m.(1-m)^2.\sin\theta^2 z^2 v.\sqrt{(gv)}$ und verhält sich also wie $v^{\frac{3}{2}}$ oder wie der Würfel der Geschwindigkeit, wenn sich z^2 nicht ändert, oder wenn der Querschnitt des Gerinnes ungeändert bleibt, dadurch das Wasser auf die Schaufel läuft.

377. Wenn Auffschlagewasser und dessen Geschwindigkeit gegeben sind, so verhält sich der Effect wie das Quadrat von $\sin\theta$ (375). Auf η kömmt hierbey nichts an, weil es in dem Ausdrucke des Effects (375) nicht zu finden ist.

Je mehr BPH (30. Fig.) von einem rechten Winkel unterschieden ist, das ist, je schiefer die Schaufel gegen des Rades Halbmesser stehet, desto kleiner ist $\sin\eta$; und desto gröſſer also w (358), wenn man annimmt, das Wasser falle allemahl unter einerley Winkel auf die Schaufel; desto gröſſer ist also auch u (373) oder desto schneller

geht

geht das Rad herum. Aber desto kleiner ist, bey einerley Auffschlagewasser und Geschwindigkeit desselben, P (355; VI.) und folglich auch Q (373). So vielmahl das Rad also schneller geht, so vielmahl kleiner ist das Gewicht, das gehoben wird, und so begreift man, warum bey geänderter Stellung der Schaufel gegen des Rades Halbmesser, sich doch der Effect nicht ändert.

Eben so ist der Effect bey grossen und bey kleinen Rädern einerley.

378. Aendert sich nichts als die Geschwindigkeit des beschwerten Rades, so verhält sich Q wie das Quadrat von $1-m$ oder vom Unterschiede der Geschwindigkeiten (373) und der Effect, wie dieses Quadrat mit der Geschwindigkeit des beschwerten Rades multiplicirt (374).

379. Bedeutet R eine Last, die von eben dem Rade bey eben dem Auffschlagewasser, mit der Geschwindigkeit gehoben wird, die der Höhe t gehört, so daß R, t hier sind, was in (372) Q, u; waren aber P, w, für beyde einerley bleiben, so ist wie dorten, $R = P.\frac{(\sqrt{w}-\sqrt{t})^2}{w}$

Folglich $Q : R = (\sqrt{w}-\sqrt{u})^2 : (\sqrt{w}-\sqrt{t})^2$ oder wenn man die Geschwindigkeit des Rades bey jeder Last von der Geschwindigkeit des leeren Rades abzieht, so verhalten sich die Quadrate dieser beyden Differenzen, wie sich die beyden Lasten verhalten.

Ver-

Vergleichung zweener Effecte von einerley Rade bey einerley Auffschlagewasser.

380. I. An einer Mühle bey Halmstad, wo ein Wasserrad zugleich zweene Gänge trieb, ließ Elvius einen Gang abstellen, daß das Rad solchen nicht mehr trieb. Es machte jetzt seinen Umlauf in 10 Secunden, zuvor mit beyden Gängen in 15 Secunden. Deutlich zu übersehen, wie sich diese Effecte verhalten, kann man nun so schliessen:

I. Effect das Rad treibt 2 Gänge und geht in 15 Secunden herum.

II. Effect es treibt einen und geht in 10 Secunden herum.

Also verhalten sich die Geschwindigkeiten des Rades beym I. und II. Effect = 10 : 15, verkehrt wie die Zeiten des Umlaufs, weil das schnellere Rad weniger Zeit braucht.

Die Räume, durch welche in gleicher Zeit die Lasten bewegt werden, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, also wie 10 : 15 = 2 : 3. Da nun die Gänge hier als die Lasten anzusehen sind, so ist bey den Effecten, in der genannten Ordnung

erste Last zur zweyten = 2 : 1
erster Raum zum zweyten = 2 : 3

erster Effect zum zweyten = 4 : 3

II. So verhielten sich diese Effecte nach der Erfahrung. Sie nach der Theorie zu vergleichen, bediene ich mich nächstvorhergehender Sätze.

III.

III. Elvius fand die Geschwindigkeit des Wassers 11 Fuß in einer Secunde. Weil er schwedische Fuß meynt, so ist $g = 16$ (284)(*) und aus (152) $v = \frac{121}{64}$.

IV. Des Rades Durchmesser war 18 Fuß, sein Umfang also $56,5486 = 2\pi k$ (370).

V. Die Winkel θ, η, waren rechte, also die Geschwindigkeit des leeren Rades, des Wassers Geschwindigkeit gleich, $w = v$ (358) also $\sqrt{w} = \frac{11}{8}$ (III) $= 1,375$.

VI. Wenn das Rad in 15 Secunden herumging, so war aus (370) weil $g = 16$

$$\sqrt{\frac{u = 56,5486}{2.4.15.}} = 0,47124$$

VII. Heisst also Last Q die Last, mit welcher das Rad in 15 Secunden herumgeht und P die, welche es zum Stehen brächte, so ist aus

$$(372)\ Q = P\,\frac{(1,375 - 0,47124)^2}{1,375^2}$$

$$(III; VI.) = \left(\frac{0,9376}{1,375}\right)^2 P$$ die Logarithmen lassen sich hier so gebrauchen log

(*) Andr. Celsius giebt die Verhältniß des schwedischen Fusses zum rheinländischen = 1000 : 1057 (Abh. der kön. schwed. Ak. d. W. 1739 in der deutschen Uebersetzung 1 Bande 257 S.). Hieraus findet sich der Fall in einer Secunde 16, 517 schwedische Fuß. Vermuthlich nahm ihn Elvius = 16 Fuß, um zur Bequemlichkeit eine Quadratzahl zu haben, da es hier auf Kleinigkeiten eben nicht ankömmt.

$$\log 0,90376 = 4,9560531 - 5$$
$$\log 1,375 = 0,1383027$$

$$\log \frac{0,90376}{1,375} = 4,8177504 - 5$$

$$\log \left(\frac{0,90376}{1,375}\right)^2 = 9,6355008 - 10$$

$$= \log \frac{Q}{P}$$

$$\log \sqrt{u} = 4,6732421 - 5$$

$$\log \frac{Q}{P}\sqrt{u} = 0,3087429 - 1$$

VIII. Der erste Effect wäre $Q.2\sqrt{gu}(374)$ heisst man ihn also E; so gehört der gefundene Logarithme zu $\frac{E}{2.P.\sqrt{g}}$

IX. Wenn das Rad in 10 Secunden herumging, so gehöre die Geschwindigkeit jedes Puncts in seinem Umfange der Höhe t; welche jetzo ist, was vorhin u war, so ist, wie in (VI)

$$\sqrt{t} = \frac{56,5486}{2.4.10} = 0,70686$$

X. Heisst R die Last, mit welcher das Rad in 10 Secunden herumkömmt, wo P eben das bleibt, was es in (VII.) war, so ist wie daselbst

$$R = P.\left(\frac{1,375 - 0,70686}{1,375}\right)^2 = \left(\frac{0,66814}{1,375}\right)^2$$

XI.

XI. Hieraus finde ich wie in (VII)

$$\log \frac{R. \sqrt{t}}{P} = 0,2223523 - 1$$

und wenn dieser zweyte Effect F heisst, so gehört dieser Logarithme zu $\frac{F}{2. P. \sqrt{g}}$ wie in (VIII).

XII. Der Logarithme in (XI.) von dem letzten in (VII.) abgezogen, giebt also $\log \frac{E}{F} =$ 0,0863906, welcher Logarithme zu 1,201 gehört. Also wäre hier F : E = 1 : 1,201 = 3 : 3,603 da diese Verhältniß nach der Erfahrung 3 : 4 war (I.)

XIII. Auch wäre nach (379) $\frac{Q}{R} = (\frac{20}{66}\frac{376}{814})^2$ (VII; X) = 1,8496

XIV. Aber beym Versuche selbst war die erste Last noch einmahl so groß als die zweyte (I). Diesen Unterschied der Rechnung vom Versuche schreibt Elvius der Friction zu.

XV. Weil $3 \sqrt{u} = 1,41372$ (VI.) beynahe $= \sqrt{w}$ (V.), so hatte das Rad, wenn es zweene Gänge trieb, ziemlich genau die Geschwindigkeit, die zur grössten Wirkung gehört (361).

XVI. Elvius kann nicht sagen, ob dieses von ohngefähr so zugetroffen, oder ob die Einrichtung mit Bedacht so gemacht worden. Doch ward ihm gemeldet, der Baumeister sey ein erfahrner Mann gewesen, der in Preussen bey Mühlen-

bauen sehr gebraucht worden. Elvius fand auch, daß durch die doppelte Auswechselung zwischen dem Kammrade und Getriebe, die Mühlsteine diejenige Geschwindigkeit bekamen, mit der die Müller am besten zufrieden zu seyn pflegen, daß jeder nähmlich seinen Umlauf in $1\frac{1}{2}$ Secunde machte. Bey andern Mühlen hat er gefunden, daß die unterschlächtigen Räder viel schneller gehen, als sie dieser Absicht gemäß sollten, vermuthlich, weil unkundige Bammeister dem Wasserrade so wenig Last als möglich zu bewegen geben, damit sie desto sicherer sind, daß es vom Wasser getrieben werden kann. Daher hätte sich ein Unerfahrner nicht unterstanden, bey der erwähnten Mühle zweene Gänge zu machen, dadurch aber nicht nur $\frac{1}{3}$ der Wirkung verlohren, sondern auch dem Mühlsteine zu schnelle Bewegung gegeben, z. E. einen Umlauf in einer Secunde. Wäre aber das Auffschlagewasser vermindert worden, bis der Mühlstein seine gehörige Geschwindigkeit bekommen hätte, so wäre wohl die Hälfte der Wirkung verlohren gegangen.

Untersuchung der gewöhnlichen Wasserräder, und Vorschläge zu Verbesserungen.

381. Erste Art (*). Das Wasserrad hat eine horizontale Welle in C (30 F.) seine Schaufeln AB liegen in der Richtung des Halbmessers CP; und das Wasser wird senkrecht darauf geleitet; daß also $\theta = \eta = 90$. Gr. diese Stellung der Schaufeln ist bey den unterschiedenen Arten des Zeuges (Stat. 130.) einerley.

Weil sich die Schaufeln, durch das Gerinne (Stat. 128.) bewegen müssen, so füllen sie dasselbe nicht ganz aus, und es fliesst bey ihnen Wasser vorbey, ohne auf sie zu stossen. Da solchergestalt die Schaufel nicht den ganzen Wasserstrahl auffängt, so wird nach (355; X.) das Moment des Stosses, auch wenn es am grössten ist, nur halb soviel betragen, als in (365) das Wasser stösst auch nicht allemahl wie (373. III.) erfodert in der tiefsten Stelle an. Aus diesen Gründen urtheilt Hr. Euler, diese Art von Wasserrädern bekomme, auch wenn sie am besten vorgerichtet ist, nur $\frac{1}{9}$ A. a zum Momente des Stosses. Verbesserungen glaubt er, lassen sich nicht eben bey ihr anbringen, als daß man die Schaufeln groß genug mache und das Gerinne vor der Schaufel quer durchschneide, damit die breitere Schaufel frey durch den Wasserstrahl durchgehe und so einen starken Stoß auffange. Das läßt sich aber nur thun, wenn das Wasser

(*) Euler 24. §.

vom

vom starken Gefälle viel Geschwindigkeit hat. Diese unvollkommene Maschine, glaubt Hr. E., sey nur zu brauchen, wo genug Wasser ist, daß man den Abgang nicht achtet.

382. Bey dieser Maschine wird jede Wirkung mit der grösten so verglichen: Man nehme $v = a$ (371; III.) so ist die Verhältniß jeder Wirkung (355; IX.) zur grösten (362)

$$= 2A.(\sqrt{a} - \sqrt{u}).^2 \sqrt{\frac{u}{a}} : \tfrac{8}{27}.Aa$$

$$= \frac{27.(\sqrt{a} - \sqrt{u}).^2 \sqrt{u}}{4a\sqrt{a}} : 1 =$$

$\frac{27}{4}.(1 - y).^2 \eta : 1$ wenn $\sqrt{u} = y\sqrt{a}$.
Es sey $y = \frac{1}{2}$ so ist diese Verhältniß $= \frac{27}{32} : 1$.

383. Zweyte Art. Man kann versuchen, ob sich einige Unvollkommenheiten der ersten Art dadurch vermindern liessen, daß man die Schaufeln schief gegen den Halbmesser des Rades stellt, so daß, wenn BA 30 F. der Durchschnitt der Fläche der Schaufel mit des Rades Ebene wäre, diese Linie mit CP einen gewissen schiefen Winkel CPA machte, da vorhin CPA $= 0$ war, die Schaufel könnte dabey eine gegebene Neigung gegen die Ebene des Rades haben, und die grösste Wirkung liesse sich doch allemahl nach (369) erhalten. Auf die vorigen Schaufeln senkrecht zu stossen, musste das Wasser unter dem Rade in dessen Ebene hinfliessen, und daher hinderte ihre Grösse das Wasser fortzufliessen. Auf die schiefen kann es senkrecht stossen, wenn es seitwärts

beym Rade herkömmt, und wird von ihrer Grösse nicht gehindert. Man kann sich die Lage dieser schiefen Schaufeln ohngefähr wie die Stellung der Windmühlenflügel (Stat. 132.) einbilden. Einen vollkommenen Begriff aber von ihrer Stellung zu erhalten, dient folgendes.

384. I. CO 31 Fig. sey ein Halbmesser des Rades, dessen Mittelpunct C ist. Darauf stehe OH senkrecht, und der rechte Winkel COH sey in der Ebene des Rades. Diese Ebene werde von der Ebene der Schaufel in OA geschnitten, und auf diese OA, ziehe man senkrechte Linien, OS in der Schaufel, OT im Rade, die letzte werde nach OD verlängert. So ist der Winkel DOS = δ der Schaufel Neigung gegen das Rad (Geom. II. Th. 2. Erkl.) und SOT = 2R — δ.

II. Die Linien CO, OA, OH, OT sind im Rade, und es ist COH — AOH = TOA — AOH; oder COA = HOT man heisse diesen Winkel ζ.

III. Die Ebene SOT steht auf den Ebenen des Rades, AOT, und der Schaufel AOS, senkrecht. (Geom. 47 S. 4. Zus.).

IV. Man nehme OS = OH = OT, ein sphärisches Dreyeck STH zu bekommen, das bey T rechtwinklicht ist (III). Hierinn suche man die Seite SH; das Maas des Winkels SOH; die gegebenen Dinge sind ST = SOT = O 180 Gr. — δ (I); TH = TOH = ζ (u). Man sucht also aus den Schenkeln die Hypotenuse, und

findet

findet (Sphär. Trig. Rechtw. I Fall) $\cos SH = \cos ST . \cos TH = \cos \delta \cos \zeta$.

V. Nun weiß man den Winkel $SOA = 90$ Ex. (I) und der Linie OH, Neigung gegen seine beyden Schenkel; Man sucht daraus ihre Neigung gegen seine Ebene (Höhere Mech. III. Abschnitt 218 u. f.). Es sind nähmlich

dorten	α	β	ε	δ
hier	$AOH =$	ein Winkel dessen	R	η
	$R - \zeta$	Cosinus $= -\cos\delta$.	(I.)	(VI.)
	(II.)	$\cos\zeta$ (IV.)		

so ist aus angeführtem Orte (219) $\sin\eta^2 = \cos\zeta^2 - \cos\delta.^2 \cos\zeta^2 = (1 - \cos\delta^2) . \cos\zeta^2$ oder $\sin\eta = \sin\delta . \cos\zeta$.

VI. SOA ist in der Ebene der Schaufel (I) OH ist der Weg, den der Punct O nehmen muß, wenn sich das Rad um eine Axe dreht, die auf seine Ebene in C senkrecht steht. Also sind folgende Dinge einerley

30 Fig.	CP	PH
31 Fig.	CO	OH

und η bedeutet den Winkel der Schaufel mit dem Wege, nach dem ein Punct im Umfange des Rades gehen muß, hier wie in (355).

VII. Soviel also um das Rad herum Schaufeln sollen gestellt werden, soviel Puncte wie O nehme man im Umfange des Rades, ziehe durch ein solches OA im Rade eine Linie, die mit dem Halbmesser den Winkel $COA = \zeta$ macht: Nach dieser Linie wird die Schaufel auf das Rad ge-

sezt, so daß sie mit dem Rade einen Winkel $= \delta$ macht.

VIII. Das bisherige zeigt die unveränderliche Stellung der Schaufel gegen das Rad. Wenn an einem gegebenen Orte des Rades in O, eine solche Schaufel steht, und sich das Rad in einer Verticalfläche um C dreht, so bekömmt die Schaufel immer andere und andere Stellungen gegen die Horizontalfläche. Man betrachte die Schaufel, die in einem gewissen Augenblicke zu unterst stehet, so daß alsdenn CO lothrecht ist, und suche dieser Schaufel Lage gegen die Horizontalfläche durch O.

IX. Dieß ist nicht schwer, wenn die Schaufel auf dem Rade senkrecht steht, oder $\delta = R$. Alsdenn ist in (V) $\sin \eta = \cos \zeta$, denn ein Perpendikel von H auf die Schaufel muß auf einen Punct der Linie OA fallen (Geom. 47. S. 2. Zus.) daher HOA der Winkel der Schaufel mit OH (Geom. II. 1. Erkl.).

Ferner steht der Durchschnitt der Schaufel und des Horizonts allemahl auf dem Rade senkrecht (Geom. 48. S.). Ist also OH, wie jezt angenommen wird, horizontal, so geht der erwähnte Durchschnitt durch O und ist eine Horizontallinie, die mit OH und mit OA rechte Winkel macht. Also ist AOH der Schaufel Neigungswinkel gegen den Horizont $= R - \zeta$.

X. Vielleicht kann man sich in der Ausübung mit dieser Stellung begnügen, daß die Schaufel durch eine willkührliche OA senkrecht

auf das Rad gesetzt wird. Gäbe es aber Fälle, wo man sie lieber unter einem schiefen Winkel aufsetzen wollte, so müsste man die Sache auf nachstehende Art betrachten.

XI. Man hat hier zwo Ebenen, die auf einander senkrecht stehen, das Rad, und den Horizont. Es ist ferner, von einer dritten Ebene, von der Schaufel ihrer, die Lage gegen die erste gegeben, man sucht daraus ihre Lage gegen die Zweyte. Dieß bewerkstelliget folgender

Lehnsatz.

385. Die Ebenen BC, BA (32 Fig.) stehen senkrecht auf einander, sie werden von einer dritten Ebene schief geschnitten, deren Lage gegen eine dieser Ebenen gegeben ist, man sucht daraus ihre Lage gegen die andere.

Aufl. I. Die beyden senkrechten Ebenen schneiden einander in BE, einer Linie, die der Lage nach gegeben ist; Es ist ferner der Lage nach DF gegeben, die Linie, in welcher BA von der schiefen Ebene geschnitten wird, folglich, F, der Punct, in welchem diese Linie dem Durchschnitte der senkrechten Ebenen begegnet, und BFD der Winkel, den diese beyden Linien mit einander machen.

G sey ein Punct, den die schiefe Ebene mit BC gemein hat; Weil F auch in der schiefen Ebene und in BC zugleich ist, so ist FG dieser beyden Ebenen Durchschnitt und FDG ist die schiefe Ebene.

Der schiefen Ebene beyde Durchschnitte mit den beyden senkrechten, begegnen also der senkrechten Durchschnitte in einer und derselben Stelle, F oder sind ihm zugleich parallel, wenn F ins Unendliche hinaus rückt.

II. Ein Perpendikel durch D auf DF in der Ebene BA, begegne dem Durchschnitte der senkrechten Ebene in B. Auch sey auf diese Linie FD; in der schiefen Ebene, die Linie DG senkrecht, die der Ebene BC in G begegne (Es sind zwar zuvor schon, die Puncte B, G, genannt worden, aber nur als Puncte, jener im Durchschnitte der senkrechten Ebenen, dieser in BC; und also wird hier nichts angenommen, das im vorhergehenden anders bestimmt wäre) so ist BDG, die gegebene Neigung der schiefen Ebene gegen BA, sie heisse δ; und die Ebene GDB senkrecht auf BA und auf der schiefen Ebene (Geom. 47. S. 4. Zus.) also der Ebenen BC und BDG, Durchschnitt, GB, senkrecht auf BA (Geom. 48. S.) also ist

$GBD = R = GBF$, folglich $\frac{GB}{BD} = \text{tang}\,\delta$.

III. Der Winkel BFD heisse γ; so ist $\frac{BD}{BF} = \sin\gamma$;

IV. Diese beyden Winkel nehme ich als gegeben an; und suche nun Δ die Neigung der schiefen Ebene gegen BC, ingleichen Γ den Winkel BFG, den der schiefen Ebene Durchschnitt mit BC, mit dem Durchschnittte bey der senkrechten

machte. Man sieht, daß diese grossen Buchstaben eben solche Dinge in Absicht auf BC bedeuten, wie die kleinen in Absicht auf BA.

V. Nun ist tang $\Gamma = \frac{BG}{BF} = \text{tang } \delta . \frac{BD}{\sin \gamma}$ (II; III.) oder tang $\Gamma = \text{tang } \delta . \sin \gamma$.

VI. Man ziehe DI senkrecht auf BE, so steht DI senkrecht auf die Ebene BA. (Geom. 47 S. 1 Zus.). Von I fälle man ein Perpendikel IK auf GF; der schiefen Ebene Durchschnitt mit BC, und ziehe DK, so ist solche senkrecht auf GF (Geom. 46 S. 7 Zus.) weil nun DK in der schiefen Ebene, KI in der senkrechten BC ist, so ist DKI $= \Delta$ (IV.).

VII. Nun ist $\begin{array}{l} IK : IF = \sin \Gamma : 1 \\ IF : ID = 1 : \text{tang } \gamma \end{array}$

$\overline{IK : ID = \sin \Gamma : \text{tang } \gamma}$

also $\frac{ID}{IK}$ oder $\text{tang } \Delta = \frac{\text{tang } \gamma}{\sin \Gamma}$. Es ist aber Γ aus V. gegeben, also hier auch Δ.

VIII. Schreibt man

in V statt	Γ	δ	γ
hier	γ	Δ	Γ

so erhält man gleich aus V; die Formel in VII. Aus IV. ist klar, daß dieses so erfolgen muß.

IX. Sind also Γ, Δ gegeben, so findet man aus eben den Formeln γ, δ.

X. Dieser Satz ist seiner Allgemeinheit wegen sehr brauchbar. Nur ein Beyspiel zu erwäh-

wähnen, so kann BA die Mittagsfläche vorstellen, BC den Horizont, GDF eine gegebene Fläche, auf die man eine Sonnenuhr verzeichnen will. Ist die Lage dieser Fläche gegen den Meridian gegeben, so findet man ihre Lage gegen den Meridian, aus der gegebenen Lage gegen den Horizont, oder umgekehrt, die Lage gegen den Horizont; daraus läßt sich eine allgemeine Methode, Sonnenuhren zu verzeichnen, herleiten, die ich in einem zu Leipzig herausgegebenen, Programma, und vollkommener in einer Vorlesung in der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen im Februar 1762. vorgetragen habe.

386. In 384. VIII. die Lage der Schaufel gegen den Horizont zu finden.

Aufl. I. Es sey

im Lehnf.	BC	BA	GFD
hier	das Rad	der Horizont	die Schaufel

der noch unbekannte Winkel, welchen der Durchschnitt des Rades und des Horizontes, mit dem Durchschnitte der Schaufel und des Horizonts macht, heisse hier, wie im Lehnsatze γ; der Schaufel Neigung gegen den Horizont aber heisse φ; so geben sich ferner folgende Vergleichungen.

Lehnf.	BE	GF	F	GFB $= \Gamma$
hier	HO	AO	O	AOH $= R - \zeta$

Lehnf.	DKI $= \Delta$	BDG $= \delta$	γ
hier	$2R - DOS = 2R - \delta$	φ	γ

Die Ursache, warum Δ des Lehnsatzes hier $2R - \delta$; ist: Wenn die Verticalfläche des Lehnsatzes, und

das

das Rad, einerley sind, so wird im Lehnsatze angenommen, der spitzige Winkel, den die Fläche GFD mit der Verticalfläche macht, falle nach der untern Seite, nach BO zu; hier aber fällt der Schaufel spitziger Winkel mit dem Rade nach der obern Seite, und nach OH zu ist der stumpfe gekehrt.

Also ist

II) Im Lehns. (VII.) $\text{tang}\,\Delta . \sin\Gamma = \text{tang}\,\gamma$

hier $\text{tang}\,\delta . \cos\zeta = \text{tang}\,\gamma$

durch diese Gleichung ist γ gegeben.

Ferner

III) Lehns. (V.) $\text{tang}\,\Gamma = \text{tang}\,\delta . \sin\gamma$

hier $\cot\zeta = \text{tang}\,\varphi . \sin\gamma$

$$\text{daher } \text{tang}\,\varphi = \frac{\cot\zeta}{\sin\gamma}$$

wo γ aus (II.) bekannt ist.

IV. **Erstes Exempel.** Die Schaufel stehe auf dem Rade senkrecht, wie in (384. IX;) so ist $\delta = R$ und in (384; V.) $\sin\eta = \cos\zeta$.

Weil also $\text{tang}\,\delta$ unendlich ist, so wird hier in (II.) $\text{tang}\,\gamma$ auch unendlich oder $\gamma = R$.

Die Linie nähmlich, welche in der 32. Fig. FD ist, der Schaufel Durchschnitt mit dem Horizonte ist hier ein Loth auf das Rad durch O;

Endlich ist hier in (III.) $\text{tang}\,\varphi = \cot\zeta$.

V. **Zweytes Exempel.** $\zeta = 50$ Gr. $\delta = 30$ Gr. Also die Logarithmen, die in den Tafeln stehen, auf solche, die beym Halbmesser 1

statt

statt fänden, gebracht, so daß man von jedem 10 abzieht. Auf diese Art giebt (384; V.)

$$\log \sin \delta = 9{,}6989700 - 10$$
$$\log \sin \zeta = 9{,}8842540 - 10$$

$$10 + \log \sin \eta = 9{,}5832240$$

so erhält man den Logarithmen des Sinus von η wie dieser Logarithme in die Tafeln gehört. Es ist $\eta = 22$ Gr. 31 M.

Nun ist hieraus (II.)

$$\log \text{tang} \delta = 9{,}7614394 - 10$$
$$\log \cos \zeta = 9{,}8080675 - 10$$

$$10 + \log \text{tang} \gamma = 9{,}5695069$$

gäbe $\gamma = 20$ Gr. 22 M. — wenn tang γ in II. bejaht wäre, weil aber dieser Werth verneint ist, so kömmt $\gamma = 159^\circ 38'$.

Also hier aus (III.)

$$\log \cot \zeta = 9{,}9238135 - 10$$
$$\log \sin \gamma = 9{,}5416126 - 10$$

$$10 + \log \text{tang} \varphi = 10{,}3822009$$
$$\text{giebt } \varphi = 67^\circ 28'$$

VI. In der 33. Fig. stelle die Ebene des Papiers die Horizontalfläche vor, OH sey eben die Linie der 31. Fig. Man legt NM so, daß NOM oder der gleiche Verticalwinkel $= 20$ Gr. 22 M.; so ist das der Schaufel Durchschnitt mit dem Horizonte.

Dieß erhellt so

32 Fig	FB	BFD
31. u. 33. Fig.	OH	γ = HOM

Nun

Nun aber ist γ hier stumpf: Folglich ist NOH = 180 Gr. — (20 Gr. 22 M.).

Ueber dieser Linie steht die Schaufel so, daß sie gegen den Horizont, nach der Seite zu, wo H liegt, in einem Winkel von 67 Gr. 28 M. geneigt ist.

Dieß erhellt, weil in der 32. Fig. der spitzige Winkel GDB, welcher jetzo Φ ist, von der Linie FD nach der Seite zu fällt, wo B liegt. Nun sind in der 32. Fig. FD; FB das was jetzo OM, OH sind.

Es sey also in der 34. Fig. OK horizontal, OL in einer Verticalfläche so, daß LOK = 67 Gr. 28 M.; so ist dieses der Neigungswinkel der Schaufel gegen den Horizont.

VII. So ist es leicht, diese Lagen der Flächen gegen einander durch ein Modell vorzustellen. Man mache auf einer Horizontalfläche den Winkel MOH = γ; Ueber OH setze man eine Verticalfläche, und durch sie über MN eine schiefe, die mit dem Horizont nach H zu den Winkel Φ macht. Dieser Durchschnitt mit der Verticalfläche wird mit OH den Winkel R — ζ machen, und die Flächen werden, nach der obern Seite mit einander den Winkel δ machen.

387. Wenn das Wasser auf die beschriebene unterste Schaufel senkrecht stößt, zu finden, was es für Neigungen gegen den Horizont und gegen das Rad hat.

Aufl. I. VWK 34. Fig. sey die Richtung des Wassers, senkrecht auf die Schaufel OL, so ist

klar,

klar, daß es mit dem Horizonte den Winkel WKO = 90 Gr. — φ machen muß.

Im Exempel (386. V.) ist er 22° 30′.

II. Hr. Euler sagt (*), die Richtung des Wassers sey gegen den Horizont unter dem Winkel ζ geneigt. Das ist in 386; IV. wahr, daß es in andern Fällen nicht gelte, übersieht man wohl gleich ohne Rechnung, denn soll des Wassers Richtung auf die Schaufel senkrecht seyn, so bestimmt sich dieser Richtung Lage gegen den Horizont ohnstreitig durch die Lage der Schaufel gegen den Horizont und diese Lage der Schaufel kömmt nicht allein auf den Winkel ζ an, sondern auch auf δ.

III. Mit dem Rade macht die Richtung des Wassers offenbahr den Winkel 90 Gr. — δ, wenn sie auf der Schaufel senkrecht steht und die Schaufel mit dem Rade den Winkel δ macht.

IV. So erhellt, wie das Wasser muß geleitet werden, daß es auf diese Schaufel senkrecht stösst. Die Berechnungen des Effects, und was dazu gehört, werden übrigens auch nach 355, u. f. geführt.

V. Dritte Art. (s. 381.) Ein Rad, dessen Schaufeln nach der bisher beschriebenen zweyten Art gestellt sind (383), setze man dergestalt, daß die Axe, um die es sich dreht, vertical steht, so kann das Wasser auf die Schaufel so stossen, daß das Rad in einer Horizontalfläche herumgeht.

(*) §. 37.

geht. Man heisst es Horizontalräder. Belidor (*) und Leupold (**) geben umständliche Nachricht von ihm. Sie sind in Dauphine, Provence und Schweden gebräuchlich, und dienen, wo wenig Wasser und hohes Gefälle ist. Das Wasser läuft aus einer geschlossenen Röhre auf die Schaufeln, die oft muschelförmig gemacht werden. Belidor rühmt die Vortheile dieser Räder bey ihrem einfachen Baue. Sie haben auch das eigne, daß man Wasser durch eine Röhre auf eine Schaufel durch eine andere Röhre auf eine andere Schaufel leiten kann; dadurch werden die Schaufeln geschonet, der Stoß des Wassers, der das Rad umzutreiben nöthig ist, kann unter mehr Schaufeln vertheilt werden, da ihn bey verticalen Rädern immer eine Schaufel allein auffangen muß; auch kann eben deßwegen das Rad leichter einen gleichförmigen Gang haben, als wenn die ganze Kraft, durch die es getrieben wird, an einer einzigen Stelle angebracht ist.

Da diese Räder bekannt sind, so könnte es wohl seyn, daß Hr. Euler dadurch wäre veranlasst worden, eines solchen Rades Axe horizontal zu stellen, und daraus die beschriebene zweyte Art zu machen, die meines Wissens noch nirgends gebraucht wird.

388.

(*) Archit. hydraul. Pr. Part. T. I. art. 666..669.

(**) Theatr. mach. gen. 540..550 §.

388. I. Untersuchungen über unterschlächtige Wasserräder zeige ich hie nur an, da die Umstände mir nicht gestatten, sie ausführlich beyzubringen.

II. Theoria noua motus machinarum, vi aquae in rotam subtus incurrentis mouendarum, ist von Hrn. Ge. Sim. Klügel, damahls Prof. in Helmstädt, jezo in Halle, der K. Soc. d. W. zu Göttingen übersandt worden, als die Universität ihr funfzigjähriges Jubiläum feyerte. Ich habe die Schrift 190; VII erwähnt.

III. Man stelle sich ein senkrechtes prismatisches Gefäß voll Wasser vor, in einer Wand von ihm unter ein Rechteck, so breit als die Wand ist, und 2. B hoch, die Fläche dieses Rechteckes = A. H sey die Wasserhöhe über des Rechteckes Mitte, so ist der Druck auf das Rechteck, wenn dasselbe nicht ausweicht = H. A (9). Ist das Rechteck nicht verschlossen, sondern offen, so fliesst das Wasser mit Geschwindigkeiten aus, deren mittlere in (190; VI) gegeben ist.

IV. Nun setze man, das Rechteck weiche aus, so daß es sich immer parallel-vertical bleibt. Der Druck des Wassers auf dieses ausweichende betrage soviel als das Gewicht einer Wassersäule, deren Innhalt = A. (h — x). In sofern die Wirkung der Schwere des Wassers auf diesen Druck verwandt wird, entsteht keine Geschwindigkeit daraus. Aber von der ganzen Wirkung A. h. bleibt der Theil Ax zurück, der nichts zum Drucke auf die Ebene beyträgt, und also zu Erzeugung

und

und Erhaltung der Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers angewandt wird.

V. Nun hat er die mittlere Geschwindigkeit in (III) durch eine Reihe ausgedruckt, die nach Potenzen von $\frac{B}{H}$ fortgeht. Wie nun Druck = A. H, und erwähnte mittlere Geschwindigkeit gleichgültig sind, so schliesst er: Wenn Druck = A. x auf das weichende Rechteck nicht statt finde, so entstehe eine Geschwindigkeit, die eben so durch x gegeben wird, wie jene durch h, setzt also in der Reihe für jene mittlere Geschwindigkeit nur x statt h.

VI. Dieses Ausdrucks Differential = o gesetzt, giebt ihm die grösste Wirkung. Er braucht nur der Reihe beyde ersten Glieder, und findet die Last, die bey der grösten Wirkung erhoben wird $= \frac{1}{3}$ A. $(2.\,H - \frac{B^2}{H})$ Die celeritas terminalis, mit der sie gehoben wird, gehört der Höhe $\frac{1}{3}H + \frac{B^2}{3.\,H}$; von der absoluten Kraft, die im Zustande der Ruhe statt fände, werden fast zwey Drittheile angewandt, das Gewicht zu überwinden, das übrige zu Erhaltung der erzeugten Geschwindigkeit.

VII. Er sucht diese Theorie durch Vergleichung mit der gewöhnlichen zu bestätigen, und bringt einige praktische Vorschriften bey, z. E.

das Gerinne unter dem Rade nach einem Kreisbogen zu krümmen, welcher dem Rade concentrisch ist, damit das Wasser immer senkrecht auf die Schaufel stösst.

VIII. Er hat seine Theorie Hrn. Wilkens mitgetheilt, welcher sie einigermassen mit Erfahrung vergleicht. Ueber den Gang der Mühlengänge, III. Aufsatz in: Aufsätze mathematischen, physikalischen und chemischen Innhalts von H. D. Wilkens A. M. erstes Heft. Gött. 1790.

Neue Theorie des unterschlächtigen Wasserrades von G. S. Klügel, findet sich aus dem 9. Th. der Gött. Commentation. übersetzt in Magazin für die Bergbaukunde von Lempe; XI. Th. 1795. Der Uebers. ist des Verf. Sohn. In einem Nachtrage hat Hr. Kl. da Fälle angeführt, wo wirklich vorhandne Mühlen bey Helmstädt und Halle so geordnet sind, daß ihre Geschwindigkeit ziemlich nah mit der übereinstimmt, die Hr. Kl. analytisch als die vortheilhafteste gefunden hatte.

IX. Von Hrn. Franz Gerstner, Prof. der höh. Math. zu Prag, findet sich: Theorie des Wasserstosses in Schußgerinnen, mit Rücksicht auf Erfahrung und Anwendung, in: Neuere Abhandlungen der K. Böhm. Ges. der Wissensch. Zweyter Band, Prag 1795; Physikal. math. Theil XIV. Abh. Er nimmt an, Schaufeln und Gerinne sind so eingerichtet, daß gar kein Wasser, neben, unter, oder zwischen den Schaufeln

feln durchkomme, ohne anzustossen, und des Rades Geschwindigkeit anzunehmen. Hinderniſſe, wie Reiben .. werden anfangs beyseitgesetzt.

X. Wenn g die Höhe des Falles in einer Secunde bedeutet, c des Wassers Geschwindigkeit vor dem Stosse, c — v nach dem Stosse, w das Gewicht des Wassers, das in jeder Secunde in das Schußgerinne fliesst, P die Kraft des Stosses, so ist ihm $P = W. \frac{c-v}{2.g}$ folglich die Grösse der Bewegung der Last $= \frac{W}{2.g}.(c.v - v^2)$.

Das Differential hievon $= o$ gesetzt, giebt die Geschwindigkeit, für welche die Bewegung am grösten ist, $= \frac{1}{2}c$, dafür ist der Stoß $= W. \frac{c}{4g}$; und die grösste Bewegung $= \frac{W.c^2}{8.g}$

Heist h die Höhe, welche der Geschwindigkeit v gehört, so ist die grösste Bewegung $= W. \frac{1}{2}h$; wo h das Gefälle des Wassers bedeutet.

X. Man vergleiche Gerstners Formel mit der 346; III; in der letztern die Winkel alle rechte gesetzt. So ist

G.	W	c	v
mir	A	$2.\sqrt{g}.v$	$2\sqrt{g}.u$

Also Gerstners Stoß in meinen Zeichen $= \frac{A.(\sqrt{v}-\sqrt{u})}{\sqrt{g}}$

Nähmlich, bey einerley Menge und Geschwindigkeit des auffallenden Wassers, verhält sich Gerstners Stoß wie Unterschied der Geschwindigkeiten des Wassers und des Rades, und der in 346; den man seit Parent angenommen hat, wie das Quadrat dieses Unterschiedes.

XII. Das giebt also bey G. ganz andre Folgen, die er auszuführen, zu bestätigen, und anzuwenden bemüht ist. Er hat ihnen gemäß eine neue Rädermaschine mit Gerinn und Puchwerk verfertigt, dafür ihm die Kosten von der K. Gesellschaft sind vergütet worden, daß sie nach nöthigen Verbesserungen im Saale der Ges. aufgestellt wird. Gesch. der Ges. in angef. Bande XI. Seine Abhandlung ist auch besonders abgedruckt worden, man hat eine Fortsetzung von ihr zu erwarten.

XIII. Von unterschlächtigen Wasserrädern Langsdorf, Hydraulik 16. Cap. Er setzt den Stoß wie das Quadrat des Unterschiedes der Geschwindigkeiten.

XIV. Ich bringe noch folgendes aus einem Buche bey, das in unsern Gegenden nicht sehr bekannt werden möchte.

Oliver Evans, the Young Mill-Wright and Miller's Guide Philadelphia 1795; 8. V Theile.

Er nimmt den Fall in einer Secunde = 16,2 Fuß, die erlangte Geschwindigkeit = 32,4, übrigens die gewöhnlichen Gesetze. P. I. ch. 4. p. 18.

Nun ist P. I. 11. C. 65 S. seine Theorie für unterschlächtige Wasserräder folgende:

Wasser falle auf ein unterschlächtiges Rad 16 Fuß, das Rad gehe leer, so ist des Rades Geschwindigkeit 32,4 Fuß.

Man beschwere das Rad, daß seine Geschwindigkeit so viel beträgt, als Geschwindigkeit des Wassers, das 15 Fuß Gefälle hat, so scheint ihm offenbar, das Gewicht werde genau soviel betragen, als 1 Fuß Gefälle, davon die Geschwindigkeit aufgehoben ist, und dieses Gewicht mit der Geschwindigkeit des Rades multiplicirt, giebt 31,34. 1 = 31,34 als Effect.

Diesem gemäß berechnet er eine Tafel und findet in derselben den grösten Effect.

In der Formel $c = 2.\sqrt{(g.v)}$ sey $g = 16,2$; $v = 15$; so kömmt:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}\log g = & 0,6047575 \\ \log 2 = & 0,3010300 \\ \hline & 0,9057875 \\ \frac{1}{2}\log 15 = & 0,5880456 \\ \hline & 1,4938331 \end{array}$$

gehört zu 31,176; So giebt E. die Geschwindigkeit, die 15 gehört, etwas zu groß.

E. Satz wäre also dieser:

Gefälle	Last	Geschwind. des R.	Effect
g	0	2 g	2. g. 0
g − t	t	$2.\sqrt{(g.(g-t))}$	$2.\sqrt{(g.(g-t))}.t$

Des Effects Differential ist =

$$2\sqrt{g}.d\sqrt{(g.t^2-t^3)}.$$

$$= \frac{2.\sqrt{g}.(2.g.t-3t^2)\,dt}{\sqrt{(g.t^2-t^3)}}$$

$$= \frac{2.\sqrt{g}.(2.g-3t)\,dt}{\sqrt{(g-t)}}$$

verschwindet für $t = \frac{2}{3}g$ Da ist

Gefälle	Last	G. d. R.	Effect
$\frac{1}{3}g$	$\frac{2}{3}g$	$2.g.\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{4}{3}.g^2.\sqrt{\frac{1}{3}}$

Setze ich $g = 16,2$; so kömmt $\frac{1}{3}g = 5,4$;

Ferner log 2. $g = 1,5105450$

$\frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = 0,7614394 - 1$

$1,2719844$

$\log\frac{2}{3}g = 1,0334238$

$2,0334238$

Giebt Gefälle	Last	G. d. R.	Effect
5,4	10,8	18,706	202,03
E. hat 5,33	10,66	18,71	199,44

Er hat für unterschiedne Gefälle von 16 bis 0; ohne Zweifel mit den Zahlen selbst gerechnet, also mühsamer und nicht so scharf, als ich mit den Logarithmen.

Wenn die Last durch t ausgedruckt wird, so heisst dieses begreiflich soviel: Von der Höhe $g - t$ fällt Wasser auf eine Schaufel, die es senkrecht stösst, so verhält sich, was hie Last genannt wird, allemahl wie t.

Es sey P die Last, welche das Rad stehen macht, l die, mit welcher das Rad mit der Geschwins-

schwindigkeit 2. $\sqrt{(g.(g-t))}$ fortgeht, so ist $P:l = g:t$, und die Geschwindigkeit des Rades wird $= 2.g\sqrt{\frac{P-l}{P}}$. Dieses giebt auch Evans p. 74. In einem dasigen Exempel setzt er $2.g = 32,4$; $P = 16$; $l = 12$ und findet des Rades Geschwindigkeit $= 32,4.\sqrt{\frac{16-12}{16}} = 16,2$.

Die gewöhnliche Theorie, (Hydrod. 351 ... 378) sagt Evans, stimme nicht mit der Erfahrung, auch nicht eine neue, die Waring in den Schriften der philos. Ges. zu Philadelphia gegeben hat. Wenn aber seine Theorie mit der Erfahrung übereinstimme, brauche sich der Praktiker nicht sehr darum zu bekümmern, worauf sie beruht.

Evans Buch enthält sonst vom Mühlenbaue, allerley Arten und Gebrauche der Mühlen sehr gute Belehrungen, die es empfehlen, wenn man auch gegenwärtigen und andern theoretischen Sätzen, nicht eben Beyfall gäbe.

Oberschlächtige Wasserräder (S. 351.)

389. Eines oberschlächtigen Rades (35 F.) (Stat. 73) Schaufeln, ABa, BCb, u.s.w. sind wie Kasten eingerichtet, in welche das Wasser fallen, und darinn bleiben kann. Die Figur stellt den Durchschnitt mit einer Fläche vor, die auf des Rades Axe senkrecht stünde. Indem das Rad

umgeht, kömmt nach und nach immer ein anderer und anderer solcher Kasten unter die Rinne, aus welcher das Wasser herabfällt, und so befindet sich nach und nach, in unterschiedenen dieser Kasten, wie sie nach einander folgen, zugleich Wasser. Der Theil des Rades, wo sich diese Kasten mit Wasser befinden, ist also schwerer, als der entgegengesetzte Theil, wo nur leere Kasten sind. Das Rad geht also um, nach der Gegend, nach welcher die Kasten mit Wasser sinken. Wenn ein solcher Kasten weit genug hinunter kömmt, daß seine obere offene Fläche gegen den Horizont geneigt wird, so fängt er an, sein Wasser auszugiessen, so gleich, wo sich diese Oberfläche zu neigen anfängt, wenn er ganz voll war, oder bey einer stärkern Neigung, wenn er nicht ganz voll war. Und weil er beym fernern Umdrehen des Rades ganz umgekehrt, mit der offenen Seite ganz zu unterst zu stehen kömmt, so giesst er sein Wasser alles aus, und füllt sich nachgehends wieder, wenn er zum zweyten mahle unter die Rinne kömmt u. s. w.

390. I. Dieses Rad geht also deßwegen um, weil es auf einer Seite vom Wasser beschwert ist. Oberschlächtige Wasserräder werden vom Gewichte des Wassers getrieben, unterschlächtige durch den Stoß.

II. Wenn man ein Rad zu treiben, wenig Wasser hat, das sich aber hoch über der Stelle befindet, wo das darüber kommen, so pflegt man oberschlächtige Räder zu brauchen. Das Wasser,

das

das bey Q 35 Fig. zufliesst, könnte z. E. von Q bis in f herunter fallen, und mit der Geschwindigkeit, die es durch diesen Fall erlangt hätte, daselbst an Schaufeln eines unterschlächtigen Rades stossen.

III. Dieses Gefälle also, das man dem Wasser geben könnte, ein unterschlächtiges Rad statt des oberschlächtigen zu treiben, ist wenigstens so groß, als des Rades Durchmesser, oder Höhe, fm, wenn die Schaufeln bey M, F, vertical stehen. Es ist klar, daß man zu MF dem Durchmesser des Kranzes vom Rade noch auf jeder Seite die Breite der Schaufel Mm = Ff setzen muß.

391. Die Berechnung, wie das oberschlächtige Rad von diesem Gewichte getrieben wird, sich zu erleichtern, so setze man in der 36 Fig. die oberste Schaufel, die Wasser enthalte, sey bey G, die unterste bey H. Nun stelle man sich statt dieses Wassers in der Schaufel ein Stück eines Ringes vom Wasser GghH vor, dessen Breite Gg, so viel betrüge, so weit das äuserste Wasser in der Schaufel, das vom Umfange des Rades am meisten entfernt ist, von diesem Umfange absteht. Man nehme also an, in diesem Stücke eines Ringes sey so viel Wasser enthalten, als auf einmahl in den Schaufeln, die sich von G bis H befinden, zusammen enthalten ist, so wird das Rad — nicht etwa mit dem Ringe so umgehen, wie mit den Schaufeln, das begreift man leicht,

weil der Ring am Rade hängen bleibt, die Schaufeln das Wasser ausgiessen, — sondern in diesem Augenblicke, da der Punct G, eine gewisse Höhe über den Horizont hat, und gleich zu sinken anfängt, in diesem Augenblicke, wendet das Wasser im Ringe eben so viel Gewalt an, das Rad zu drehen, als das Wasser in den Schaufeln, beyde haben einerley statisches Moment (Stat. 37.) und das Rad stehend zu erhalten, wird einerley Gewalt erfodert, das Wasser befinde sich im Ringe oder in den Schaufeln.

392. Aufg. Das statische Moment des Ringes (391) zu finden.

Aufl. Auf AB, des Rades lothrechten Durchmesser ziehe man GE, MP, HF, senkrecht, die erste und letzte, von den beyden Gränzen des Ringes, die mittlere von einer willkührlichen Stelle in ihm.

Ein Querschnitt des Ringes, mit einer Ebene gemacht, die dnrch des Rades Mittelpunct geht, und auf des Rades Ebene senkrecht steht, heisse cc; Wenn Gg die Verlängerung des Halbmessers durch G ist, so ist es die Höhe dieses Querschnitts, dessen Breite so viel beträgt, als die Dicke des Randes vom Rade, an welchem der Ring hängt.

Wenn M, m, einander unendlich nahe sind, so ist das Element des Ringes, das zwischen den Ebenen durch MN, mn, die beyde durch C gehen, enthalten ist, c^2. Mm; und dieses Elementes statisches Moment, c^2. Mm. MP; So viel Gewalt wendet nähmlich das Element, als

ein

ein Gewicht an derselben Stelle betrachtet, an, das Rad zu drehen.

Aber Mm. MP = Mr. CM (Geom. 65. S.) = Pp. CM; die Summe aller Momente der Elemente von G bis M also ist c^2 EP. r, wenn des Rades Halbmesser = r;

Und folglich ist des Ringes Moment = c^2 EF. r. Der Ring bemüht sich nähmlich, das Rad von G nach H zu drehen. Wäre also ein Gewicht, so schwer als die Wassermenge c^2 EF; so angebracht, daß es z. E. vermittelst eines Seiles, am Umfange des Rades nach der Tangente zöge, und das Rad von G nach A drehen wollte, so hätte es mit dem Ringe einerley Moment, und das Rad bliebe stehen. Man kann also überhaupt sagen: der Ring wirkt das Rad zu drehen wie ein Gewicht, so schwer als die Wassermenge c^2 EF ist, thun würde, das irgend einer Stelle im Umfange des Rades, nach der Tangente zöge. — Nicht das irgendwo an einer Stelle im Umfange des Rades befestigt wäre, denn das Gewicht für sich sucht allemahl lothrecht zu sinken, und hat also, das Rad zu drehen, ein ander Moment, wenn es in G, als wenn es in M befestigt ist. Wäre es aber am Ende des horizontalen Halbmessers befestigt, so hätte es, das Rad zu drehen, eben das erwähnte Moment.

Leupold hat, als etwas, das vor ihm niemand gewiesen hätte, eine Vorschrift gegeben, die Kraft des Wassers bey überschlächtigen Was-

sers

ferrädern zu berechnen (*). Sie beruhet mit gegenwärtigem auf einerley Grunde, nur sucht er mühsamer die Momente des Wassers einzeln in den Kasten, und addirt diese Momente zusammen.

393. Zus. Jeder Punct des Rades, gehe im Umfange mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört, so rückt er in einer Secunde um den Raum $2\sqrt{gu}$; und um den Winkel $\frac{2\sqrt{gu}}{r}$ fort, (Hdh. Mech. III. Abschn. 217; VIII.).

Nun kann man sich, statt des Ringes, eine Kraft an irgend einem Puncte des Rades vorstellen, so stark, daß das Gewicht der Wassermenge c^2 EF von ihr könnte erhalten werden; diese Kraft müsste beständig nach der Tangente des Rades wirken. Bewegt sich nun das Rad mit der angezeigten Geschwindigkeit, so heisst dieses so viel: die angegebene Kraft legt, nach dem Umfange des Rades, einen Weg $= 2\sqrt{gu}$ in einer Secunde zurück; also ist das Moment der Wirkung (365.) $2c^2$ EF. $\sqrt{gu}$.

Das, was in EF multiplicirt ist, beträgt so viel als eine Menge Wasser, die durch des Ringes Querschnitt (392) mit der Geschwindigkeit jedes Puncts im Umfange des Rades, innerhalb einer Secunde fliesst. Sie heisse $A = 2c^2$. $\sqrt{gu}$.

394. AB sey eine lothrechte Linie, die unbeweglich stehen bleibt, indem sich das Rad dreht,

GMH

(*) Theatr. Mach. gen. §. 534.

GMH aber, ist ein bestimmter Theil in dem Umfange des Rades, der gegen die lothrechte Linie, nach dem sich das Rad dreht, bald die bald jene Stellung erhält. Indem also der Ring sinkt, und das Rad sich dreht, so wird der Punct H unter B kommen; alsdenn ist das Moment der Wirkung (393) A. BE.

395. Man nehme an, wenn des Ringes unterste Gränze, H; unter B kömmt, so fliesse Wasser daselbst aus, so viel aber da Wasser ausfliesst, so viel werde an der obersten Gränze bey G beständig wieder ersetzt, auf diese Art wird das Moment der Wirkung beständig die (394) angezeigte Gröſſe behalten.

396. Aufg. Man stelle sich nun vor, das Rad der 36 Fig. sey ein oberschlächtiges Wasserrad mit seinen Kasten versehn, wenn ein Kasten, in die Lage gegen die lothrechte Linie AB kömmt, die G in der Figur hat, so bekömmt er Wasser, sinkt alsdenn, und giesst sein Wasser aus, wenn er in B kömmt; hier wird das Moment der Wirkung gesucht.

Aufl. I. Die Menge Wasser, die in einer Secunde zufliesst, heisse A; jeder Kasten bewege sich mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört.

II. Mit der Geschwindigkeit, mit welcher jeder Kasten sich bewegt, muß auch das Wasser in den obersten Kasten bey G kommen. Käme es mit mehr Geschwindigkeit hinein, so wirkte es,

den

den Kasten schneller fortzutreiben, als er noch geht, und so würde die Bewegung des Rades beschleunigt, man nimmt aber an, sie bleibe gleichförmig; ginge der Kasten schneller fort, als das Wasser herzufliesst, so entzöge er sich dem Wasser, und empfinge davon nicht die gehörige Menge.

III. Wenn man also annimmt, das Wasser, das in den obersten Kasten Gg läuft, habe seine Geschwindigkeit durch den Fall von der Höhe u erhalten, so muß des Wassers oberste Gränze, so hoch über den obersten Kasten G erhoben seyn, oder es hat da schon ein Gefälle = u.

IV. Bedeutet a, wie viel diese obere Gränze über B erhoben ist, oder hätte das Wasser, wenn es nicht bey G aufgefangen würde, sondern ferner bis an die Horizontale durch B fiele, daselbst die Geschwindigkeit, welche der Höhe a gehört, so ist BE = a — u.

V. Das Wasser, das der Kasten in Gg auffängt, wird in einer Secunde durch einen Bogen $= 2\sqrt{gu}$ geführt.

Man kann sich dieses so vorstellen, als hinge an einem Bogen von angezeigter Grösse, das Wasser, das der Kasten empfängt, wie ein Ring (391) der Querschnitt dieses Ringes wäre also: die Wassermenge mit dem Bogen dividirt, oder

$$\frac{A}{2\sqrt{gu}}.$$

Der Kasten bleibt keinen Augenblick unter der Rinne, die ihm das Wasser zuschickt, unbeweg-

lich

lich stehen, sondern rückt beständig fort, indem zugleich Wasser in ihn fliesst. Man setze also von dem Augenblicke an, da er Wasser zu bekommen anfängt, bis zu dem, da er keines mehr bekömmt, verflieſſe eine Secunde, so ist die Menge Wasser, die er bekömmt = A; sein Weg in dieser Zeit = 2 $\sqrt{}$ gu und die Richtigkeit der nur gegebenen Formel offenbar.

Gesetzt aber, zwischen den beyden Augenblicken verflössen n Secunden, (wo n auch einen Bruch bedeuten kann) so ist die Menge Wasser, die er bekömmt = n A; sein Weg, die Zeit über, da er Wasser bekömmt = n. 2 $\sqrt{}$ gu und die Wassermenge mit dem Wege dividirt, giebt wieder den vorigen Werth des Querschnittes.

VI. Wenn man also annimmt, die Kasten fangen alles zufliessende Wasser auf, daß nichts davon verschüttet wird, oder vorbey fliesst, und kein Kasten verliert Wasser, bis er unter B kömmt, da er sich denn seines Wassers entledigt, und von B nach A leer hinauf geht, so wird in (392)

$c^2 = \frac{A}{2\sqrt{gu}}$ und in (394) das Moment der Wirkung = A. (a–u).

397. Zus. Es ist also kleiner, als das Moment des Triebes A. a (365), kömmt aber solchem desto näher, je kleiner u ist, das ist, je langsamer das Rad geht, daß man also zwar allemahl einen Verlust am Momente des Triebes leidet, aber diesen Verlust so klein machen kann als man

will,

will, wenn man nur das Rad langsam genug gehen läfft. Worinn dieses Rad vor dem (381) den Vorzug hat.

398. Je langsamer aber das Rad geht, desto gröſſer muß c^2 seyn (396), und das könnte so viel betragen, daß man die Kasten nicht weit genug machen könnte, die gehörige Menge Wasser aufzufangen. Man wird also zuerst die Gröſſe der Kasten bestimmen, und den Gang des Rades darnach einrichten.

399. Der Bogen im Umfange des Rades, um welchen zweene nächste Kasten von einander abstehen, habe die Länge b; der Bogen $2\sqrt{gu}$ sey $=$ m. b, so enthält dieser Bogen, m Kasten. Denn man stelle sich vor, dieser Bogen sey GM, und sein erster Kasten sey bey G; so ist der zweyte, in der Weite b davon, der dritte in der Weite 2b... Der mte in der Weite (m — 1). b. So viel Kasten gehören zu diesem Bogen; In der Weite m. b von G, oder in M, ist wieder ein Kasten, aber der gehört als erster, dem nächstfolgenden gleichen Bogen, der sich von M anhebt, und weiter hinunter erstreckt.

Weil nun der Bogen m. b die Wassermenge A enthält, (396) so enthält jede seiner Schaufeln die Wassermenge $\frac{A}{m} = \frac{A.b}{2.\sqrt{gu}}$, denn weil die Schaufeln eine eben auf die Art, wie die andere unter der Rinne, die das Wasser zuführt, weg-

weggehen, so bekömmt eine so viel Wasser als die andere.

Der Kasten muß also wenigstens so groß seyn, daß er die angezeigte Wassermenge fassen kann. Bedeutet H den Raum, den sie einnimmt, so ist $2 \sqrt{gu} = \frac{A.b}{H}$; Dieses zeigt, wie man die Geschwindigkeit des Rades einrichten müsse, daß jeder Kasten die ihm zukommende Menge Wasser fassen kann.

Man sieht aber leicht, daß der Raum jedes Kastens grösser seyn muß, als H; sonst füllte ihn das Wasser so genau an, daß er viel zu zeitig anfangen würde, welches wieder auszugiessen, so bald seine obere Fläche ein wenig schief zu stehn käme.

Von der Grösse des Rades, wird weiter nichts bestimmt, als daß sein Durchmesser nicht kleiner seyn darf, als a — u (396).

400. **Untersuchung des oberschlächtigen Wasserrades 35. Fig.**

I. Die Linie Aa, die Breite jedes Kastens sey = s seine Länge, die so viel beträgt, als die Dicke des Kranzes vom Rade, an dem die Kasten sitzen, sey = t, so ist die obere offene Fläche des Kastens, wo das Wasser hineinläuft = s.t; die Länge des Bogens AB, den jeder Kasten am Umfange des Rades einnimmt, sey = x; weil der Kasten kein Prisma ist, sondern unten enger

zugeht als oben, so nehme man $\frac{2}{3}$ s. t. x für seinen Inhalt an.

II. Man setze, der Schaufeln bey M, F, ihre Breiten Mm, Ff stehen vertical, diese beyden Schaufeln stehen an den beyden Enden von des Rades lothrechtem Durchmesser. Die Höhe a (396..IV.) werde von f hinauf gerechnet. (Man rechnete sie dorten von B, weil man der Schaufeln Breite nicht in Betrachtung zog).

III. Ist unter den Kasten, die Wasser auffangen, der oberste P; so muß sein Punct A die Tiefe u unter dem Wasser haben, (396. III.) und desselben Höhe über den Punct f ist also a—u, folglich des Puncts a Höhe über dem Puncte f, noch grösser. Weil aber der Punct a niedriger ist, als der Punct m, so ist die Verticallinie fm, oder $2r + 2.s. > a - u$, weil aber auch selbst die oberste Stelle des Rades niedriger seyn muß, als das Wasser, so ist $2r + 2.s < a$.

IV. Damit die Kasten alles zufliessende Wasser auffangen können, muß $\frac{2}{3}$ s. t. x $> \frac{A.x}{2\sqrt{gu}}$ seyn (399).

Man setze also $s.t = \frac{A}{\sqrt{gu}}$.

V. Wenn man gegenwärtige Figur mit der 36. vergleicht, so sind A; F; hier, was in der 36sten G, B, waren. Nun bedeutete in (396; VI.) a—u, wieviel dorten G höher als B war. Will man

man also den dortigen Ausdruck des Moments der Wirkung hier anwenden, so muß man darinnen statt a – u setzen, wieviel hier A höher als F ist. Weil nun A um a — u höher als f ist (III.), so ist es um a — u — s höher als F; und das Moment der Wirkung ist A. (a — u — s).

VI. Dieß wäre richtig, wenn die Schaufeln alle ihr Wasser völlig behielten, bis jede in die Stellung FGf käme. Weil sie aber eher anfangen, Wasser zu verlieren, auch beym Einflusse nicht alles Wasser so genau von ihnen aufgefangen wird, so ist die Wirkung viel kleiner, als diese Formel sie angiebt.

VII. Es erhellt, daß der oberste Kasten, der Wasser auffangen kann, schon etwas schief stehen muß, und sich nicht an der obersten Stelle des Rades bey M befinden kann.

VIII. Dieses Kastens Tiefe unter dem Wasser, die in (III.) u hieß, heisse nun b. Gehen die Kasten mit der Geschwindigkeit um, die dieser Höhe b gehört, so ist (des Kastens Breite beyseite gesetzt, weil sie meistens klein genug dazu seyn wird) das Moment der Wirkung, A. (a–b) (V.). Gehen aber die Kasten langsamer um, mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört, so wirkt das Wasser in jeden Kasten, nicht nur mit seinem Gewichte, sondern auch mit seiner Geschwindigkeit, die der Höhe b gehört, und wenn man annimmt, daß Wasser stosse solcher Gestalt auf den Boden jedes Kastens senkrecht, so ent-

steht daraus noch ein Moment der Wirkung = 2A. $(\sqrt{b} - \sqrt{u}) \cdot {}^{2}\sqrt{\frac{u}{b}}$ (355; IX.) beyde zusammen machen jetzo das ganze Moment der Wirkung aus.

IX. Dieses Ganze kann sich ändern, wenn sich u ändert, und wird am grösten, wenn sein letzter Theil, der vom Stosse herrührt, am grössten wird, denn der erste ändert sich nicht; Das geschieht für $\sqrt{u} = \frac{1}{3}\sqrt{b}$ (356. III.), und die grösste Wirkung ist A. $(a - b) + \frac{8}{27}$. Ab (356. IV.) $=$ A. $(a - \frac{19}{27}b)$, diese grösste Wirkung ist also doch geringer als die, welche sich durch das Gewicht des Wassers allein erhalten lässt, wenn man in (397) u klein genug machen kann.

X. Bey dem oberschlächtigen Wasserrade ist also die Wirkung desto grösser, je grösser seine Höhe ist, damit die oberste Schaufel, die das Wasser auffängt, nicht tief unter dem Wasser ist, sondern u (6.) oder b (IX.) geringe ist. Die Schaufeln müssen so weit gemacht werden, als es die übrigen Umstände zulassen, und von einer Gestalt, daß sie das Wasser behalten, bis sie ganz unten hin kommen. Das Wasser muß so in sie geleitet werden, daß es nach der Tangente des Rades hinein fällt, und der Gang des Rades langsam genug seyn, daß die Kasten voll Wasser werden, und doch das Wasser nicht überläuft.

Das halb oberschlächtige Rad.

401. Man setze, das Wasser fiele auf das Rad 35. Fig. nicht bey Aa, sondern bey Cc, in die Schaufel, die sich ohngefähr in einer Horizontale mit des Rades Mittelpuncte befindet. Es ist leicht zu begreifen, daß das Wasser alsdenn aus einer Rinne etwa wie bey T darauf fallen muß, und das Rad nach der Richtung CDE umgeht, man heisst es ein **halboberschlächtiges** Rad.

II. Der oberste Kasten, der zuerst Wasser auffängt CcD, befinde sich um die Tiefe u unter der obern Gränze des Wassers, oder das Wasser falle auf ihn mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe u gehört, so muß das Rad eben die Geschwindigkeit haben (396; II.) und, wenn wieder, wie in (399; II. und 396. IV.) das Wasser in f die Geschwindigkeit hat, die der Höhe a gehört, so ist das Moment der Wirkung (wie in 400; V.); A (a — u — s).

III. Diese Wirkung zu vergrössern, mache man s so klein, als sich thun lässt, und der Schaufel doch die gehörige Grösse zu geben, mache man den Kranz des Rades desto dicker (399. I.). Man setze auch viel Kasten um das Rad, daß der Theil des Umfanges wie DE, den jeder einnimmt, kleiner wird, und das Wasser bey T ohngefähr immer in gleicher Höhe in die Schaufel fliesst.

IV. Wenn $u + s < \frac{10}{27} a$ so wird hier mehr Wirkung erhalten als in (362).

V. Aus dem angeführten erhellt, daß das halboberschlächtige Rad (hier IV.) und das oberschlächtige (400; IX.) mehr Wirkung geben, als das unterschlächtige, bey gleicher Wassermenge und gleichem Gefälle, welches begreiflich macht, warum man sie bey wenig Wasser braucht (389; II.); das Gefälle aber muß beträchtlich seyn, sonst liesse sich kein Rad von gehöriger Grösse anbringen, wie man aus (389; III.) sieht.

Fernere Untersuchung der oberschlächtigen Wasserräder, nach dem Elvius (*).

402. Man nehme, wie in (396) die 36. F. für ein oberschlächtiges Rad an, der oberste Kasten, der Wasser zuerst bekömmt, sey in G; und der unterste, der es ausgiesst, und alsdenn leer fortgeht, sey bey H; der Winkel GCH sey $= \mu$; um einen solchen Winkel muß sich der oberste Kasten mit seinem Wasser herunter bewegen, bis er sich desselben entledigt, und wenn an dem Bogen GH an unterschiedenen Stellen Kasten sind, (wie in 399; angezeigt wird) so kann man sich das Wasser, das sie auf einmahl enthalten, gleichförmig in dem Ringe anhängend vorstellen (391). Dieser Ring behält immer gleichviel Wasser, so viel er unten verliert, so viel bekömmt er immer oben wieder.

Diese

(*) Prop. 4.

Diese Wassermenge heisse P; man bekömmt ihre Grösse, wenn man des Ringes Querschnitt, mit der Länge des Bogens GH multiplicirt, sie ist also c^2. r. μ (392).

403. Dem Rade concentrisch sey ein Kreis (wie etwa die Welle des Rades geben kann) dessen Halbmesser CL = h; ist um diesen Kreis ein Seil gewunden, daran eine Last = L herabhängt, die das Rad dem Ringe entgegen gesetzt drehen will, so ist ihr Moment = h. L = c^2. EF. r (392) wenn das Rad zwischen ihr und dem Ringe stehen bleibt.

Man nenne EF = w; so ist c^2. r. w = $\frac{P}{\mu}$. w (402) oder L. h. μ = P. w.

404. Die Zeit vom Einflusse des Wassers in G, bis zum Ausflusse in H; oder die Zeit, innerhalb welcher der Kasten, der jetzo Wasser bekommen hat, hinunter an die Stelle kömmt, wo er sich ausleert, betrage n Secunden, so ist r μ = n. 2 $\sqrt{}$ g u (393).

In dieser Zeit leeren sich alle Kasten, die an dem Bogen GH befindlich sind, aus, der unterste, im Anfange dieser Zeit, und der oberste am Ende. Es wird also in dieser Zeit die Wassermenge P ausgegossen (402), weil aber immer, wie sich unten ein Kasten ausleert, oben sich einer wieder anfüllt, und so die Kasten, die an dem Bogen GH stehen, immer gleichviel Wasser enthalten,

halten, so kann man sagen, daß innerhalb dieser Zeit auch die gleiche Wassermenge P zufliesse.

405. In eben der Zeit bewegt sich ein jeder Punct des Rades um den Winkel μ, und also jeder Punct der Welle (403) um den gleichen Winkel, folglich um einen Bogen $=$ h. μ. Um so viel also wird die Last an der Welle gehoben, und daher ist das Product aus ihr, in ihren Weg, während der n Secunden $=$ P. w (403). Elvius nennt dieses den Effect.

Dieses Product ist $=$ c^2. r. μ. w (402) $=$ c^2. w. n. 2 $\sqrt{}$ gu (404) und giebt also mit n dividirt, das Moment der Wirkung (393) wie gehörig (365).

406. I. Weil die Bewegung gleichförmig angenommen wird, so erhebt sich die Last um einen Raum $=$ w; in $\frac{\text{n. w}}{\text{h. }\mu}$ Secunden (404) und weil das Wasser wie in (404) beschrieben worden, gleichförmig zufliesst, so fliesst die Menge $\frac{\text{P. w}}{\text{h. }\mu}$ in der Zeit zu, in welcher die Last um w gehoben wird. Dieß aber ist $=$ L (403), also ist die Last, die gehoben wird, so groß, als die Menge Wasser, die in der Zeit auf die Schaufeln fällt, innerhalb welcher die Last um die Höhe zwischen dem Einflusse und Ausflusse gehoben wird. So hat Elvius den Satz ausgedruckt.

II. Ist $h = r$ oder stellt man sich die Last am Umfange des Rades vor, so ist $L = \frac{P.w}{r.\mu}$ oder: diese Last verhält sich zum Gewichte des Wassers, das auf einmahl zusammen in den Schaufeln ist, wie die senkrechte Höhe zwischen dem Einlaufe und Auslaufe, zu dem Bogen des Rades zwischen dem Einlaufe und Auslaufe.

III. Diese Last wird allemahl so hoch gehoben, so viel ein Punct des Rades in gleicher Zeit fortrückt, oder sie wird mit der Geschwindigkeit des Rades gehoben.

IV. Wenn der Bogen $r.\mu$; m Schaufeln enthält, (wie dergleichen in 399. angenommen worden) so enthält jede $\frac{P}{m}$ Wasser und jede steht von der nächsten um den Bogen $= \frac{r.\mu}{m}$ ab; Es ist also in II; $L : \frac{P}{m} = w : \frac{r.\mu}{m}$ oder die dortige Last, verhält sich zum Gewichte des Wassers in einer Schaufel, wie die dort angezeigte senkrechte Höhe, zur Weite einer Schaufel von der nächsten.

407. **Vergleichung des Effects (406) mit dem gröſſren (362) oder einem andern, des oberschlächtigen Rades.**

I. Aus 404; ist $\frac{P}{n} = A$ in (396. I.), folglich der Effect (405) in n Secunden $=$ n. A. w und in einer Secunde A. w; verhält sich also zum angezeigten grösten wie 27. w:8 a oder wie 27:8, wenn beym oberschlächtigen Wasserrade, die senkrechte Höhe zwischen dem Einflusse und Ausflusse so groß ist, als das Gefälle beym unterschlächtigen.

II. Wäre aber der Effect des unterschlächtigen Wasserrades nicht der grösste, sondern nur in (375) 2. m. $(1 - m)^2$. A v (es ist $\theta = R$ (381. V)) so wäre die Verhältniß des Effects beym oberschlächtigen Wasserrade zum Effecte des unterschlächtigen für $v = w$; wie $1 : 2. m. (1 - m)^2$.

III. Wäre alsdenn beym unterschlächtigen Rade, die Geschwindigkeit des beschwerten Rades zur Geschwindigkeit des leeren $= n:1$, also in 373; $m = \frac{1}{n}$; weil $w = u$; (381. VI.) so wird die Verhältniß in (II.) $1:2. \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = n^3 : (n-1)^2$.

IV. Bey diesem Effecte hebt das oberschlächtige Rad, ein Gewicht so schwer als das Wasser, das darauf fällt, so hoch, als die senkrechte Höhe zwischen dem Einflusse und Ausflusse ist, in der Zeit, da die oberste Schaufel vom Einflusse bis zum Ausflusse geht (404).

V.

V. Exempel. Wenn das Rad nach (400; VIII.) vorgerichtet ist, also seine oberste Schaufel G 36. F. nicht tief unter A ist, so kann man ohngefähr A für die Stelle des Einlaufs annehmen, daß also E auf A fällt. Elvius setzt, es laufe alsdenn nicht eher aus, als bis etwa 20 oder 30 Grad von der untersten Stelle des Rades (S. unten 430; I.).

VI. Für CB = 1 und den Bogen BH = 30 Gr. ist der Cosinus CF = 866 also AF = 1,866 dieß wäre w (407. I.). Nimmt man für das dortige a, des Rades Durchmesser BA = 2; so ist w : a = 1,866 : 2 fast wie 19 : 20.

Für BH = 20; wird CF = 0,939 und diese Verhältniß 1,939 : 2 auch ohngefähr = 19 : 20.

VII. Wäre das Rad halb oberschlächtig (401) so fiele das Wasser ohngefähr in der Horizontallinie durch C ein und liefe auch bey H ab; Sein Gefälle = a; wäre alsdenn ohngefähr der Halbmesser des Rades, und da wäre die Verhältniß w : a entweder 0,866 : 1 oder 0,939 : 1 beydemahl ohngefähr = 9 : 10.

VIII. Also ist in VI; VII; beynahe w = a und man kann ohne grossen Irrthum in (405) den Effect = P. a setzen, oder ihn für ein Product, aus dem Auffschlagewasser in das Gefälle annehmen.

IX. Gienge das Rad etwas weniges schneller oder langsamer, so würde dagegen etwas weniger oder mehr Last gehoben, und der Effect bleibt noch derselbe.

X.

X. Geht aber das Rad viel schneller, so kann das Wasser nicht so nahe bey des Rades oberster Stelle einfallen, sondern es fällt in eine tiefere Schaufel (wie in 400; VIII.), damit es durch diesen Fall die Geschwindigkeit des Rades erlangt, also wird schon deßwegen die Höhe zwischen dem Einflusse und Ausflusse, die Grösse w. geringer, als zuvor: Zu dieser Ursache aber kömmt noch eine andere, durch den schnellern Gang des Rades bekömmt das Wasser einen starken Schwung, der es schon aus den Schaufeln treibt, noch ehe sie in die Tiefe kommen, wo sie ausgiessen sollten.

XI. Gienge das Rad aber viel zu langsam, so fiele auf eine Schaufel mehr Wasser, als sie fassen kann, so daß sie Wasser unnützlich überlaufen liesse, (S. unten 431). Wäre dieses langsame Rad noch überdieß sehr groß und schwer, so müsste das Wasser einen desto beträchtlichern Theil seiner Kraft zu Ueberwindung der Friction anwenden, und der Effect würde dadurch noch mehr vermindert.

408. Vergleichung der Effecte zweyer Kunsträder, besonders zu zeigen, wieviel der Effect durch allzuschnellen Gang des Rades vermindert wird.

I. An der Maklöskunst in der Sahlagrube, fand Elvius die Wassermenge, die in einer Secunde auf das Rad fiel, $A = 3\frac{5}{8}$ Cubikfuß. Das Rad gieng in 9 Secunden um, und hatte 100 Schau-

Schaufeln. Es bekam also in einem Umlaufe 9. $3\frac{5}{8} = 32,625$ Cubikfuß Wasser, und davon kam auf eine Schaufel der hundertste Theil = 0,32625 also etwa $\frac{1}{3}$ Cubikfuß.

II. Die Schaufeln waren weit genug, dieses Wasser zu erhalten, daß es nicht eher als etwa $\frac{3}{4}$ Fuß über den Horizont durch H ausgegossen ward, wenn das Rad sehr langsam gieng. Der Horizont durch H bestimmte sich so, daß der Schaufel, die dahin kam, vordere Wand horizontal zu liegen kam.

III. Aber bey der angezeigten Geschwindigkeit, die das Rad hatte, fand sich, nach einer Art, die weiter unten (430) soll genauer gewiesen werden, daß das Wasser $2\frac{1}{2}$ Fuß über dem erwähnten Horizonte schon verschüttet zu werden anfing, und $1\frac{1}{4}$ Fuß über demselben schon völlig verschüttet war. Das arithmetische Mittel zwischen diesem Anfange und Ende des Ausgiessens (Arithm. V. Cap. 13) ist $1\frac{7}{8}$ oder beynahe $1\frac{3}{4}$ Fuß. Man nehme also an, alles Wasser werde $1\frac{3}{4}$ Fuß hoch über dem Horizonte durch H ausgegossen.

IV. Die Geschwindigkeit des Rades zu bekommen, musste das Wasser 3 Fuß hoch fallen, bedeutet also G die oberste Schaufel, in die es fällt, so ist AE = 3 F. (407. X.).

V. Die Rinne, durch welche das Wasser auf die Schaufeln geleitet ward, war $24\frac{1}{2}$ F. hoch über dem Horizonte durch H, wo sich bey einem langsamen Gange des Rades das Wasser erst

aus-

ausgegossen hätte, wenn nur sehr wenig Wasser in jede Schaufel gekommen wäre. Also wäre für diesen Gang und weniges Wasser $w = 24,5$ gewesen. Jetzo aber wird diese Höhe, oben um 3 Fuß vermindert (III.) unten um $1\frac{3}{4}$ (II.) bleibt also nur $w = 19\frac{3}{4}$.

VI. Der Effect wird sich also (aus 407; I. und hier I.) so angeben lassen, daß $3\frac{5}{8}$ Cubikfuß Wasser auf $19\frac{3}{4}$ Fuß in einer Secunde gehoben werden. Und weil ein gleiches Product aus einer andern Last in eine andere Höhe eben den Effect giebt, (365) so läßt sich dieses auch so ausdrucken: Es werden $(3 + \frac{5}{8})$ $(9 + \frac{3}{4})$ Cubikfuß Wasser umeinen Fuß in einer Secunde gehoben. Das beträgt $71\frac{10}{32}$ oder ohngefähr $71\frac{2}{3}$ Cubikfuß. Elvius setzt das Gewicht hiervon 215 Lb (Er nimmt also einen Cubikfuß 3 Lb schwer an, und versteht vermuthlich Lispfunde, deren eines 20 schwedische Schalpfunde enthält). Also werden durch dieses Rad 215 solche Lb in einer Secunde um einen Fuß gehoben.

VII. Diese Kunst (I.) hebt das Wasser aus dem Tiefsten der Grube, besteht aus 19 Sätzen (Hydraul. 15), deren ganze Höhe 560 Fuß zusammen ausmacht, der Kolben steigt bey jedem Zuge um $2\frac{3}{5}$ Fuß.

VIII. Die Knechtschachtkunst fördert das Wasser, das die vorige ihr zugehoben hat, ferner zu Tage aus, sie besteht aus 32 Sätzen, deren Höhe zusammen 1020 Fuß ausmacht, und der Kolben steigt bey jedem Zuge $3\frac{1}{4}$ Fuß.

IX.

IX. Das Rad dieser letztern Kunst geht in 14 Secunden einmahl um, es bekömmt $\frac{1}{2}$ Cubikfuß Wasser in eine Schaufel, und wenn es langsam genug gienge, würde das Wasser erst $1\frac{1}{4}$ Fuß über dem Horizonte durch Hausgegossen; Wegen des geschwinden Ganges aber, fängt es schon $2\frac{1}{4}$ Fuß über diesem Horizonte an verschüttet zu werden, und ist $\frac{1}{2}$ F. völlig darüber verschüttet; Man kann also eine einzige Stelle des Ausgusses, ohngefähr im Mittel zwischen diesen beyden $1\frac{1}{4}$ Fuß hoch annehmen. Die Geschwindigkeit des Rades zu bekommen, muß das Wasser $1\frac{1}{4}$ Fuß tiefer auf die Schaufeln fallen, als es auffallen würde, wenn das Rad langsam genug gienge. Diese beyden Verminderungen, von der Höhe zwischen dem Einflusse und Ausflusse abgerechnet, die statt finden würde, wenn das Rad langsam genug gienge, geben, wie Elvius sagt, $w = 22$ Fuß, und weil auch in einer Secunde soviel Wasser auf dieses Rad fällt als auf voriges, so ist der Effect in einer Secunde $3\frac{5}{8}. 22 = 79\frac{3}{4}$ und weil so viel Cubikfuß Wasser $239\frac{1}{4}$ Pf. wiegen, so kann man sagen, es werden $239\frac{1}{4}$ Pf. in einer Secunde um einen Fuß gehoben. Elvius nimmt dafür 242 Pf., welches $w = 22,25$ voraussetzt.

X. Das Wasser, das durch das Kunstrad der Maklöskunst gehoben wird, ist eine Wassersäule 560 Fuß hoch, (VII.) so weit als die Röhren sind. Der Durchmesser der Röhren oder Pumpenstiefel ist $\frac{1}{2}$ Fuß, also die Grundfläche dieser

Was-

Wassersäule $\frac{1}{4}$ Quadratfuß, 0,785398 (Geom. 44. S.) = 0,196349 Quadratfuß. Dieß mit 560 multiplicirt, giebt die Wassersäule = 109,95.. Cubikfuß oder beynahe 110 Cubf., folglich ihr Gewicht 330 Lb.

Für die Friction, welche dieses Gewicht verursacht, nimmt E. $\frac{1}{3}$ davon oder 110 Lb an (Höh. Mech. III. Abschn. 85.), also rechnet er für das ganze Gewicht, das gehoben werden soll, 440 Lb., und dieß muß in einem Umlaufe des Rades oder in 9 Secunden so hoch gehoben werden, als der Kolben in dieser Zeit steigt, also 2,6 Fuß (VII.) folglich in einer Secunde durch $\frac{2,6}{9}$ Fuß. Man kann daher den Effect in einer Secunde so ausdrücken $\frac{440.\ 2,6}{9}$ (365) = $127\frac{1}{9}$, welches also (wie in VI) so viel ist, als ob 127 Lb um einen Fuß in einer Secunde gehoben würde.

XI. Der Effect, wie er in VI. berechnet worden, ist um 88 Lb grösser und E rechnet diesen Ueberschuß auf die Friction des Wasserrades. Er fand nach einem ohngefährlichen Ueberschlage des Rades eigenes Gewicht etwa 1300 Lb, dessen Friction also 433 Lb wäre, die er als ein Gewicht ansieht, das bey jedem Umlaufe des Rades oder jede 9 Secunden, auf eine Höhe erhoben wird, die so groß wäre, als der Umfang der Zapfen des Rades, auf den es in seinen Lagern ruht. Der Durchmesser derselben war $\frac{1}{2}$ Fuß,

und

und so wird, wie vorhin berechnet, daß 433 Lb so viel als die Länge dieses Umfangs beträgt, in 9 Secunden erheben, soviel ist, als 73 Lb, einen Fuß hoch, in einer Secunde erheben. Dieses von den 88 Lb Ueberschuß weggenommen, bleiben noch 15 Lb für das Reiben der Kunststangen, derselben ungleiche Bewegung, und den Widerstand des Wassers, wenn es durchs Ventil soll gedruckt werden.

XII. Eben so läßt sich das Wasser, das von der Knechtschachtskunst gepumpet wird, als eine Wassersäule ansehn, die gleiche Grundfläche mit voriger hat, und 1 20 Fuß hoch ist (VIII.). Ihr Inhalt ist 200 Cubf. und ihr Gewicht 600 Lb, dazu die Friction 200 Lb gesetzt, so wird hier so viel Kraft erfodert als 800 Lb, in 14 Secunden $3\frac{1}{4}$ Fuß hoch erheben kann, (IX; VIII.) das ist 185 Lb jede Secunde einen Fuß hoch. Der in (IX.) berechnete Effect betrug 57 Lb mehr, davon E. 48 der Friction des Rades und 9 Lb den übrigen Hindernissen zueignet.

XIII. Ich habe hie E. Rechnung im Zusammenhange vortragen wollen, weil sie die bisherige Theorie so praktisch erläutert. Ob aber die Art, wie er die Friction in Rechnung bringt, so gar richtig ist, das müsste genauer untersucht werden, als mir hier Zeit und Raum verstatten.

XIV. Das Knechtschachtsrad geht langsamer als das Macklosrad (IX; I.) dadurch werden bey ihm die beyden Verminderungen der grossen

und gleichen Höhe zwischen dem Einflusse und Ausflusse (IX.) geringer als beym Macklösrade (V.), und sein Effect, wie er in IX. berechnet worden ist, beträgt 27 Lb mehr, als der in (VI.) berechnete Effect des Macklösrades.

XV. Nimmt man aber die wirklichen Effecte, wie sie mit Betrachtung der Friction und anderer Hindernisse sind angegeben worden, so giengen auf solche Hindernisse bey der Knechtschachtskunst nur 57 (XII.), bey der Macklösskunst 88 (XI.), bey jener also 31 weniger.

XVI. Die Knechtschachtskunst hatte also ohne Friction u. d. g. Hindernisse einen Vortheil von 27; (XIV.) und bey den Hindernissen hat sie einen von 31 (XV.), dieß zusammen giebt einen Vortheil von 58; fast die Hälfte von 127 oder vom ganzen wirklichen Effecte der Macklösskunst (X.), also verhalten sich die wirklichen Effecte der Macklösskunst und der Knechtschachtskunst beynahe = 2:3 das ist beynahe wie 9:14 die Umlaufszeiten ihrer Räder.

Umständlichere Betrachtungen über die Schaufeln des oberschlächtigen Rades.

409. Aus dem bisherigen erhellt, daß die Weite der Wasserkasten (399) die Stellung gegen den Umfang des Rades, worauf es ankömmt, wo der Kasten sein Wasser auszugiessen anfängt u. d. g., müssen genauer untersucht werden, wenn

man

man die Wirkung des oberschlächtigen Rades gehörig kennen will. Man wird sich mit dem Elvius die Sache ohngefähr so vorstellen können:

410. Die Schaufel ist ein Kasten, der unten enger als oben ist, aber keine abgekürzte Pyramide, von welcher die Grundfläche oben stünde, sondern zwo Wände dieses Kastens sind parallel, ihre Ebenen auf des Rades Axe senkrecht, und folglich mit der Ebene des Rades parallel. Die beyden übrigen Wände stehen auf die Ebene des Rades senkrecht Man kann sich in dem Rade zweene concentrische Ringe in einer Ebene vorstellen, zwischen denen die Schaufeln stehn, und jede der beyden letzterwähnten Wände, wird von einem solchen Ringe begränzt, die, welche des Rades Axe am nächsten ist, liegt an der äussern convexen Seite des innern Ringes, die entferntere, oben an des äusern concaver Seite, unterwärts nähert sie sich schief der Axe des Rades.

411. Die 37. 38. 39. 40. Fig. zeigt jede den Durchschnitt eines solchen Kastens mit einer Ebene, die auf die Axe des Rades senkrecht stünde, oder mit desselben Ebene parallel wäre; MG ist ein Theil des Umfangs vom Rade, daran diese drey Kasten sind, eg ist ein Bogen des innern Ringes, cb 40. F. einer des äuseren, cegf der Kasten, ce in seiner obern Ebene, wo er offen ist, fg in seinem Boden, eg, cf, in den beyden Seitenwänden, die auf der Ebene des Rades senkrecht stehen. Die Kasten sind nicht drey nach einander folgende.

412. Die Benennungen in 400 I. hängen mit der jetzigen Figur so zusammen.

401. I.	s	x
hier	ce	eg

Was dorten t heisst, wäre hier die Weite, um welche die beyden Wände von einander stehen, denen cegf parallel und gleich ist.

413. Man kann ohne hier beträchtlichen Irrthum, eg, cb, für gerade Linien annehmen, die auf ce, fg, senkrecht stehn, also ist der vorgezeichnete Durchschnitt der Schaufel ein Trapezium, dessen Innhalt $= \frac{ce + fg}{2}$. eg dieses mit t (412) multiplicirt, giebt den Innhalt der Schaufel $= \frac{s + q.}{2}$ tx wenn $q = fg$.

Die Grösse, die Hr. Elvius annahm (400; I.) setzt $q = \frac{1}{3} s$.

414. Das Rad geht nach der Richtung MG um, daß den folgenden Augenblick der Punct M tiefer kömmt. Der Kasten der 38 Figur hat im jetzigen Augenblicke seinen Boden fg in der Horizontallinie durch des Rades Mittelpunct, also ist sein Boden horizontal, so wie seine obere Fläche ce; und er kann ganz voll Wasser seyn, ohne was zu verschütten. Die Wassermenge, die er auf diese Art halten kann, (413) heisse T.

415. Der Kasten 37 F. stehe an einer Stelle des Umfangs, die höher ist, als der Mittel-

punct C, so steht sein Boden fg schief gegen die Horizontallinie gh; der Winkel fgh sey = θ; Es ist klar, daß dieser Winkel soviel Grade betragen wird, als der Bogen vom g 38 F. bis zum g 37 F., oder daß θ der Winkel ist, um welchen der Kasten 37 F. über dem Horizonte des Mittelpuncts steht.

Man ziehe 37 Fig. ck horizontal, so kann in diesem Kasten das Wasser bis an diese Linie, oder die dadurch gelegte Horizontalfläche stehen, und der Kasten fasst also in dieser Stellung mehr Wasser als in der 38 F. soviel ein Prisma beträgt, dessen Grundfläche das Dreyeck cek, die Höhe = t wäre.

Weil nähmlich die Wand ge ein Theil vom Umfange des Rades ist, so kann man ek als die Fortsetzung dieser Wand ansehen, und das Wasser ruht auf ek eben so wie auf ge.

Weil nun ck horizontal ist, so ist eck = θ und ek = ce. tang θ folglich $\Delta cek = \frac{s^2 \text{ tang } \theta}{2}$; dieses mit t multiplicirt, giebt, wieviel die Schaufel bey der 37 F. mehr Wasser hält als bey der 38. Fig.

416. In der 39 Fig. stehe die Schaufel um den gleichen Winkel unter dem Horizonte durch C. Man ziehe wieder ck horizontal, so kann die Schaufel jetzo nicht mehr Wasser halten, als bis an diese Linie. Sie hält also soviel Wasser weniger, als die 38 F. soviel in das Prisma geht,

dessen Grundfläche das Dreyeck eck, die Höhe = t ist. Weil aber wieder eck = θ, so hält der Kasten 39 F eben soviel weniger als der 37 F. mehr hielte.

417. Aufg. Wenn das Rad langsam genug geht, daß durch den Schwung kein Wasser aus den Schaufeln geworfen wird, sondern das Wasser nur wegen der Neigung der Schaufeln ausläuft, die Stelle zu finden, wo es auszufliessen anfängt.

Aufl. I. Die volle Schaufel, wie sie (413) berechnet worden, fasse im Gewicht Wasser = T; Das Gewicht des Wassers, das in eine Schaufel wirklich fällt, sey = W;

II. Die Schaufel sey in der 39 Fig. an der gesuchten Stelle, so ist c k g f. t der Raum, der W enthalten kann. Diese Wassermenge nehmlich, die in der Schaufel befindlich ist, fängt an auszufliessen, gleich nachdem die Oberfläche dieses Wassers den Punct c in der vordern Wand der Schaufel erreicht hat, weil das Rad beständig fortgeht, und die Schaufel also bald in eine solche Lage kömmt, daß c tiefer als k kömmt, und das Wasser von k nach c fliessen muß.

In der That kann eine gewisse kurze Zeit erfodert werden, ehe solches erfolgt, sie wird aber zu unmerklich seyn, hier in Betrachtung zu kommen.

Uebrigens gründet sich, wie man sieht, der Satz, daß diese Schaufel sogleich anfängt auszugiessen, nicht

nicht darauf, daß ck horizontal, sondern nur daß es die Oberfläche des Wassers ist. Könnte also das Wasser in der Schaufel eine Oberfläche haben, die nicht horizontal wäre, so würde die Schaufel doch auszugiessen anfangen, sobald diese Oberfläche c erreicht hätte.

III. Ein Prisma, dessen Grundfläche das Dreyeck cek, die Höhe = t, ist, enthält eine Wassermenge = T — W;

IV. Also ist $T : T-W = \frac{s+q}{2} . x : \frac{s^2 . \text{tang } \theta}{2}$

(416) daraus findet sich $\text{tang } \theta = \frac{(s+q) . x}{s^2} . \frac{(T-W)}{T}$.

V. Dieses findet statt, wenn in die Schaufel ziemlich viel Wasser, in Vergleichung mit ihrer Grösse fällt, so daß es auslaufen muß, wenn es noch völlig den Boden der Schaufel fg bedeckt.

VI. Fiele aber sehr wenig Wasser in die Schaufel, so würde es nicht eher auslaufen, bis die Schaufel so sehr geneigt wäre, daß das Wasser nicht mehr ihren Boden völlig bedeckte. Die 40 Fig. stellt dieses vor, ck ist des Wassers Oberfläche, wenn es auszulaufen anfängt, und also $ckf = \theta$.

VII. Hier ist $\Delta cfk = \frac{cb . fk}{2} = \frac{x . fk}{2}$. Es verhält sich also das Trapezium cegf gegen dies-

ses Dreyeck $= s + q : fk$; und weil sich diese beyde Figuren auch wie $T : W$ verhalten, so ist $fk = \frac{(s+q)\ W}{T}$ Weil nun $bf = ce - fg = s - q$; so ist $bk = s - q + \frac{(s+q).\ W}{T}$ und $\frac{bc}{bk}$ oder $\text{tang}\,\theta = \frac{x}{s - q + \frac{(s+q)\ W}{T}}$.

VIII. Soll hier $fk = fg$ seyn, so ist $\frac{W}{T} = \frac{q}{s+q}$ und $\text{tang}\,\theta = \frac{x}{s}$. Dieses macht den Uebergang aus V. in VI. aus.

IX. Wenn der Winkel θ gegeben ist, so findet sich aus den angegebenen Formeln die Verhältniß $1 : W$ (S. unten 431; IX.).

X. Ist die Schaufel 45 Gr. unter dem Horizonte durch C; so ist in (IV.) $1 = \frac{s+q}{s^2}\,x.\,\frac{T-W}{T}$; Man setze für diesen Fall, $T - W = S$ so ist $\frac{T}{S} = \frac{s+q}{s^2}.x$ und also wieder allgemein in (IV.) $\text{tang}\,\theta = \frac{T-W}{S}$.

So bestimmt Elvius diesen Winkel, und so andere Winkel durch andere Wassermengen. So kann man eine zusammengesetzte Grösse durch einen einzigen Buchstaben S ausdrucken. Sonst sehe ich davon keinen Vortheil, als daß man dieses S und andere solche Wassermengen aus den Grössen s, q, x, u. s. w. noch besonders berechnen muß, anstatt diese Grössen selbst in der Rechnung zu brauchen.

XI. Wenn man indessen sich dieses Ausdrucks bedient, so hat aus 415; die Proportion $\frac{s+q}{2}$.

$x : \frac{s^2 . \text{tang}\,\theta}{2} = T : \frac{T . s^2 . \text{tang}\,\theta}{(s+q) . x}$ zum letzten Gliede die Wassermenge, die in das dort angezeigte dreyeckichte Prisma geht. Dieses Glied hier durch S ausgedruckt, wird S. tang θ.

Also geht in die Kasten 37. Fig.; 39. Fig. $T \mp S . \text{tang}\,\theta$, das obere Zeichen für die 37. Fig. das untere für die 38. F. (415; 416.).

Betrachtung der Schwungkraft, die das Wasser bekömmt, wenn das oberschlächtige Rad schnell geht.

418. Wenn des Rades Geschwindigkeit der Höhe u gehört, der Halbmesser $= r$ ist, so ist die beschleunigende Schwungkraft $\frac{2u}{r}$ (Höhere Mech. II. Abschn. 2) und dieser Bruch mit der

ses Dreyeck $= s + q : fk$; und weil sich diese beyde Figuren auch wie $T : W$ verhalten, so ist $fk = \frac{(s+q)\ W}{T}$ Weil nun $bf = ce - fg = s - q$; so ist $bk = s - q + \frac{(s+q).\ W}{T}$ und $\frac{bc}{bk}$ oder $\text{tang}\,\theta = \frac{x}{s - q + \frac{(s+q)\ W}{T}}$.

VIII. Soll hier $fk = fg$ seyn, so ist $\frac{W}{T} = \frac{q}{s+q}$ und $\text{tang}\,\theta = \frac{x}{s}$. Dieses macht den Uebergang aus V. in VI. aus.

IX. Wenn der Winkel θ gegeben ist, so findet sich aus den angegebenen Formeln die Verhältniß $1 : W$ (S. unten 431; IX.).

X. Ist die Schaufel 45 Gr. unter dem Horizonte durch C; so ist in (IV.) $1 = \frac{s+q}{s^2} x$. $\frac{T-W}{T}$; Man setze für diesen Fall, $T - W = S$ so ist $\frac{T}{S} = \frac{s+q}{s^2} . x$ und also wieder allgemein in (IV.) $\text{tang}\,\theta = \frac{T-W}{S}$.

So bestimmt Elvius diesen Winkel, und so andere Winkel durch andere Wassermengen. So kann man eine zusammengesetzte Grösse durch einen einzigen Buchstaben S ausdrucken. Sonst sehe ich davon keinen Vortheil, als daß man dieses S und andere solche Wassermengen aus den Grössen s, q, x, u. s. w. noch besonders berechnen muß, anstatt diese Grössen selbst in der Rechnung zu brauchen.

XI. Wenn man indessen sich dieses Ausdrucks bedient, so hat aus 415; die Proportion $\frac{s+q}{2}$.

$x : \frac{s^2 . \text{tang}\,\theta}{2} = T : \frac{T . s^2 . \text{tang}\,\theta}{(s+q) . x}$ zum letzten Gliede die Wassermenge, die in das dort angezeigte dreyeckichte Prisma geht. Dieses Glied hier durch S ausgedruckt, wird S. tang θ.

Also geht in die Kasten 37. Fig.; 39. Fig. $T \mp S . \text{tang}\,\theta$, das obere Zeichen für die 37. Fig. das untere für die 38. F. (415; 416.).

Betrachtung der Schwungkraft, die das Wasser bekömmt, wenn das oberschlächtige Rad schnell geht.

418. Wenn des Rades Geschwiudigkeit der Höhe u gehört, der Halbmesser $= r$ ist, so ist die beschleunigende Schwungkraft $\frac{2u}{r}$ (Höhere Mech. II. Abschn. 2) und dieser Bruch mit der

Masse Wasser, die in einer Schaufel ist, multiplicirt, giebt dieses Wassers bewegende Schwungkraft, die sich also zu seinem Gewichte verhält, wie 2u : r.

So giebt es allemahl im Wasser eine Schwungkraft, die aber sehr geringe seyn kann, wenn das Rad sehr langsam geht, man zieht sie daher nur bey einem geschwinden Gange des Rades in Betrachtung.

Diese Vergleichung der Schwungkraft mit der Schwere, die sich so leicht und deutlich angeben lässt, druckt Elvius künstlicher durch einen Satz aus, dessen analytischen Beweis ich beyfüge, weil der Satz sogleich einen andern Gebrauch hat.

419. **Lehnsatz.** Die Schwungkraft des Wassers verhält sich zu desselben Gewichte, wie der Halbmesser des Rades, oder die Entfernung des Wassers von der Axe des Rades, zu der Länge eines Pendels, das innerhalb der Zeit, da das Rad einmahl gleichförmig herumgeht, einen Hingang und einen Hergang, einen Schwung (Höh. Mech. II. Abschn. 28) machte.

Beweis I. Die Schwungkraft ist $\frac{2u}{r}$ (418).

Ein Punct des Rades rückt in einer Secunde um den Bogen $2\sqrt{gu}$ fort, und weil des Rades Umfang $2r\pi$ ist, so durchläuft ein Punct den Umfang in $\frac{2r\pi}{2\sqrt{gu}}$ Secunden.

II. Ein Pendel, das in soviel Secunden einen Schlag thut, einmahl hin, oder einmahl hergeht, habe die Länge f; so ist aus (Höh. Mech. 2. Absch. 48) $\frac{r^2 \pi^2 a}{g u} = f$; aber $\pi^2 a = \frac{2 g}{2}$ (a. a. O. 45) folglich $f = \frac{2 r^2}{u}$.

III. Soll ein Pendel von der Länge h, in eben der Zeit einen Schwung machen, so ist $h = \frac{1}{4} f$ (a. a. O. 43); also $h = \frac{r^2}{2u}$ folglich $\frac{2u}{r} : 1 = r : h$ welches der Satz ist.

420. Aufg. Die Figur zu bestimmen, die das Wasser in den Schaufeln wegen der Schwungkraft annimmt.

Aufl. I. Man durchschneide das Rad mit einer Verticalfläche, die auf seine Axe senkrecht steht. Der Durchschnitt gebe den Kreis in der 41. Fig. C sein Mittelpunct ist in der Axe; Q sey ein willkührlicher Punct dieses Kreises, wo sich Wasser in einer Schaufel befindet.

II. Man verlängere CQ willkührlich in QD, ziehe durch D, Q, Verticallinien DT, ZS; Nimmt man $DQ : QS = 2u : r$ und ergänzt das Parallelogramm, DQST, so stellen QS, QD, die Schwere und die Schwungkraft vor (418) und QT ist die mittlere Kraft, die aus beyden entsteht.

III. Man ziehe durch C eine Verticallinie, der TQ verlängert in P begegne; Weil $D = QCP$,

so

so ist $QD : DT = CQ : CP$ also $CP = \frac{r^2}{2u} = h$ (419. III.).

IV. Der Punct Q war im Umfange des Kreises, der r zum Halbmesser, C zum Mittelpuncte hat, ganz willkührlich angenommen. Folglich bleibt der Punct P für diesen ganzen Kreis einerley, wo man auch Q annimmt.

V. Wenn man also $CP = h$ auf der Verticallinie durch C genommen hat, und durch welche Stelle des Kreises man will, PQ zieht, so ist ihre Verlängerung QT, die Richtung der mittleren Kraft, die aus Schwere und Schwungkraft entsteht

VI. Wenn sich in der Linie CQ, weiter von C oder näher dabey, Wasser befindet, so hat solches eine andere Schwungkraft, weil u und r für dasselbe anders werden, und sich nicht in einer gegebenen Verhältniß ändern. Man könnte also in der Linie CD, deren Lage ich jezo als gegeben annehme, für jede andere Stelle wie Q, einen andern Punct wie P finden.

Bey gegenwärtiger Anwendung aber hätte man nur den Theil der Linie CD zu betrachten, der zwischen die Wände einer Schaufel wie eg, cf, 37 . . 40 Fig. sind, fiele. Dieser Theil wird allemahl in Vergleichung mit dem Halbmesser des Rades ziemlich geringe seyn, und man kann daher ohne grossen Irrthum annehmen, daß alle die unterschiedenen Puncte wie Q, die in einem

nem solchen Theile liegen, einerley P geben; das ist, daß alle diese Puncte in dem Bogen eines Kreises liegen, der P zum Mittelpuncte hat.

Dieses wird von der Wahrheit noch weniger abweichen, wenn man annimmt, der Punct Q, den die Figur zeigt, liege etwa mitten zwischen den genannten beyden Wänden der Schaufel, daß das übrige Wasser, nicht viel weiter als er von C entfernt, auch nicht viel näher dabey seyn wird.

VII. Das Wasser in der Schaufel nimmt also durch den Schwung eine solche Gestalt an, daß seine Oberfläche, mit der Verticalfläche durch PCD geschnitten, einen Kreisbogen giebt, der P zum Mittelpuncte hat. Dieses erhellt aus VI. und auch daraus, weil PQ als die Richtung der mittlern Kraft auf die Oberfläche des Wassers senkrecht stehen muß.

VIII. Stellt man sich nun mit der Ebene, welche die Figur zeigt, andere, mit ihr parallel vor, so schneidet jede das Wasser in der Schaufel in einem andern solchen Kreisbogen, der seinen Mittelpunct eben so weit als CP beträgt von der Axe, nur in der Ebene hat, die den Durchschnitt macht.

IX. Und also ist die Oberfläche des Wassers in der Schaufel ein Stück von der hohlen Fläche eines Cylinders, die Axe dieses Cylinders geht mit der Axe des Rades parallel in der Weite CP = h.

X. Weil aber der Kreisbogen (VII.) sehr klein ist, so kann man ihn ohne merklichen Irrthum für eine gerade Linie annehmen, die auf PQ senkrecht stünde, und so die cylindrische Fläche (IX.) für eine ebene Fläche; die Lage dieser ebenen Fläche wird so bestimmt: Auf ihr muß eine andere ebene Fläche senkrecht stehen, die durch PQ auf der Ebene des Rades senkrecht steht.

421. Aufg. Wenn QE 42. Fig. die gerade Linie (420. X.) ist, derselben Lage gegen den Umfang des Rades zu bestimmen.

Aufl. I. QH sey eine Tangente des Rades, so suche man den Winkel EQH = ζ.

II. Es ist klar, daß hier die Stelle gegeben seyn muß, wo sich Q im Umfange des Rades befinden soll. Man setze, sie sey durch den Winkel QCB = φ gegeben, um den sie von des Rades unterster Stelle B entfernt ist. Dieser Winkel also ist gegeben.

III. Weil CQ, CP, gegeben sind (420; III.) so setze man CQ = 1; CP = l (nähmlich es ist $1 : l = r : \frac{r^2}{2u}$ also $l = \frac{r}{2u}$).

IV. EQH + HQP = R (420; X.) = HQP + PQC (weil HQ eine Tangente ist) also ist EQH = PQC. Man suche also im Dreyecke QCP; aus den Seiten CQ = 1; CP = l; und dem eingeschlossenen Winkel QCP = 2R — φ den Winkel CQP = ζ.

V.

V. Aus Trig. 20 S. Zuf. ist $QP^2 = 1 + 2l. \cos\varphi + l^2$, ferner $\sin CQP = \frac{l. \sin\varphi}{QP}$ daher $(\cos CQP)^2 = \frac{QP^2 - l^2. \sin\varphi}{QP^2}$; der Zähler davon ist $1 + 2l. \cos\varphi + l^2. (1 - \sin\varphi^2) = (1 + l. \cos\varphi)^2$ also $\cos CQP = \frac{1 + l. \cos\varphi}{QP}$ daher tang CQP; oder $\text{tang}\,\zeta = \frac{l. \sin\varphi}{1 + l. \cos\varphi}$.

422. Aufg. Umgekehrt φ aus ζ zu finden.

Aufl. I. Hier suche man im Dreyecke CQP aus den Seiten CQ, CP, und $CQP = \zeta$; den Winkel $QCP = 2R - \varphi$; Es ist aber $CP : CQ = \sin\zeta : \sin P$ also $\sin P = \frac{\sin\zeta}{l}$ und $\cos P = \frac{\sqrt{(l^2 - \sin\zeta^2)}}{l}$; Weil nun $\sin(\zeta + P) = \sin QCP$, so ist aus Trig. 19. S. $\sin QCP = \frac{\sin\zeta^2 . \sqrt{(l^2 - \sin)\zeta^2}}{l} + \frac{\cos\zeta . \sin\zeta}{l} = \frac{\sin\zeta . (\cos\zeta + \sqrt{(l^2 - \sin\zeta^2)})}{l}$.

II. Weil auch QCB oder $\varphi = \zeta + P$, so findet man aus Trigonom. 19. S. 2. Zuf. $\cos\varphi = \frac{\cos\zeta . \sqrt{(l^2 - \sin\zeta^2)}}{l} - \frac{\sin\zeta^2}{l}$.

III.

III. Man kann dieß noch bequemer so ausdrucken: $\frac{\sqrt{(l^2 - \sin\zeta^2)}}{l} = \sqrt{(1 - \frac{\sin\zeta^2}{l^2})}$.

Man heisse also μ den Bogen, dessen Sinus $= \frac{\sin\zeta}{l}$ ist, so ist der Ausdruck folgender:

$$\cos\varphi = \cos\zeta . \cos\mu - \sin\zeta . \sin\mu$$

also aus Trig. 19. S. 3. Zus. $\varphi = \zeta + \mu$.

423. Zus. Je kleiner n ist, oder je langsamer das Rad geht, desto grösser ist l (421; III.) desto kleiner aber, je schneller es geht.

424. Zus. Wenn aber l, oder die Geschwindigkeit des Rades, ungeändert bleibt, aber $\sin\varphi$ wächst, doch daß φ nicht $< R$ wird, so nimmt $\cos\varphi$ ab, und in 421; V; nimmt QP ab, folglich wächst der dasige $\sin\zeta$. Derselbe wird also für ein gegebenes l am grösten, wo $\varphi = R$, und ist alsdenn $= \frac{1}{\sqrt{(1 + l^2)}}$.

425. Zus. Für ein sehr geschwindes Rad, ist beynahe $1 + l^2 = 1$ (423) nnd der grösste $\sin\zeta$, in (424) wird beynahe $= l$; kleinere $\sin\zeta$ für eben das kleine l; werden folglich noch kleiner.

426. Zus. Für ein sehr langsames Rad aber wird (423) der grösste $\sin\zeta$ (424) beynahe $= 1$ und in (422; II.) $\cos\varphi = \cos\zeta - \frac{\sin\zeta^2}{l}$.

427. Aufg. Die Stelle zu finden, wo bey einem schnellen Gange des Rades, das Wasser wegen der Schwungkraft verschüttet zu werden anfängt.

Aufl. I. Auch hier kömmt es, wie in (417. II.) nur darauf an, daß des Wassers Oberfläche ck 39. Fig. gleich an der Schaufel Gränze, c, reicht. Der Unterschied besteht nur in folgendem: In (417) war diese Oberfläche wagrecht. Das Wasser bekam sie nur durch die Wirkung der Schwere; jetzt ist sie nicht wagrecht, sondern schief, weil sie zugleich durch Schwere und Schwungkraft bestimmt wird. Daher war in (417) eck = Θ der Winkel, um welchen die Schaufel unter dem Horizonte durch C stand, und dieses Winkels Ergänzung zu 90 Gr. zeigte an, wie viel die Schaufel über des Rades niedrigster Stelle, B stand. Hier aber hat Θ diese Bedeutung nicht mehr, aber die Ergänzung des Winkels ekc, den des Wassers Oberfläche mit dem Rade macht, kann es wie vorhin bedeuten. So ist hier Θ = R — ζ (421) der Winkel aber, um welchen der Kasten über des Rades niedrigster Stelle erhoben ist, heisst jetzo nicht mehr R — Θ sondern φ.

II. In (417. IV.) war Θ nur daraus bestimmt, daß ckgf. t die Wassermenge W, enthielte, ohne daß dabey ck wäre horizontal angenommen worden. Dieses lässt sich also hier so anwenden, daß ζ = R — Θ, und es ist

$$\cot\zeta = \frac{(s+q).x}{s^2} \cdot \frac{T-W}{T}$$

III. Und aus ζ wird φ gegeben (422).

IV Für den Fall in (417. VI) hat $\cot\zeta$ den Werth der in (417. VII.) für $\text{tang}\Theta$ gefunden worden; oder es ist auch

$$\text{tang}\zeta = \frac{s-q+(s+q).W}{\frac{T}{x}}$$

V. Die Menge Wasser, welche in dieser Schaufel in dem Augenblicke noch enthalten ist, ist $W = T - \frac{s^2}{(s+q).x} \cdot \cot\zeta . T$ (II.) $=$

$$T - \frac{s^2}{(s+q).x} \cdot \frac{1+l.\cos\varphi}{l.\sin\varphi} . T \text{ (426; V.)}$$

$$= T - \frac{1+l.\cos\varphi}{l.\sin\varphi} . S \text{ (417. X.)}.$$

VI. Auch ist aus II; und (417. X.) $\cot\zeta = \frac{T-W}{S}$

428. Man setze bey G, unter der 39. Figur soll cg 40. F. die Oberfläche des Wassers seyn, es mag nun die Schaufel zuvor, ehe sie an diese Stelle bey G kömmt, schon Wasser ausgegossen haben oder nicht; So ist $\text{tang ecg} = \frac{x}{s}$ wie in (417 IX.) wo nur das noch angenommen ward, daß die Schaufel in dieser Stellung erst sollte anfangen,

fangen, Wasser auszugiessen, weil sie sehr wenig Wasser enthielt. Enthält sie aber anfangs mehr Wasser, so kann sie schon zuvor welches ausgegossen haben, und kömmt doch noch in eine solche Lage, daß cg die Oberfläche des in ihr noch übrigen Wassers ist. Heisst nun cge = ζ wie in (426) so ist $\cot \zeta = \frac{x}{s}$ und daraus findet sich φ (422). Wenn also B des Rades unterster Punct, hier wie in der 42. Fig. ist, so findet man auf diese Art den Bogen BG, das Maaß des jetzt angezeigten Winkels, dergestalt, daß an dieser Stelle G, das Wasser nur noch genau den Boden der Schaufel fg bedeckt, und wenn die Schaufel noch tiefer kömmt, einen Theil des Bodens frey lässt, wie wenn ck, 40. Fig. seine Oberfläche ist.

429. In dieser 40. Figur könnte fk = 0 seyn, oder das Wasser gar nichts merkliches von dem Boden der Schaufel bedecken, sondern nur noch auf der Wand cf liegen, von welcher es sogleich also abfliessen, und die Schaufel darnach leer gehen wird. Die Stelle, wo die Schaufel alsdenn seyn muß, sey F unter der 39. Fig. Hier ist ζ der Winkel, den die verlängerten cf, eg, mit einander machen = R — ecf = R — γ wo $\text{tang}\,\gamma = \frac{x}{s - q}$ und aus diesem gegebenen Winkel findet sich nach (422) wieder φ, ein Winkel, dessen Maaß der Bogen BF ist.

Es erhellt auch, daß der Schaufel vordere Wand cf an dieser Stelle horizontal seyn wird. Denn gf kömmt alsdenn in die Verlängerung des Halbmessers CF zu liegen, und mit diesem Halbmesser macht alsdenn cf den stumpfen Winkel gfc $= 2R - \gamma$ folglich nach CB zu verlängert, den spitzigen γ; und diese Verlängerung muß also mit der Verticallinie CB einen rechten Winkel machen, weil $FCB = R - \gamma$.

430. Also werden die Schaufeln auf dem Wege von G bis F, gewiß Wasser ausgiessen, wenn sie es auch zuvor noch nicht gethan hätten, und von F nach B zu und weiter auf der andern Seite des Rades leer gehn. Ist also M die Stelle, wo das Wasser einfliesst, so befinden sich die Schaufeln, die Wasser enthalten, in dem Bogen MF.

Ist die Stelle der Schaufel 39. Figur nach (426. III.) bestimmt, so befinden sich die Schaufeln, die alles Wasser, das in jede fällt, enthalten, von M bis an diese Stelle, von dieser Stelle bis F leeren sie sich aus. Ist wenig Wasser in der Schaufel, so fällt diese Stelle in G.

Exempel zu vorhergehenden Lehren.

431. I. Das Kunstrad, davon (408; I.) ist geredet worden, hatte 20, 5 Fuß im Halbmesser; Die Gestalt seiner Schaufeln war folgende: $ec = s$ (413) $= 1$ Fuß, $eg = x = \frac{7}{6}$, $gf = q = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2}$; t = 3. Daraus giebt sich der Innhalt $\frac{1,5}{2}$.

$\frac{7}{6}$. 3 = 2,625.

II. Für den Winkel γ (428.) ist hie tang γ

$= \frac{7}{6.\frac{1}{2}} = 2,3333333$ giebt γ = 66 Gr 48 m und die Ergänzung dazu 23 Gr 12 M = BF (428).

III Man suche, wo diese Schaufeln ihr Wasser auszugiessen anfangen, wenn das Rad langsam geht (417). Die Wassermenge in jeder Schaufel nimmt man wie in (408.) = 0,32625 Cubikf. Also ist

$$T = 2,625 \text{ (I)}$$
$$W = 0,32625$$
$$T - W = 2,29875$$

und aus (417; IV.) $\text{tang}\,\theta = \frac{1,5.7}{6} \cdot \frac{2,299}{2,625}$

$10 + \log 10,5 =$	11,0211893
$\log 2,299 =$	0,3615390
	11,3827183
$\log 15,75 =$	1,1972806
log tab tang $\theta =$	10,1854377

giebt θ = 56 Gr 52 Min

R − θ = 33. 8

IV. Um den letzten Winkel wäre der Kasten 39. F. über B erhoben. Man ziehe durch seine Stelle die Horizontallinie kK wie FH durch F; so wäre KH die lothrechte Höhe, um wieviel die

Stelle, wo das Wasser sich auszugiessen anfänat, über der (438) bestimmten Stelle wäre. Es wäre $\frac{CK}{r}$ der Cosinus des Bogens von B bis k 39.

F. oder $=$ sin θ (III). Eben so $\frac{CH}{r} =$ cos BF; also

$$\begin{array}{r} \cos BF = 0,9191353 \\ \sin\theta = 0,8374008 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{KH}{r} = 0,0817345$$

giebt mit $20\frac{1}{2}$ mult. KH $= 1,67$ Fuß.

V. Diese Höhe sollte diejenige seyn, welche in (408. II.) $= \frac{3}{4}$ Fuß angegeben wird, der derstige Horizont durch H 36. Fig. ist der hiesige durch F, wo die Schaufeln, wie sich Elvius ausdrückt, horizontal liegen (428) woher dieser Unterschied komme, kann ich nicht sagen. Die Abmessungen der Schaufel und der Halbmesser des Rades sind aus des Elvius Angabe genommen, der Winkel γ, den er nicht erwähnt, lässt sich aus den angenommenen Grössen nicht anders berechnen. Elvius selbst aber hat die Berechnung nicht ordentlich aus einander gesetzt, durch die er die Höhen gefunden, welche (408) nach ihm angeführt werden. Weil ich dieses Exempel gern zur Erläuterung beyfügen wollte, habe ich die Zahlen, die dazu gegeben seyn müssen, aus ihm angenommen, ob aber dabey vielleicht Fehler sind, kann ich nicht entdecken, weil er von der Rechnung selbst gar nichts beygebracht hat.

Seine

Seine allgemeine Formeln stimmen mit den meinigen vollkommen überein, und man kann dieses Exempel nur so betrachten, wie es nach den Zahlen, die ich hier annehme, berechnet wird, da denn nichts daran gelegen ist, ob E. aus andern Zahlen was anders herausgebracht hat.

VI. Nun suche ich aus 426; die Stelle, wo die Schaufel wegen der Schwungkraft auszugiessen anfängt.

Aus (370) ist $\frac{\pi r}{\sqrt{g.u}} = 9$ Secunden und g $= 16$ (284) also $u = \frac{\pi^2 20,5^2}{16.81}$

$2 \log \pi = 0,9942998$
$2 \log r = 2,6235078$
$3,6178076$
$\log 1296 = 3,1126050$
$\log u = 0,5052026$

giebt $u = 3,200$. In (408. IV.) ward gesagt, diese Geschwindigkeit zu erhalten, hätte das Wasser 3 Fuß fallen müssen. Diese Angabe des Elvius stimmt also hiemit überein, weil er auf Kleinigkeiten nicht gesehen hat.

Die Schwungkraft ist (418) $\frac{6,4}{20,5} = 0,31$ der Schwere.

VII. Nun aus (421; III.)

$\log \frac{1}{2} r = 1,0107239$

$\log u = 0,5052026$

$\log l = 0,5055213$

Dieß giebt $l = 0,3203$

$\log l = 0,5055213$

$\log r = 1,3117539$

$\log h = 1,8172752$ (419)

giebt $h = 65,65$ Fuß. Elvius (54 Seite) setzt es $67\frac{1}{2}$ Fuß, ein wenig grösser, weil er die Geschwindigkeit des Rades ein wenig geringer annimmt (VI.).

VIII. Nun ist ζ (426. I.) $= R - \Theta$ (III.). Hieraus μ nach 422. III. zu finden, verfährt man so: Man müsste den Logarithmen des Sinus von ζ wie ihn die Tafeln geben, um 10 vermindern, davon $\log l$ abziehen und zum Reste 10 addiren, so hätte man den Logarithmen des Sinus von μ wie ihn die Tafeln geben. Man kann also dieses Abziehen und Addiren der 10 so ersparen, daß man den Logarithmen des Sinus von ζ so hinschreibt, wie ihn die Tafeln geben.

$\log \text{tab sin } \zeta = 9,7376611$

$\log l = 0,5055213$

$\log \text{tab sin } \mu = 9,2321398$

giebt $\mu = 9$ Gr. 49 M.

$\zeta = 33 \quad 8$

$\varphi = 42 \quad 57$ (422.)

IX. Um diesen Winkel wäre also die Stelle über B wo sich das Wasser wegen der Schwungkraft auszugiessen anfienge, die lothrechte Höhe über B, wäre r. $(1 - \cos\varphi) = 5,495$ Fuß eben so $BH = r. (1 - \cos BF) =$ (II.) 1,658 Fuß, giebt die lothrechte Höhe der Stelle, wo die Schaufeln wegen der Schwungkraft das Wasser auszugiessen anfangen, über die, wo sie horizontal zu liegen kommen 3,837 Fuß. Elvius giebt sie $2\frac{1}{2}$ Fuß an (408. III.)

X. Die Grösse S. (417. X.) ist hier $\frac{1. T}{1,5. \frac{7}{6}}$ $= \frac{6. T}{10,5}$

431. Aufg. Zu bestimmen, wie langsam das Rad gehen müsste, daß mehr Wasser zuliefe, als die Schaufeln fassen können (407; XI.).

Aufl. I. Das Rad habe den Halbmesser r; und verrichte seinen Umlauf in n Secunden, so ist $\frac{\pi r}{\sqrt{gu}} = n$ (370) folglich $u = \frac{\pi^2 r^2}{n^2 g}$.

II. Während eines Umlaufs fliesse n. A Wasser zu, und das Rad habe m Schaufeln, so kömmt auf eine $\frac{n. A}{m} = \frac{\pi r. A}{m. \sqrt{gu}}$ Wasser.

III. Ist also 37. Fig. die oberste Schaufel, die das Wasser bekömmt, so würde sie das zufliessende Wasser auffangen können, wenn $\frac{n}{m} A = T$

$= T + S.\ \text{tang}\,\theta$ (417. XI.) sie würde aber so gleich davon zu verschütten anfangen, und das, was sie über T bekam, verschüttet haben, wenn sie in die Stelle der 38. F. gekommen wäre.

IV. Soll also die Schaufel nicht eher was verschütten, als bis sie in die 38 F. kömmt, so muß $\frac{n}{m} A = T$ seyn.

V. Und $\frac{n}{m} A = T - S.\ \text{tang}\,\theta$ wenn sie nicht eher etwas verschütten soll, bis sie in die 39. Fig. kömmt.

VI. Die Gleichungen III. IV. V. lassen sich zusammen so ausdrucken $\frac{n}{m} A = T. \left(\frac{1 \pm S.\ \text{tang}\,\theta}{T} \right)$, das obere Zeichen gilt für III, das untere für V und für IV ist $\theta = 0$.

VII. Aus diesen Gleichungen läßt sich also n finden, wenn alle übrigen Grössen gegeben sind, und aus n die hiezu nöthige Geschwindigkeit des Rades (431), diese Geschwindigkeit aber wird so erhalten werden, daß man dem Rade mehr oder weniger Last zu heben gibt, nachdem es geschwinder oder langsamer geht, als es vermöge dieser Berechnung gehen sollte.

VIII. Ist n und alles übrige bis auf θ gegeben, so findet man, wo die Schaufel auszugiessen anfängt, die Schwungkraft beyseite gesetzt.

Dieß

Dieß aber ist 417. X, weil $\frac{n}{m} A = W$; so wie überhaupt gegenwärtiger Satz nur die weitere Ausführung von 417. IX. ist.

432. Exempel I. In (430. I.) ist $T =$ 2,625 also (417. I.) $S = \frac{1}{1,5 \cdot \frac{7}{6}} . T = \frac{6}{10,5} .$ $T \pm 0,5714 . T.$

II. Ferner $m = 100$, und $A = 3,625$ (408. I.).

III. Also in (431. V.) $n. 0,03625 = 2,625.$ $(1 = 0,5714 . \tang \theta)$ und $n = \frac{2,625}{0,03625}$ $(1 \pm 0,5714 . \tang \theta)$.

IV. Für $\theta = 0$ wäre

$\log 2,625 = 0,4191293$

$\log 0,03625 = 3,5593080 - 5$

$L = 1,8598213$

Dieser Logarithme gehört zu 72,41. Macht das Rad in soviel Secunden einen Umlauf, so bleibt das Wasser, das in eine Schaufel fällt, nicht länger darinn, als bis sie dem Horizonte des Mittelpuncts gleich kommen.

Man kann die Probe hievon leicht machen, wenn man rückwärts so rechnet: In der Anzahl von Secunden, welcher L zugehört, fallen 262,5 Cubikfuß aufs Rad, davon kommen auf eine Schaufel 2,625 gleich soviel, als sie im Horizonte des Mittelpuncts fasst, darüber könnte sie

noch

noch mehr halten, darunter muß sie anfangen auszugiessen.

V. Ginge also das Rad noch langsamer, so liefe in jede Schaufel mehr, als sie dem Mittelpuncte gleich, halten kann, und sie finge noch über dem Mittelpuncte schon an auszugiessen.

VI. Für $\Theta = 45$ Gr. über dem Mittelpuncte, suche man in (III.)

$$n = \frac{2,625}{0,03625}. 1,5714.$$ Man hat aus (IV.)

$$L = 1,8598213$$
$$\log 1,571 = 0,1961762$$

2,0559975 giebt diese Zahl von Secunden 113,7.

VII. Sollte die Schaufel zuerst 10 Grad unter dem Horizonte durch den Mittelpunct ausgiessen, so rechnete ich nach III. so

$$\log \text{tang}\,\theta = 9,2463188 - 10$$
$$4 + \log 0,5714 = 7,7569402 - 4$$

3,0032590

Dieß ist der Logarithme der Menge von Zehntausendtheilen, die auf das Product 0,5714. tang θ gehen. Dieses Product ist also $= 0,1007$;

von $\frac{1}{0,8992}$

$$\log 0,8992 = 3,9538563 - 4$$
$$L = 1,8598213$$

1,8136779

Gehört

Gehört zu 65, λλ. In soviel Secunden müsste das Rad zu dieser Absicht umgehen.

433. Man kann noch umständlicher betrachten, wieviel die Wassermenge in den Schaufeln zusammen beträgt, wenn in den untern weniger als T, in der obern mehr als T ist (417. XI.). Sind in der untern so viel als der obern, so erhellt aus angeführter Stelle, daß die Wassermenge in allen zusammen soviel beträgt, als wenn in jeder T wäre; Sind aber deren, die Wasser enthalten, unten mehr oder weniger als oben, so muß darüber eine eigene Untersuchung angestellt werden, deren Erfolg alsdenn nach 406, 407, die dortige Last und den Effect berechnen lehrte. Ein paar Sätze des Elvius hievon lasse ich weg, theils weil ich schon durch die Wichtigkeit dieser Untersuchungen zu einiger Weitläuftigkeit über diesen besondern Gegenstand hin verleitet worden, theils weil E. selbst bemerkt, daß hiebey vieles auf den besondern Bau der Schaufeln und des Rades ankomme, also die Sätze in ihrer Allgemeinheit nicht allemahl brauchbar sind. Uebrigens ist im bisherigen das Wesentliche aus dem ersten Theile von des Elvius Schrift (352) enthalten, der zweyte Theil betrachtet ungleichförmige Wirkungen (351). Hieher gehören auser dem dort angezeigten eine grosse Menge Maschinen, z. E. wo Stempel oder Hämmer abwechselnd gehoben werden und wieder fallen; Puchwerke, Eisenhämmer, Oel- und Papiermühlen u. d. gl. Die Schranken, die ich

mir jetzo setzen muß, verstatten mir nicht, hievon zu handeln.

Ueber den Stoß auf runde Körper.

434. I. Die krumme Linie AM 43 Fig. sey durch senkrechte Coordinaten AP = x; PM y; bestimmt. Sie drehe sich um ihre Axe AP, und beschreibe so einen runden Körper.

Auf die Fläche dieses Körpers, stosse eine flüssige Materie, die sich der Axe parallel bewegt. Man verlangt die Wirkung dieses Stosses.

II. Zwischen den Kreisen, welche PM, und die unendlich nahe pm beschreiben, geht auf der Fläche des Körpers ringsherum eine Zone = 2.π. y. ds. Diese Zone ist eine krumme Fläche, auf welche die flüssige Materie, der Axe parallel stösst. Man berechne den Stoß auf diese krumme Fläche, und integrire gehörig, so hat man den Stoß auf des Körpers krumme Fläche.

III. Die krumme Linie in den unterschiednen Lagen bey ihrer Umdrehung, giebt so was, wie Meridiane der Kugel. Zwischen ein Paar solche Meridiane fallen ähnliche Bogen von Parallelkreisen, welche von den Ordinaten beschrieben werden. Ein Paar solche ähnliche Bogen, und die Bogen der Meridiane, welche sie begränzen, bestimmen auf dem runden Körper so was, wie auf der Kugel ein sphärisches Rechteck ist. (Geography. 43. I.)

IV.

IV. Setzt man der Meridiane Winkel und Bogen unendlich klein, so wird dieses Rechteck eine ebene Fläche, und man kann den Stoß auf dasselbe betrachten, wie den Stoß auf den schiefen Querschnitt (339; III.).

V. Jedes Rechteck auf der runden Fläche (III.) hat ein ähnliches und gleiches, zwischen eben den Parallelkreisen, in dem Winkel der Meridiane, welcher des Winkels, innerhalb dessen es fällt, Scheitelwinkel ist. Dem einen Rechtecke gehören Ordinaten der krummen Linie auf einer Seite der Axe zu, dem andern gleiche nur entgegengesetzte auf der andern Seite.

VI. Nach (340. II.) zerlege man den Stoß auf ein unendlich kleines Rechteck (IV.) in die beyden Triebe, einen nach der Richtung der flüssigen Materie, der Axe parallel (I.), den andern auf vorige Richtung, also auf die Axe, senkrecht.

VII. Der andre hat allemahl einen gleichen entgegengesetzten aus dem Stosse auf das andre Rechteck in (V.). Ist also der Körper fest, so geben diese beyden Triebe nur ein Paar einander entgegengesetzte gleiche Druckungen, die folglich einander aufheben; gäbe seine Fläche nach, so würde sie dadurch zusammengedruckt.

VIII. Für einen festen Körper setzt man also den zweyten Trieb (VI.) beyseite, und berechnet blos den ersten.

IX. Diesen braucht man nun nicht einzeln auf ein Rechteck, das ein unendlich kleiner Theil einer unendlich kleinen Zone wäre, zu betrachten. Da man die Zone in unzählich viel gleiche solche Rechtecke theilen kann, so ist die Summe der einzelnen Triebe auf jedes, so groß als der Trieb auf ihre Summe.

X. Also braucht man statt T in (341. IV.) hie die Zone (II.). Ferner ist $\theta = mMR$ (43. Fig.) daher $\sin\theta = \frac{dy}{ds}$.

XI. So kömmt der Trieb der Zone nach der Richtung AP; $= 4.\pi.v\,\frac{y.dy^3}{ds^2}$

XII. Da ist $4.\pi.v$ unveränderlich, kann auch, wenn es nöthig ist, mit n multiplicirt werden (341. I.). Imgleichen ist $c^2 = 4.g.v$, wenn c den Weg in einer Secunde bedeutet.

XIII. Den veränderlichen Factor integrirt man so, daß das Integral für $x = o$ verschwindet. Dann setzt man in das Integral statt y die grösste Ordinate unter denen, welche den von A an wachsenden Abscissen zugehören.

XIV. Nähmlich, wenn den von A immer wachsenden Abscissen, kleinere Ordinaten zugehören, so ist klar, daß der Stoß nur auf den Theil des Körpers geschieht, der sich von A bis an den Kreis erstreckt, den die grösste Ordinate beschreibt; was weiter dahinter liegt, leidet keinen

Stoß. So ist klar, daß nur die vordere Hälfte einer Kugel gestossen wird.

XV. Das verhütet sogleich eine Anwendung der Formel (XI.), die auf Ungereimtheit zu führen scheint. Der gleichseitige Cylinder ist auch ein runder Körper, für den $y = r$ seinem Halbmesser. Also $dy = o$ aber $ds = dx$.

XVI. Bey ihm giebt es keine Zone, auf welche Stoß der Axe parallel geschehen könnte. Der ganze Stoß der Axe parallel ist senkrecht auf die Grundfläche, also (341. I.) $= 2. v. r^2. \pi$.

XVII. Stoß auf eine Kugel. AMB sey ein Halbkreis, dessen Halbmesser $= r$; also $y^2 = 2. r. x - x^2$; So ist $ds = \frac{r. dx}{y}$; und $\frac{y. dy^3}{ds^2} = \frac{(r-x)^3. dx}{r^2}$ das Integral $=$ Const $- \frac{(r-x)^4}{4r^2}$ wird $\frac{r^4 - (r-x)^4}{4r^2}$. Aber $r - x = \sqrt{(r^2 - y^2)}$. Also wird das Integral $= \frac{(2. r^2 - y^2). y^2}{4r^2}$, welches mit 4. π. v multiplicirt, den Stoß giebt.

Der ist also $= 2v. y^2. \pi. \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)$.

XVIII. Auf den Kreis, welcher das Kugelstück begränzt, wäre der Stoß $= 2. v. y^2. \pi$ (wie in XVI.). Der Stoß auf die Fläche des Kugelstücks ist allemahl kleiner.

So $\frac{7}{8}$ jenes Stoſſes, wenn $y = \frac{1}{2}r$. Aber jener Stoß wäre $\frac{1}{4}$ des Stoſſes auf den gröſſten Kreis der Kugel.

Alſo der Stoß auf die Fläche des Kugelſtücks, das von einem Kreiſe mit $y = \frac{1}{2}r$ begränzt wird; $\frac{7}{32}$ des Stoſſes auf der Kugel gröſſten Kreis.

So könnte man den Stoß auf die Fläche jedes Kugelſtücks, mit dem Stoſſe auf die Fläche des gröſſten Kreiſes vergleichen.

XIX. Sezt man $y = r$; ſo kömmt der Stoß auf die Fläche der halben Kugel $= v.r^2\pi$, halb ſo groß, als der Stoß auf die Fläche ihres gröſten Kreiſes. Ein gröſſeres Stück der Kugelfläche wird nicht geſtoſſen (XIV.).

XX. Bey der Kugel allein iſt jeder Durchmeſſer Axe, in der Bedeutung (434. I.). Bey einem elliptiſchen Sphäroid gäbe es nur zwo Axen, der Ellipſe lange und kurze, für das länglichte und für das zuſammengedruckte Sphäroid. Bey einem paraboliſchen Sphäroid nur eine, die Axe der Parabel. Die krumme Linie muß nähmlich von der geraden, um die ſie ſich dreht, in ähnliche Hälften getheilt werden.

XXI. **Stoß auf einen gleichſeitigen Kegel.** Alſo AM 43. F. eine gerade Linie. Des Kegels Höhe ſey $= h$, Halbmeſſer ſeiner Grundfläche $= r$; alſo $y = \frac{r.x}{h}$; $dy = \frac{r.dx}{h}$; $ds = \frac{dx.\sqrt{(h^2+r^2)}}{h}$ folglich $\frac{y.dy^3}{ds^2} =$

$\frac{r^4 . x . dx}{h^2 . \sqrt{(h^2 + r^2)}}$. Davon das Integral =

$\frac{r^4 . x^2 .}{2 . h^2 . (h^2 + r^2)}$. Für die ganze Kegelfläche =

$\frac{r^4}{2 . \sqrt{(h^2 + r^2)}}$ weil da $x = h$.

Es sey ferner α der Winkel, den des Kegels Seite mit der Axe macht, AMB 43. Fig., wenn AM eine gerade Linie, so ist das Integral für die ganze Kegelfläche $= \frac{1}{2} r^2 . (\sin \alpha)^2$ Folglich (XI.) der Stoß auf die ganze Kegelfläche $= 2 . v . (\sin \alpha)^2 . r^2 . \pi$ verhält sich zum senkrechten Stosse auf einen Kreis so groß als des Kegels Grundfläche, wie das Quadrat des Sinus des Winkels zum Quadrate des Sinustotus.

So für $h = 3 . r$, wäre der Stoß auf des Kegels krumme Fläche $= \frac{1}{10}$, des Stosses auf den Kreis so groß als die Grundfläche, des Winkels Tangente $= \frac{1}{3}$ er selbst $=$ 26 Gr. 0 M. 5, 8 S.

XXII. Je grösser h bey einerley r ist, desto schwächer ist der Stoß auf die Kegelfläche in Vergleichung mit dem auf den Kreis der Grundfläche gleich, dieser Stoß bleibt nähmlich immer gleich stark.

XXIII. Setzte man h unendlich, so hiesse das nicht: des Kegels Seite fällt mit seiner Axe zusammen, sondern: die Seite wird der Axe parallel. Nähmlich r soll bleiben, h kann also nicht anders wachsen als so, daß eine gerade Linie

durch einen Punct gezogen, der um r von der Axe absteht, sich immer mehr und mehr einer parallelen Lage mit der Axe nähert.

Für h unendlich, verwandelt sich also der Kegel in einen Cylinder. Der Stoß auf des Cylinders krumme Fläche ist natürlich $= o$, da die flüssige Materie ihr parallel geht (XVI.).

XXIV. Stoß auf einen abgekürzten Kegel, dem von der Spitze an, ein Stück der Höhe $= x$ fehlt.

Man ziehe vom Stosse auf die ganze Kegelfläche, den Stoß auf das Stück Kegelfläche ab, das dem Theile der Axe $= x$ gehört. So bleibt

$$2.v.(\sin\alpha)^2.r^2.\pi.(1-(\frac{x}{h})^2)$$

Dieß ist der Stoß auf des abgekürzten Kegels krumme Fläche.

Nun aber stellt der abgekürzte Kegel seine kleinere Grundfläche senkrecht der flüssigen Materie entgegen, dieser ihr Durchmesser ist $= \frac{r.x}{h}$

der senkrechte Stoß auf sie $= 2.v.r^2.\pi.\left(\frac{x}{h}\right)^2$

Dieser Stoß, und der auf des abgekürzten Kegels krumme Fläche geben zusammen

$$2.v.r^2.\pi.\frac{r^2+x^2}{r^2+h^2}$$

XXV. Setzte man $x = h$, oder fehlte der ganze Kegel, so kömmt der Stoß so groß als

auf

auf die ganze Grundfläche, wie gehörig, denn die allein wäre da.

XXVI. Des Kegels Höhe sey dem Halbmesser seiner Grundfläche gleich. Wenn eines solchen Kegels Grundfläche den Aequator einer Kugel deckte, befände sich seine Spitze im Pole (Astron. 119. IX.).

Seine Seite $= r\sqrt{2}$ also seine krumme Fläche $r^2\pi.\sqrt{2}$, verhält sich zur Fläche der halben Kugel $= 1 : \sqrt{2}$.

Sein körperlicher Innhalt $= \frac{1}{3}r^3.\pi$, halb so groß als der körperliche Innhalt der halben Kugel.

Für ihn ist $\alpha = 45°$, also der Stoß auf seine krumme Fläche (XXI.) $= 2.v.\frac{1}{2}.r^2.\pi$, so stark als der Stoß auf die halbe Kugelfläche (XIX.).

Zur Erläuterung, wie beyde Stösse gleich seyn können, überlege man, daß auf der Kugelfläche, vom Pole nach dem Aequator zu, lauter Quadranten gehn, wo die Linien, die ihnen auf der Kegelfläche zugehören, alle gerade sind. Die Quadranten entziehen sich durch ihre Krümmung der stossenden flüssigen Materie mehr als die geraden Linien.

XXVII. Will man Dichten der stossenden Materie und des gestossenen Körpers in Rechnung bringen, so setze man, die Dichte des gestossenen Körpers verhalte sich zur Dichte der stossenden Materie $= 1 : n$.

Soll n das Gewicht eines Kubikfusses der stossenden Materie bedeuten, so bedeutet $\frac{1}{n}$ das Gewicht eines Kubikfusses der gestossenen. Solchergestalt kann man des Buchstabens Bedeutung, wie in (341 I.) behalten, und darf nur, den jedesmaligen geometrischen Ausdruck der Säule der stossenden Materie, mit n multipliciren.

XXVIII. So verhält sich die Masse einer ganzen Kugel zum Stosse auf sie ... Der trifft aber nur ihre halbe Fläche (XIX.) ... $= \frac{4}{3}.\pi.r^3 : n.v.r^2.\pi = 4.r : 3.n.v$; Sollte der Stoß so viel betragen als ihr Gewicht, so wäre

$$v = \frac{4}{3n}.r$$

XXIX. Aber (XXVII.) setzt zum voraus, daß sich die stossende Materie nur auf der Seite des Körpers befindet, auf welche sie stösst. Ist er ganz in ihr, so verliert er von seinem Gewichte, ist das $= Q$ im leeren Raume, so muß man $(1-n).Q$ für das annehmen, das gestossen wird.

XXX. So verhielte sich bey der Kugel in der flüssigen Materie Gewicht zum Stosse $=$ $4.r.(1-n) : 3.n.v$ und $v = \frac{4.r}{3.n}.(1-n)$ gäbe Stoß dem Gewichte gleich.

XXXI. Eine eiserne Kugel in Wasser werde von Wasser gestossen. Es sey $n : 1 = 1000 : 7852$

7852 (Hydrost. 49.) also $1-n=\frac{6852}{7852}$; also Gewicht im Wasser zum Stosse $=4.r.6852:3000.v$, und Gewicht dem Stosse gleich, wo

$$v=\frac{4.r.6,852}{3}=4.2,284.r=9,136.r$$

Es sey $r=1$ pariser Zoll, so ist Gewicht dem Stosse gleich, wo $v=\frac{9,136}{12}$ Fuß. Es ist $g=15,095$;

$$\log v = 0,8815749-1$$
$$\therefore g = 1,1788331$$

	1,0604080
halb	= 0,5302040
log 2	= 0,3010300
	0,8312340

gehört zu 6,7800;

XXXII. In 271; kann F den Stoß bedeuten, P das Gewicht des Körpers im Wasser. So ist für eine Kugel (XIX.)

$$\frac{4}{3}.n.v.r^2.\pi=\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}.\frac{4}{3}.\pi.r^3.(1-n)$$

$$\text{also } v=\frac{4}{3}.\frac{1-n}{n}.\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\,r$$

XXXIII. Wenn das Wasser horizontal fliesst,

$$\text{ist } v=\frac{4}{3}.\frac{1-n}{n}.\tang\alpha.r$$

Ist hie Stoß dem Gewichte im Wasser gleich, so ist $\alpha=45$ Grad.

Vergleichung mit dem Widerstande.

435. I. Man nimmt an, es sey gleichviel, ob ein ruhender Körper gestossen wird, oder ob er sich durch ruhende Materie mit der Geschwindigkeit bewegt, mit welcher vorhin die flüssige Materie auf ihn lief. (Höh. Mech. I. Abschn. V. Cap.). In dem letzten Falle leidet er **Widerstand**, wodurch seine Bewegung geändert wird. Da wird man also, nebst seinem blos geometrischen Raume auch seine Masse betrachten, und sie mit der Masse, durch die er sich bewegt, vergleichen.

II. So hat Leonhard Euler an mehr Orten Widerstand aus Stosse hergeleitet. Ich führe hie folgendes an aus seiner Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux St. Petersb. 1733. P. II. ch. 2. §. 7. Eine Ebene = ff, bewege sich durch Wasser, in einer Richtung, die mit ihr einen Winkel = φ macht, mit der Geschwindigkeit = c, so leidet sie einen Widerstand gerade ihrer Bewegung entgegen, = $\frac{c.c.f.f.\sin\varphi^3}{4.g}$

Es sey in 341	T	v	θ
hie	f.f	$\frac{cc}{4.g}$	φ

So

So ist in 341. IV. der Stoß in gegenwärtigen Zeichen ausgedruckt $= \frac{f.f.c.c}{2.g}$. $\sin\varphi^3$. Noch einmahl so groß als Eulers Widerstand.

Nähmlich ich druckte den Stoß in 341. I. nach 329. III. durch 2. v aus. Das gab ihn (329. V.) noch einmahl so groß als in (325. II). Euler hat hie die einfache Höhe genommen, wovon sich der Grund aus (344) einsehen läßt. Wenn sich die Ebene durch Wasser bewegt, so ist sie nur so groß, daß sie nicht mehr als den Wasserstrahl auffinge, der auf sie stiesse, wenn man sie als ruhend betrachtet.

III. Will man also den (434.) berechneten Stoß als Widerstand betrachten, und mit Eulern übereinstimmen, so nimmt man nur von jeder nach (434) gefundnen Grösse die Hälfte. Die Verhältnisse bleiben für Widerstand, wie in (434.) für Stoß. Z. E. die Fläche der halben Kugel leidet einen Widerstand halb so groß, als der, den ihr grösster Kreis leiden würde (434. XIX.).

IV. So wird man sich die Beweise dessen entwickeln, was ich in meiner höhern Mechanik I. Abschn. V. Cap. habe annehmen müssen. Bey dieser Gelegenheit erinnere ich, daß daselbst 112. XII. zinnerne statt bleyerne stehen soll, wie jeder aus der angegebenen eigenen Schwere leicht sieht. Eben daselbst, in der 123 Seite letzten Zeile ist das Gewicht der Kugel in der flüssigen

Materie $= \frac{1}{6}. \pi. c^3. \frac{(m-n)}{n}$. P und 124 S. 2 Z. das Gewicht im leeren Raume $= \frac{1}{6}. \pi. c^3. \frac{m}{n}$ P; also in dieser S. 5 Z. die niederwärts treibende Kraft $\frac{m-n}{m}$ der natürlichen Schwere.

Auch in der 17 Zeile dieser Seite muß 3m statt 3n stehn.

In: Abhandlungen der böhmischen Gesellsch. d. W auf das Jahr 1785; Prag 1785. 4., findet sich 237 u. f S. Dr. Tessanek Vergleichung der Widerstände einiger festen Körper in flüssigen Zwischenkörpern Es ist Anwendung solcher Formeln, wie sich aus II. für Zonen herleiten lassen, und in der höhern Mechanik gegeben sind, besonders auf runde Körper, die aus Umdrehung ähnlicher krummen Linien entstehen, auf solche Körper, wenn sie durch eine Ebene senkrecht auf die Axe abgekürzt sind, also der Widerstand theils die Ebene betrifft, theils die krumme Fläche u. s. w. Alles nützliche Rechnungsexempel.

V. Noch Schriften, welche neuere Erfahrungen über Stoß und Widerstand enthalten.

Loix de la resistence, tirées des experiences de M. l'Abbé Bossut. Hist. de l'Ac. des Sciences 1777. p. 62.

Eine Ebene $= a^2$, in einer flüssigen Materie so bewegt, daß sie von den Theilen des flüssigen Wesens senkrecht, mit einer Geschwindigkeit

keit gestossen werde, die der Höhe v gehört. Der Widerstand sey da so groß, als das Gewicht des flüssigen Wesens, das im Prisma a^2. v enthalten ist.

Aber, bey schiefem Stosse, stimme die Erfahrung nicht mit der Voraussetzung überein, daß sich der Widerstand wie das Quadrat des Sinus der Neigung verhalte.

An erwähnter Stelle der Hist. de l'Ac. des Sc. ist ein Auszug aus Bossut Nouvelles experiences sur la resistance des fluides 1777 befindlich, wo dieses angeführt wird.

Nouvelles experiences sur la resistance des fluides par Mr. l'Abbé Bossut. Mem. de l' Ac. des Sc. 1778. p. 353. Auf einem grossen Wasserbehältnisse sind durch Gewichte Schiffchen gezogen worden, deren Vordertheile platt, oder Winkel von unterschiedner Grösse waren.

Diese Erfahrungen, wie andre von 1775 bestätigen, daß sich der senkrechte Stoß ziemlich der Theorie gemäß, wie Quadrat der Geschwindigkeit und Fläche zusammen verhält. Aber von dem theoretischen Satze, daß sich der schiefe Stoß wie das Quadrat des Sinus des Neigungswinkels verhalte, weichen die Erfahrungen merklich ab, wenigstens, wenn die Winkel etwas spitzig werden. Es sind hie Versuche mit Winkeln von 12 Gr. bis 180° durch Aenderungen von 12 Gr. angestellt worden. Der Widerstand ist immer grösser, als jene Theorie ihn angiebt. Hr. B. sucht eine Formel, die diesen Ueberschuß beynahe ausdrückte.

Auf

Auf Polygone oder ganz krumme Flächen läsſt ſich hieraus nichts ſchlieſſen. B. hält auch Verſuche darüber zu mühſam und koſtbar, und weiß keinen Rath, als dieſerwegen Beobachtungen bey wirklichen Schiffen anzuſtellen.

Eſſai d'une Theorie de la reſiſtance qu'éprouve la Proue d'un Vaiſſeau dans ſon mouvement, par Mr. Leonard Euler. Auch Mem. 1778. p. 597.

Da Hr. E. im T. VI. des Nouveaux Commentaires (ſind die petersburgiſchen) im Tentamen Theoriae de frictione fluidor. gezeigt hat, daß das Reiben der flüſſigen Materien beträchtlich iſt, ſo bringt er dieſes nebſt dem Stoſſe hie mit in Rechnung und glaubt ſo der Wahrheit näher zu kommen.

Aus: Nouvelles experiences ſur la reſiſtances des Fluides par MM. d'Alembert, le Marquis de Condorcet, et l'Abbé Boſſut, membres de l'Ac. R. d. Sc. M. l'Abbé Boſſut Rapporteur; Paris 1777; Octav 232 S. 4 Kupfert. Findet ſich ein Auszug im Journal des Sav. Aout 1777. p. 129 ed. d'Amſterd. Die Verſuche wurden angeſtellt, der Schifffahrt mehr Vollkommenheit zu geben. Sie widerſprechen auch für ebene Flächen, der Vorausſetzung des Quadrats des Sinus der Neigung, und das wird in einer Abhandlung beſtätiget, die Boſſut der Academie 1778 übergeben hat.

Memoire ſur la force d'impulſion des Torrents par M. Aubry Ingenieur en chef des Ponts

et

et Chauſſées de Breſſe; Steht in Rozier Obſervations ſur la phyſique .... Aouſt 1779.

VI. Die angeführten Ungewißheiten veranlaſſten mich, unſerer Soc. der Wiſſenſchaften eine Preisfrage vorzuſchlagen, die in unſern Gel. Anz. 1789 275 S. ſo ausgedruckt wird:

Was für ein Verhalten iſt bey ſchiefem Widerſtande, zwiſchen der Gröſſe deſſelben und dem Neigungswinkel? Wie findet man den Widerſtand auf krumme Flächen?

Es wäre gut, dieſes ſowohl für blos träge, allenfalls noch zähe flüſſige Materien anzugeben, als auch für Luft.

Der Preis ſollte den 19. Nov. 1791 ertheilt werden. Es war eine Schrift eingekommen, die ihn aber nicht erlangen konnte. In Gött. Gel. Anz. 1791. 1979 u. f. S. iſt von ihr Nachricht gegeben.

VII. Memoria I. del Sign. Ab. Giuſeppe Avanzini; Nuove ricerche ſulla reſiſtenza de' fluidi. In Saggi ſcientifici e letterarii dell' Accademia di Padova T. III. P. II. 1794. p. 96. Eine verticale Welle wird vermittelſt eines ſinkenden Gewichts gedreht, und führt an einem horizontalen Arme eine Ebene im Kreiſe herum, ſo daß jeder Punct der Ebene einen horizontalen Kreis beſchreibt. Aus Verſuchen hiemit leitet Hr. A. allerley Folgerungen her. Wenn die Ebene gegen den Horizont geneigt iſt, und ihr Durchſchnitt mit der Horizontalfläche, mit der Richtung der Bewegung auf der Horizontalfläche, einen rech-

ten

ten Winkel macht, so leiden, in ruhiger Luft, gleiche Theile der Ebene nicht gleichen Widerstand, wenn sie auch gleiche Neigung und Geschwindigkeit haben, sondern der obere leidet mehr Widerstand, und desto mehr, je spitziger sein Neigungswinkel ist. Geht also eine solche Ebene in der Luft frey fort, daß die Theile ausweichen können, die mehr Widerstand finden, so wird sie sich in einer Schlangenlinie bewegen, die mehr Windungen macht. Hr. A. handelt auch vom Ricochetiren der Körper, die unter einem kleinen Winkel aufs Wasser geworfen werden, imgleichen, wie geworfne Körper aus der Verticalfläche weichen.

VIII. Hr. Chapman k. schwed. Viceadmiral hat auf kön. Kosten eine Menge Versuche über den Widerstand angestellt und oft wiederhohlt. Sie finden sich, mit Folgerungen und Anwendungen im zweyten Quartale von Kongl. Vetenskaps Academiens Nya Handlingar Tom. XVI. år 1795. Er bemerkt: Wasser hindere den Fortgang von vorne durch das, was man gewöhnlich Widerstand nennt, er heisst es drückende Kraft, und durch seinen Zusammenhang, aber auch von hinten, durch seinen Zusammenhang mit dem Körper. Wie sich beyde Hindernisse, bey Körpern von unterschiedenen Gestalten verhalten, leitet er aus seinen Versuchen her, und macht Anwendungen auf den Schiffbau. Die eigentlichen Grössen der Hindernisse giebt er nicht an. Seine

Ver-

Versuche sind im Wesentlichen ohngefähr so angestellt, wie die vom Bossut angeführten (V).

IX. Abhandlung vom geraden und schiefen Stosse des Wassers, oder Widerstande flüssiger Körper, . . von Hrn. Friedrich Willy. Gerlach, Prof. der Phil. und Mechan. an der k k. Ingenieurakad. zu Wien, hat bey der russisch kais. Ak. d. W. zu St. Petersburg 1796. 25 Duc. als die Hälfte des Preises bekommen, der auf die wichtigste Entdeckung oder beste Abhandlung über einen Gegenstand aus der Mechanik gesetzt war.

Beweis der Methoden, die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen.

Gulielmini (278).

436. Bey einerley Kugel verhält sich der Stoß wie die Höhe, welche der Geschwindigkeit gehört (434. XIX.). Da es hie nur auf Verhältnisse der Stösse ankömmt, so ist es gleichgültig, ob man den Satz (329. III.) oder einen andern annimmt, die alle darin übereinstimmen, daß sich die Stösse wie die Höhen verhalten, welche den Geschwindigkeiten gehören.

Elvius 283.

437. I. Er sucht aus einem einzigen Stosse die Geschwindigkeit des Flusses selbst. Also muß man wissen, wie stark der Stoß selbst für gegebene Geschwindigkeit ist. Der senkrechte Stoß betrage soviel als das Gewicht eines Wasserpris-

ma,

ma, das die Ebene zur Grundfläche, und λ. v zur Höhe hat.

Weil nun der Stoß auf die Kugel halb so groß ist als auf ihren grössten Kreis, so wird er durch $\frac{1}{2}$. λ. v. r^2. π ausgedruckt (434. XIX.). Man darf also nur in den Rechnungen (434) $\frac{1}{2}$ λ. v statt v schreiben.

So kömmt in (434. XXXII.) $\frac{1}{2}$. λ. v $= \frac{4}{3}$. $\frac{1-n}{n}$. tang α. r.

II. Nun ist beym Elvius, das Gewicht der Kugel in freyer Luft $= p$; im Wasser $= q$; also $p - q : p = n : 1$ und $1 - n = \frac{q}{p}$; Setzt man also $\frac{1}{2}$d statt r; so kömmt die Höhe, welche des Wassers Geschwindigkeit gehört oder v $=$

$$\frac{4}{3.\lambda} \cdot \frac{q}{q-p} \cdot \text{tang}\,\alpha \cdot d$$

In des Elvius Formel (284) ist diese Höhe

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{q}{q-p} \cdot \text{tang}\,\alpha \cdot d.$$

Er setzt also λ $= 1$, den senkrechten Stoß, so stark als das Gewicht eines Wasserprisma, dessen Höhe die einfache Höhe wäre, die der Geschwindigkeit gehört, wie (325. II.).

438. Er gründet seine Formel auf Newtons Principia L. II. Pr. 38. Newtons und sein Vortrag klingen anfangs, dem fremd, der an die jetzigen zur Rechnung bequemern analytischen Ausdrücke gewöhnt ist.

Dritter Abschnitt.

Theoretische Untersuchungen von der Geschwindigkeit des fliessenden Wassers.

439. Was ich im I. Abschnitte, 80 u. f. §. durch Erfahrungen kennen zu lehren gesucht habe aus einer Theorie herzuleiten, werde ich mich Johann Bernoullis Hydraulik bedienen (*), den Vortrag aber so einzurichten suchen, wie es mir scheint, daß sich die Richtigkeit der Voraussetzungen und der Schlüsse am leichtesten beurtheilen lässt, und wie sich die Rechnungen am bequemsten führen und anwenden lassen.

Johann Bernoullis Grund der Hydraulik.

440. **Lehnsatz.** In einem Gefässe 44 Fig. sey Wasser, das ich jetzt blos als ein träges flüssiges Wesen, ohne sonst die geringste in ihm befindliche Kraft betrachte. Ich stelle mir in diesem Wasser zwo gleich dicke Schichten bey A und B vor, so daß die beyden parallelen Ebenen, welche

(*) Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata, directe ex fundamentis pure mechanicis. Anno 1732. Op. Io. Bern. T. IV. n. 186. Steht auch in den alten Commentar. Ac. Imp. Petrop. T. IX und X.

welche die Schicht bey A begränzen, so weit von einander sind, als die beyden ihnen parallelen Ebenen, welche die Schicht bey B begränzen, diese Dicke, welche für beyde Schichten einerley ist, heisse n. Die Weiten dieser Schichten aber sollen nicht einerley seyn, m soll die Weite der bey A; und h der bey B bedeuten; Nähmlich m die Fläche jeder der Ebenen, welche die Schicht bey A begränzt, und h, die Fläche jeder der Ebenen bey B; daß also m, h; Flächen, nicht Linien bedeuten.

Nun bekomme die Schicht A eine gewisse bewegende Kraft $= \pi$ niederwärts zu gehen; z. E. Man stelle sich vor, das Wasser in der Schicht A würde nun plötzlich schwer, und dieses widerfahre ihm allein, ohne daß das übrige Wasser schwer würde. Wäre alsdenn die Kraft unserer Schwere $= 1$; so wäre das Gewicht dieser Wasserschicht $=$ m. n; und das würde π seyn.

Wenn also auf diese oder eine andere Art, eine bewegende Kraft π in A entsteht, so könnte man sich vorstellen, diese bewegende Kraft entstünde nicht unmittelbar in A; sondern es würde B von einer bewegenden Kraft k; niederwärts getrieben, und das Wasser zwischen B und A; welches für sich keine Kraft hat, nur träg ist, theilte die Gewalt, welche die Schicht B solchergestalt ausübt, der Schicht A mit. Es fragt sich, wie groß k seyn muß, damit A eben die bewegende Kraft π auf diese Art bekömmt, die es vorhin unmittelbar bekam?

Aufl. I. Weil zwo Wassersäulen von gleicher Höhe einander allezeit das Gleichgewicht halten, wenn in beyden einerley beschleunigende Kraft, z. E. einerley Kraft der Schwere wirkt. (Hydrost. 16.) so stelle man sich vor, die gleich dicken Schichten B, A; würden, von gleichen beschleunigenden Kräften, B niederwärts, A aufwärts getrieben, so werden sie einander erhalten. Jede Schicht nähmlich wäre als eine solche Wassersäule anzusehen, und die Dicke der Schicht ist die Höhe der Säule. Ob die untere Grundfläche bey B so groß wäre als die obere bey A, darauf kömmt hier nichts an, wenn sich nur der Druck von einer auf die andere durch das Wasser dazwischen fortpflanzt.

II. Daß A aufwärts getrieben werden soll, setze ich nur, damit seine Gewalt der Gewalt des B nach der hier gezeichneten Gestalt des Gefässes entgegengesetzt ist. Das Wasser zwischen A und B theilt blos den Druck von einem zum andern mit, und wenn dieses Wasser einen Druck von A nach B mittheilen soll, muß solcher aufwärts gerichtet seyn. Hätte man statt des Gefässes eine gekrümmte Röhre mit zween Schenkeln, in deren einem A; im andern B; zu oberst wäre, so daß sich beyder Oberflächen in einer Horizontalfläche befänden, so würden A und B von gleichen beschleunigenden Kräften niederwärts getrieben, einander gegenseitig erhalten, wie zwo gleich hohe Wassersäulen in zween Schenkeln einer solchen gekrümmten Röhre einander erhalten, wenn ei-

nerley Schwere sie treibt, sie mögen nun ihren Druck gegen einander, vermittelst zwischen ihnen befindlichen Wassers, Queckſilbers oder sonst was anders ausüben.

Nähme man das übrige Wasser in beyden Schenkeln nicht schwer an, so brauchten die Oberflächen der Schichten, A in einem Schenkel, B im andern, nicht einmahl in einerley Horizontalfläche zu seyn, denn daß sich eine einzige schwere flüssige Materie in beyden Schenkeln in eine Horizontalfläche setzt, rührt nur daher, weil man sich in beyden Schenkeln gleich viel, gleich dicke schwere Schichten vorstellen muß, wenn der eine Schenkel den andern erhalten soll. Wie man dieses aus der Hydrostatik leicht einsieht, so wird es auch dadurch erläutert, daß z. E. Wasser in einem Schenkel höher steht als Queckſilber im andern, eben so vielmahl, so vielmahl eine Schicht Wasser dicker seyn muß, als eine gleich weite Schicht Queckſilber, die eben soviel wiegen soll.

III. Weil ich die Materie in den Schichten A, B, gleich dichte annehme, so verhalten sich die Mengen der Materie in diesen gleich dicken Schichten, A, B, wie m : h; also die beschleunigenden Kräfte, wie $\frac{\pi}{m} : \frac{k}{h}$ (hdh. Mech. 1 Abschn. 50) sind also beyde diese Kräfte gleich, so ist $k = \frac{h\pi}{m}$.

IV. Wenn beyde beschleunigende Kräfte gleich und entgegengesetzt sind, so erhalten die beyden

Schichten einander im Gleichgewichte (I.) oder die bewegenden Kräfte von A und B heben einander auf. Die bewegende Kraft π in A also ist so groß, daß wenn sie der bewegenden Kraft $\frac{h\pi}{m}$ in B entgegengesetzt wird, beyde einander aufheben, und folglich muß aus der bewegenden Kraft $\frac{h\pi}{m}$ in B, eine bewegende Kraft in A entstehn, die so groß als π, und wie $\frac{h\pi}{m}$, niederwärts gerichtet ist. Oder: Es erfolgt in der Schicht A einerley, sie mag von der bewegenden Kraft π unmittelbar, oder von einer bewegenden Kraft $\frac{h\pi}{m}$ in der Schicht B niederwärts getrieben werden.

V. Diese Vorstellung, als ob statt der bewegenden Kraft π in A; eine solche Kraft $k = \frac{h\pi}{m}$ in B wäre, trägt gleichsam die bewegende Kraft, aus einer Schicht in die andere über, daher sie Bernoulli Praefat. §. XI; Translationem nennt.

441. Zus. Wenn sich in einer Menge Wasser, z. E. in allem Wasser, das das Gefässe 44. F. ausfüllt, überall bewegende Kräfte befänden, so könnte man sich diese Menge Wasser in parallele Schichten getheilt vorstellen, die bewegende Kraft jeder Schicht untersuchen, und in eine ge-

wisse Schicht z. E. die oberste B, übertragen. Jeder Schicht bewegende Kraft giebt, in die obere übergetragen, daselbst eine gewisse bewegende Kraft, und die Summe dieser bewegenden Kräfte daselbst, thut eben das, was die bewegenden Kräfte der einzelnen Schichten, durch die ganze Masse Wasser ausgebreitet thun.

Zur Erläuterung stelle man sich vor, die ganze Masse von B bis A sey schwer: so hat jede Schicht eine bewegende Kraft; Man trage alle diese bewegenden Kräfte in die obere, und setze, p heisse die Summe dessen, was solchergestalt herauskömmt. Nun nehme man an, das Wasser sey nicht mehr schwer, auf die obere Schicht aber wirke eine bewegende Kraft = p; z. E. ein Kolben, der bey B genau an die Wände des Gefässes anschliesst, werde mit dieser Kraft auf die obere Schicht gedruckt, so wird alles in A so erfolgen, wie es erfolgte, als alles Wasser durchaus schwer war.

442. I. Ein Gefäß, 45. Fig., dessen Länge HG ist, habe eine solche Gestalt, daß ein Schnitt von ihm mit einer Ebene, die auf HG senkrecht steht, bey H eine Fläche = h, bey G eine Fläche = m, zwischen H und G, bey L eine Fläche = y gebe, so daß y eine Grösse ist, die sich nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert, sie mag von H bis G abnehmen oder zunehmen. Die Figur könnte den Durchschnitt eines solchen Gefässes vorstellen, den eine Ebene durch HG machte, diese stünde also auf vorerwähnten Querschnitten

senkrecht,

senkrecht, und schnitte dieselben in HI; LM; GD, des Gefässes krumme Seitenfläche aber in der krummen Linie IMD, deren Ordinaten HI, LM, GD, wären. Statt der Querschnitte, bey H, L, G, will ich sagen: die Ebenen HI, LM, GD.

II. Unendlich nahe bey dem Querschnitte durch L, mache man einen durch l; der die Ordinate lm geben wird. Es sey HL = x; so ist zwischen den beyden Querschnitten der körperliche Raum ydx enthalten.

443. Man stelle sich dieses Gefäß, unten bey GD mit einem Boden verschlossen und voll schweres Wasser vor. Das Gewicht des Elements zwischen den Ebenen LM, lm, lässt sich durch ydx ausdrucken. Wäre das eine Schicht wie A (440; III.) und man wollte ihr Gewicht in die obere bey HI übertragen, so wären

dorten	π	h	m	k
hier	ydx	h	y	hdx

Das Gewicht von jeder Schicht wie Lm in HI übertragen, gäbe also daselbst eine bewegende Kraft hdx; folglich gäben die Gewichte aller Schichten von H bis L in HI getragen, daselbst eine bewegende Kraft $\int hdx = hx$ und die Gewichte aller Schichten im ganzen Gefässe, in HI getragen, gäben daselbst eine bewegende Kraft = h. HG.

Wäre z. E. h ein Quadratfuß HG = 1 Fuß also h. HG ein Cubikfuß Wasser, dessen Gewicht ich 70 Pf. setzen will, so ist die Meynung von 440; 441; diese: Es ist einerley, ob die Was-

ferschichten im Gefässe HD durchaus schwer sind, oder ob dieses Wasser nicht schwer wäre, auf den Deckel HI aber ein Gewicht von 70 Pf. läge, das ihn in das Gefäß hinein drückte. Der Boden GD wird alsdenn eben so stark von diesem Gewichte gedruckt werden, dessen Druck das Wasser, das nicht schwer ist, bis an ihn fortpflanzt, als er gedruckt wird, wenn sich statt dieses Gewichtes über ihm schweres Wasser durch das ganze Gefäß hinauf befindet. Man weiß, daß der Boden vom schweren Wasser im Gefässe so stark gedruckt wird, als ob über ihm eine Wassersäule = HG. m stünde (Hydrost. 24.). Wäre also der Boden beweglich, daß ihn das schwere Wasser hinunter treiben könnte, so müsste er gegen diese Gewalt, die das schwere Wasser auf ihn ausübt, hinaufwärts durch eine Kraft = m. HG erhalten werden. Wäre nun das Wasser über diesen beweglichen Boden nicht mehr schwer, statt dessen aber läge auf dem Deckel HF ein Gewicht = h. HG so drückten diese beyden Kräfte h. HG und m. HG vermittelst des dazwischen befindlichen Wassers gegen einander und erhielten einander, denn die Kraft am Boden in den Deckel übergetragen, wäre $\frac{h}{m}$. m. HG = h. HG.

Dieses zeigt, wie dieses Uebertragen mit den bekannten hydrostatischen Lehren übereinstimmt, auch daß sich in HI, nicht etwa die Summe der bewegenden Kräfte der Schichten, befindet (die wäre hier $\int ydx$) sondern die Summe der

aus

aus jeder Schicht in HI übergetragenen bewegenden Kräfte.

444. Nun sey eben dieses Gefäß, bey HI und GD offen, und voll Wasser, das bey GD, mit der Geschwindigkeit v herausfliesse. Das Gefäß bleibe beständig voll, wie etwa geschehen könnte, wenn es bey HI an ein grosses Wasserbehältniß gesetzt wäre, daraus Wasser, ganz gelind, und ohne einigen Fall und davon herrührende Geschwindigkeit, nach eben dem Maasse bey H hineinträte, wie ihm das vorhin da befindliche Wasser Platz macht, um des unten herauslaufenden Stelle nach und nach einzunehmen. Durch die (442) beschriebenen Querschnitte, läßt sich das Wasser in Schichten theilen, deren Dicke darauf ankömmt, wie weit die beyden Querschnitte von einander sind, die eine solche Schicht begränzen. Es wird natürlich seyn, solchen Schichten unendlich wenig Dicke zu geben. Dergleichen Schicht gäben die Querschnitte bey L und I (4), das Wasser in ihr liesse sich auch durch ydx ausdrücken.

445. Das Wasser, das in der Ebene GD ist, bewegt sich mit der Geschwindigkeit v; also sind $\frac{mv}{y}$; $\frac{mv}{h}$; die Geschwindigkeiten, mit denen sich das Wasser in den Ebenen LM; HI; bewegt (240).

446. Ich nehme an, daß sich alles Wasser in einer solchen Schicht wie LMml mit einerley

Geschwindigkeit bewege. Diese Geschwindigkeit sey so groß, daß ein Körper mit ihr in einer Secunde den Raum u durchlaufen kann. Sie ändert sich, wenn das Wasser in dieser Schicht während des Elements der Zeit dt, weiter nach G zu kömmt, und weil sich Geschwindigkeit ohne Wirkung einer Kraft nicht ändert, so kann man sich vorstellen, das Wasser dieser Schicht werde von einer beschleunigenden Kraft getrieben, die (nach Höh. Mech. 1. Abschn. 72) $\frac{Tdu}{Cdt}$ seyn muß, wo C die Geschwindigkeit bedeutet, die ein frey fallender Körper in der Zeit T erhält. Und weil man T nach Gefallen nehmen kann, so kann es eine Secunde bedeuten. Man setze also $T = 1$ Sec. $C = 2g$ (Höh. Mech. III. Abschn. 217), so ist diese Kraft $= \frac{du}{2gdt}$.

447. Soll aber in der Zeit dt alles Wasser der Schicht LMml aus seiner jetzigen Stelle in die nächste kommen, so muß das, welches im Anfange dieser Zeit bey L war, am Ende bey l seyn. Der Weg also, den es in dieser Zeit zurücklegte, ist $= dx$, und wenn die Geschwindigkeit u in der Bedeutung (446) genommen wird, so ist $dx = udt$ und die beschleunigende Kraft (446) $\frac{udu}{2gdx}$.

Folglich

Folglich (Höh. Mech. I. Abschn. 51.) die bewegende Kraft dieses Elements $\frac{udu}{2gdx} \cdot ydx = \frac{uydu}{2g}$.

Die Meynung ist (nach den angeführten Stellen der höhern Mechanik) damit das Wasser seine Geschwindigkeit so ändert wie es sie nach (446) ändern muß, so muß jedes Theilchen dieses Elements, von einer Kraft, wie unsere Schwere ist, getrieben werden, nur daß sich diese Kraft zu unserer Schwere verhält wie $\frac{udu}{2gdx} : 1$.

Und wenn das Element, da eine solche Kraft in jedes Wassertheilchen wirkt, bey lm von einer Ebene sollte getragen werden, wie ein schwerer fester Körper von einer solchen Ebene getragen würde, so verhielte sich der Druck, den diese Ebene ausstünde, zum Gewichte von soviel Wasser, als in den Raum Lm geht, wie $\frac{uydu}{2g} : ydx$.

448. Diese bewegende Kraft in die Schicht bey HI übergetragen, oder eine bewegende Kraft in der Schicht bey HI, von der diese bewegende Kraft in der Schicht bey LM herrühren könnte, wäre nach (440; III.) $\frac{h}{y} \cdot \frac{uydu}{2g} = \frac{hudu}{2g}$; die dortigen π; m sind hier $\frac{uydu}{2g}$; y:

449. Dieser Ausdruck giebt also die bewegende Kraft in HI, von welcher die bewegende Kraft der Schicht, welcher u zugehört, herrühren kann. Jeder Schicht aber von allen denen, die von H bis L liegen, gehört ein ander u zu, und wenn HL = o wäre, das ist, wenn LM mit HI zusammengienge, so wäre die Geschwindigkeit $u = \frac{mv}{h}$ (445). Man integrire also hudu so daß das Integral für $u = \frac{mv}{h}$ verschwindet, so giebt das Integral mit 2g dividirt, die bewegende Kraft in HI; von der die bewegenden Kräfte aller Schichten von H bis L, herrühren können.

Nun ist $\int hudu = Const + = \frac{hu^2}{2}$ und

$o = Const + \frac{hm^2v^2}{2h^2}$ also $Const = -\frac{m^2v^2}{2h}$

und $\int hudu = \frac{h^2u^2 - m^2v^2}{2h}$.

Hierinn setze man $u = v$, und dividire mit $2g$, so hat man $\frac{h^2 - m^2}{4g.h} . v^2$ für die bewegende Kraft in HI, von der die bewegenden Kräfte aller Schichten von H bis G herrühren können.

450. Wie bey 443 erinnere ich hier, daß nicht etwa die Summe der bewegenden Kräfte der Schichten gesucht wird. Weil nähmlich $u = \frac{mv}{y}$ (445) so wäre, da v unveränderlich und nur

nur y veränderlich ist, $udu = -\frac{m^2v^2}{y^3}dy$ und $uydu = -\frac{m^2v^2}{y^2}dy$ davon das Integral $= +\frac{m^2v^2}{y} +$ Const, und weil es für $y = h$ verschwinden soll, Const $= \frac{m^2v^2}{h}$ also das Integral $= \frac{m^2v^2.(h-y)}{hy}$ und für die Summe der bewegenden Kräfte von HI bis GD; $\frac{1}{2g}\frac{m^2v^2.(h-m)}{hm} = \frac{mv^2(h-m)}{2gh}$, welche aber das nicht ist, was hier gesucht wird. Man sucht nähmlich hier die bewegende Kraft in HI, von welcher diese bewegenden Kräfte zusammen herrühren können.

451. Wenn also die Schicht HI, von einer bewegenden Kraft $p = \frac{h^2-m^2}{4gh}v^2$ getrieben wird, sonst keine Kraft in das Wasser von HI bis GD wirkt, so fliesst es bey GD mit der Geschwindigkeit v heraus.

Es wird nicht undienlich seyn, dieses mit einer Art von Exempel zu erläutern. Man setze, die Oberfläche des Gefässes sey viermahl so groß als die untere oder $h = 4m$, ferner die Geschwindigkeit,

digkeit, mit der das Wasser ausfliesst, dreymahl so groß als die, welche sich durch den Fall in einer Secunde erhalten lässt, oder $v = 6g$ so ist $p = \frac{15.m.36.g}{4.4} = \frac{15.9}{4}.m.g$; Nun bedeutet m eine Fläche, die sich etwa in Quadratfussen angeben liesse, und g ist auch in Fussen gegeben. Also zeigt der Ausdruck für p eine gewisse Menge von Cubikfussen an.

Die bewegende Kraft jeder Schicht fand man so, daß man die Masse dieser Schicht durch ydx ausdruckte (447). Also bedeutet dieser Ausdruck ydx, und so jeder andre Ausdruck eines Raums in diesen Formeln, daß dieser Raum mit Wasser gefüllt ist; Und folglich ist p das Gewiwt einer Menge Wasser, die im Exempel den Raum $\frac{15.9}{4}.m.g$ oder überhaupt den Raum $\frac{h^2 - m^2}{4gh} v^2$ ausfüllt.

452. Die Länge HG, und die Gestalt des Gefässes kommen in dieser Formel nicht vor, nur die Flächen bey HI und GD; nebst der Geschwindigkeit bey GD. Wenn also diese drey Dinge ungeändert bleiben, so bleibt p (451) einerley, was auch das Gefäß für eine Gestalt hat, und wie lang oder wie kurz es auch ist. Und eine gegebene Kraft p, bringt immer einerley v hervor, wenn h und m ungeändert bleiben, wie sich auch Länge und Gestalt des Gefässes ändern.

453.

453. Es kömmt nähmlich eigentlich darauf an, die Geschwindigkeit, die das Wasser in der Schicht HI hat, so zu ändern, wie in der Schicht GD erfodert wird, daß das Wasser nach (445) fortfliessen kann. Zu dieser Aenderung wird eigentlich p angewandt. Ob nun eine solche Aenderung von HI bis GD durch mehr oder weniger Schichten, durch Schichten von der oder jener Gestalt vor sich gehet, das ist hier gleichgültig.

454. Ich sehe also auch nichts ungereimtes darinnen, wenn eine solche Aenderung plötzlich geschähe, wenn GD die nächste Schicht an HI, und zwischen beyden keine dritte wäre, eben wie ich Höh. Mech. 3. Abschn. 192 §. plötzliche Veränderungen der Geschwindigkeit nicht für ungereimt erkannt habe. Nach eben demjenigen aber, was ich daf. 193 u. f. §. vorgetragen habe, würde ich mich allemahl für berechtiget halten, auch bey einer solchen plötzlichen Veränderung der Geschwindigkeit, die Gleichung (451) anzunehmen. Ich würde nähmlich nach (453) bedenken, daß zu Veränderung der Geschwindigkeit Kraft gehöre, und daß diese Kraft vermöge (452) einerley bleibt, die Veränderung mag durch viel oder wenig Stufen durchgehen, und die Stufen mögen sonst wie sie wollen beschaffen seyn. Wären also gar keine Stufen, so würde ich doch den Ausdruck (451) noch annehmen können, weil sich die Menge und die Beschaffenheit der Stufen in ihm gar nicht zeigen. Ich würde die Schlüsse, welche mich auf diesen Ausdruck geführt haben, blos als ein

Mit-

Mittel ansehen, wie ich mir eine solche Veränderung vorstellen könnte, die Folge aus ihnen würde eben dieselbe bleiben, wenn auch die Veränderung auf eine andere Weise geschehen wäre, als ich mir vorstelle. So kann man sich vorstellen, eine gewisse Geschwindigkeit, werde durch den Fall von einer gewissen Höhe erlangt, (Höh. Mech. I. Abschn. 43). Alles was sich von dieser Geschwindigkeit sagen läßt, bleibt einerley, sie mag in der That durch einen solchen Fall, oder auf andere Art entstanden seyn.

So findet sich (Höh Mech. I. Abschn. 174) die Stelle eines geworfenen Körpers zu jeder gegebenen Zeit, so, daß man sich einbildet, er sey diese Zeit über in dem Wege, nach dem er anfangs geworfen ward, gerade fortgegangen, und von dem Puncte, an welchen er solchergestalt gelangt wäre, eine nächstfolgende gleiche Zeit, lothrecht herabgefallen; der geworfene Körper bewegt sich nicht wirklich so, aber die Schlüsse aus dieser Vorstellung, geben seine Bewegung der Wahrheit völlig gemäß, und ohne diese Vorstellung ist es viel schwerer, diese Bewegung anzugeben, so daß dazu die Höh. Mech. I. Abschn. 173 gebrauchten Kunstgriffe erfodert werden.

Eben so betrachte ich gegenwärtige Vorstellung des Gefässes; als ein Mittel leichter zu berechnen, was geschehen muß, wenn sich die Geschwindigkeit u in v verändern soll. Verändert sich die Geschwindigkeit ohne ein solches Gefäß, so bleibt die Formel (451) doch eben so richtig,

wie

wie der Weg eines geworfenen Körpers richtig aus einer Vorausſetzung beſtimmt wird, die in der Natur nicht wirklich ſtatt findet.

455. Aufg. AEIKG 46 Fig. ſey der Durchſchnitt eines ſenkrechten viereckichten Priſma, mit einer verticalen Ebene, die auf zwo der Seitenwände des Priſma ſenkrecht ſteht, mit den beyden übrigen alſo paralel iſt. Jeder Querſchnitt des Priſma ſey = h in der Bedeutung (442), und eben ſo ſey m eine Oeffnung, die es bey GD im Boden hat. Dieſes Priſma wird anfangs bey verſchloſſner Oeffnung mit ſchwerem Waſſer gefüllt, und nun macht man die Oeffnung auf, daß das Waſſer daſelbſt herauszufliеſſen anfängt. Des abgehenden Stelle wird oben bey AE beſtändig dergeſtalt erſetzt, wie man ſich die Erſetzung in (444) vorſtellte. Man fragt, wie ſich die Geſchwindigkeiten des Waſſers: im Priſma, und beym Ausfluſſe, nach und nach ändern.

Aufl. I. Innerhalb der Zeit t, ſey die Waſſerſchicht, die im Anfange, als alles ruhig war, ſich zu oberſt bey AE befand, in PQ geſunken. Ihre Dicke ſey Pp, und alſo ihr Inuhalt h. Pp. In dem nächſten Elemente der Zeit dt ſinke dieſe Schicht ſoviel tiefer, als ihre Dicke austrägt, ſo muß ihr unten eben ſoviel Waſſer Platz machen, und alſo durch GD ein Waſſerpriſma hinaus gehen, deſſen Grundfläche m, die Länge $\frac{h.Pp}{m}$ iſt. Heiſſt alſo v die Geſchwindigkeit, mit der ſich

das Wasser im Ausflusse bewegt, so verhält sich solche zu der Geschwindigkeit, mit welcher die Schicht Pq sinkt $= \frac{h.Pp}{m}$: Pp und dieser Schicht Geschwindigkeit ist also $= \frac{mv}{h}$.

II. Weil man PZ, wo man will, im Prisma annehmen kann, und doch in einem einzigen angenommenen Elemente der Zeit dt, das ausfliessende nur eine einzige bestimmte Geschwindigkeit haben kann, so ist $\frac{mv}{h}$ die Geschwindigkeit jeder Schicht im Prisma, also sinkt dieses dt über eine Schicht so geschwind als die andere.

III. Den Uebergang aber von der Geschwindigkeit $\frac{mv}{h}$ in v vorzustellen, nehme man an, es entstehe in einer sehr geringen Höhe über dem Boden, GH ein Strudel (*) HIDG, der sich nach

(*) Joh. Bernoulli nennt es gurges. Vielleicht hätte manchem Wirbel besser geklungen. Mich deucht aber, dabey denkt man eigentlich eine Kreisförmige Bewegung des Wassers, die wird hier eigentlich nicht angenommen, obgleich das Wasser auch seine Richtung ändert, vielmehr erfolgt der Ausfluß nicht wie er erfolgen sollte, wenn ein Wirbel entsteht (183. II.). Wo Wasser durch einen engen Raum schneller fliesst, das kann man, deucht mich, eigentlich einen Strudel nennen. Die Donau hat einen Wirbel, und einen Strudel. Von dem letzten vermuthet

nach und nach von der obern Weite HI = h bis an die untere GD = m verengert; das Wasser geht also in ihm immer nach dem Maasse geschwinder, je enger er wird, und so verändert sich die Geschwindigkeit, die es durchaus im ganzen Prisma, also auch in HI hatte, nach und nach in die v, die es in GD haben soll.

III. In dem Raume IDK kann man sich vorstellen, daß Wasser unbeweglich stehen bleibt, indem das benachbarte durch HIDG fliesst, dieses durchfliessende würde vermöge des Drucks des stillstehenden, in seiner Figur erhalten, ohngefähr wie ich so etwas (329; II.) vorgetragen habe. Mengte sich nach und nach aus dem Raume IDK Wasser ohne merkliche Geschwindigkeit unter das durchfliessende, so käme in diesen Raum wieder andres von oben herunter

IV. Solchergestalt könnte man sich in der 46. Fig. vorstellen, als wäre das eigentliche Prisma AEIH; und daran befände sich ein Gefäß HIDG, darin das Wasser bey HI mit der Geschwindigkeit $\frac{mv}{h}$ träte, bey GD aber mit v ausflösse.

V. Vermöge (452) ist man berechtiget, das Gefäß oder den Strudel HIDG, unendlich klein anzu-

muthet Popowitsch, er könnte sicher gemacht werden, wenn man durch Herausprengung einiger Klippen, den Gang der gewöhnlichen Durchfahrt erweiterte. Untersuchungen vom Meere 211. Seite.

anzunehmen. Hiedurch gewinnt man soviel, daß man das Gewicht des Wassers, indem es durch diesen Raum fliesst, nicht mit zu betrachten nöthig hat, und sich also vorstellen kann, in diesem Raume befinde sich immer Wasser, das nicht schwer ist.

VI. Die Geschwindigkeit also, mit welcher das Wasser in diesen Strudel tritt, in die Geschwindigkeit v, mit der es ausfliessen soll, zu ändern, ist eine gewisse bewegende Kraft $= \frac{(h^2 - m^2)\ v^2}{4gh}$ nöthig (491). Diese will ich die bewegende Kraft durch den Strudel nennen.

VII. Bleibt v ungeändert, so ist, den Ausfluß des Wassers mit dieser Geschwindigkeit zu unterhalten, keine andere bewegende Kraft als diese nöthig, und man könnte sich die Sache alsdenn etwa so einbilden. Diese bewegende Kraft läßt sich durch ein gewisses Gewicht angeben (451). Man setze, das Wasser im ganzen Raume von AE bis GD sey nicht schwer, bey AE aber befinde sich eine ebene Fläche mit dem angezeigten Gewichte beladen. Dieses Gewicht pflanzt seinen Druck durch das Wasser fort, und verursacht, daß das Wasser bey GD mit der Geschwindigkeit v herausläuft.

VIII. Befände sich über HI kein Wasser, sondern HI wäre eine feste Ebene, mit diesem Gewichte beladen, so würde durch den Druck dieses Gewichts auf das Wasser in HIDG eben die Geschwin-

schwindigkeit bey v entstehen, wenn man annähme, das Wasser in HIDG sey nicht schwer (451).

IX. Befindet sich aber über HI dieses Gewichte nicht, sondern HI ist nur die Oberfläche des Wassers in HIDG, und über HI ist das Prisma voll schweres Wasser bis AE; so ist offenbar, daß auf das Wasser in HI keine andere bewegende Kraft wirken kann, als dieses über HI befindliche schwere Wasser.

X. Stünde sowohl dieses Wasser, als das in HI still, so wäre gleich offenbar, daß die Wirkung des Wassers von HI bis AE, auf das in HI; ein Druck ist, so stark als ihn eine Wassersäule ausüben kann, deren Grundfläche h, die Höhe AH ist. Das Gewicht dieser Wassersäule würde alsdenn diese Wirkung angeben.

XI. Jetzo nun bewegt sich das Wasser in HI mit der Geschwindigkeit $\frac{inv}{h}$; Jede Schicht des Wassers über HI aber hat eben diese Geschwindigkeit (II), das Wasser in HI ist also als eine Ebene anzusehen, die sinkt, und auf sich eine Last liegen hat, die mit ihr auch so geschwind als sie, sinkt. Diese Ebene leidet von der Last völlig den Druck, den sie leiden würde, wenn sie stehen bliebe, und die Last auf sich liegen hätte. Der Druck der Last auf die Ebene bleibt nähmlich einerley, wenn man beyden zugleich einerley Geschwindigkeit giebt.

XII. Also wird man auch jetzo annehmen dürfen,

sen, was in (X) für das Stillstehen angenommen ward Nun sey $a = GA = HA$ (V.), so wäre aus (VI.) $ah = \frac{(h^2 - m^2)\, v^2}{4gh}$, für die Voraussetzung daß v ungeändert bliebe. Man sieht leicht, wie sich auf diese Art v durch gegebene Grössen finden lässt.

XIII. Weil man aber wenigstens gleich im Anfange sich wohl nicht für berechtiget halten darf, diese Voraussetzung anzunehmen, so untersuche man ferner, was erfodert wird, damit sich v in der Zeit dt um dv ändert.

XIV. Da ändert sich die Geschwindigkeit jeder Schicht Pq, um $\frac{mdv}{h}$ (II.). Aenderung der Geschwindigkeit, setzt eine beschleunigende Kraft zum voraus, diese beschleunigende Kraft ist, was in (Höh. Mech. 1 Abschn. 72) f genannt worden, ferner sind

dorten	u	T	C	g
hier	$\frac{mv}{h}$	1 Sec	2g	1

also wird die beschleunigende Kraft hier $\frac{mdv}{2ghdt}$; diese Kraft muß in jedes Theilchen des Elements Pq wirken (wie 447.).

XV. Diese beschleunigende Kraft muß in jedes Wassertheilchen von AE bis HI wirken, weil überall einerley Veränderung der Geschwindigkeit ent-

entsteht. Mit der Wassermenge, in deren jedes Theilchen sie wirkt, multiplicirt, giebt sie also eine bewegende Kraft $\frac{mahdv}{2ghdt} = \frac{madv}{2gdt}$ die in der ganzen Wassermenge befindlich seyn muß, damit sich in der Zeit dt die Geschwindigkei $\frac{mv}{h}$ um $\frac{mdv}{h}$ verändern kann.

XVI. Wäre das Wasser nicht schwer, und es sollte durch die in XIV. angezeigte Aenderung der Geschwindigkeit vorgehen, so müsste zu dieser Absicht (wie in VII.) auf eine Ebene bey AE ein Gewicht gelegt werden, so schwer als die Wassermenge, die den Raum $\frac{madv}{2gdt}$ ausfüllt. Daß dieser Raum ein körperlicher Raum in geometrischem Verstande ist, erhellt daraus, weil m eine Fläche bedeutet, a, v, g, folglich auch dv, Linien sind, t aber eine Zahl von Secunden, daher dt auch das Differential einer Zahl ist, und der gegebene Ausdruck also eine Grösse von drey Abmessungen zeigt.

XVII. Jetzo aber, da das Wasser schwer ist, und kein Gewicht auf AE liegt, kann diese bewegende Kraft von nichts anders herrühren, als selbst von dem Gewichte des Wassers, das sich im Prisma befindet; Dieses Gewicht muß also jetzt zugleich zweyerley Veränderungen hervorbringen, und machen, daß sich während der Zeit dt

über die Geschwindigkeit $\frac{mv}{h}$ um $\frac{mdv}{h}$ ändert, und daß sich die Geschwindigkeit, die im Prisma $\frac{mv}{h}$ ist, beym Ausflusse in v ändert.

XVIII. Man wird also folgendes annehmen dürfen: die bewegende Kraft durch den Strudel (VI), und die bewegende Kraft zu Aenderung der Geschwindigkeit im Prisma (XV) machen zusammen das Gewicht des Wassers zwischen HI und AE.

456 Dieses giebt in den bisher gebrauchten Zeichen folgende Gleichung

$$\frac{h^2 - m^2}{4gh} \cdot v^2 + \frac{madv}{2gdt} = ah \text{ (*)}.$$

457. Betrachtete man in dieser Gleichung das zweyte Glied auf der linken Seite nicht, so erhielte man das, was 455; XIII. gefunden ward, und bekäme $v^2 = 4ga \cdot \frac{h^2}{h^2 - m^2}$.

458. Die Höhe, welche der Geschwindigkeit v gehört, heisse z, so ist $z = \frac{v^2}{4g}$ (152).

459.

(*) Joh. B. druckt die beschleunigende Kraft der Schwere durch g aus. Daher dieses Gewicht bey ihm g. a. h. heisst. Ich erinnere dieses um Mißverstand zu vermeiden, wenn man sein Werk mit gegenwärtigem vergleichen will. Diese Vergleichung zu erleichtern, bediene ich mich sonst, soviel sich thun lässt, seiner Zeichen.

459. Also wird aus (457) $z = a. \frac{h^2}{h^2 - m^2}$ für die Höhe, welche der Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers zugehört, wenn diese Geschwindigkeit ungeändert bleibt.

460. Diese Geschwindigkeit, wird also nicht allein durch die Wasserhöhe a, sondern zugleich durch die Verhältniß der Oeffnung bey GD; zur Weite des Gefässes bey HI bestimmt.

Gesetzt, diese Weite wäre zehumahl so groß, als die Oeffnung, oder $h = 10m$, so wäre $z = a. \frac{100}{99}$.

461. Eigentlich also ist die Höhe der Geschwindigkeit allemahl etwas grösser als die Wasserhöhe, wenn aber die Oeffnung in Vergleichung mit der Weite nicht gar zu groß ist, kommen beyde Höhen einander sehr nahe, wie schon im nur angeführten Exempel.

462. In den Schlüssen 456; war ein Gefäß von einer bestimmten Figur angenommen. Man sieht leicht, daß sich eben dergleichen Schlüsse für ein Prisma von anderer Gestalt, für einen Cylinder machen liessen, nur daß diese Gefässe alle prismatisch und senkrecht wären, weil man alle Querschnitte des Gefässes gleich groß angenommen hat. Man müsste nur alsdenn die Gestalt des Strudels anders bestimmen. Hätte z. E. ein Cylinder mitten im Boden eine Oeffnung, deren Halbmesser $= e$ wäre, so könnte man in der 45. Fig. annehmen, HG wäre ein Theil der Axe

des Cylinders GD = e, HI der Halbmesser des Cylinders, und wenn sich die Figur HIDG um die Axe HG drehte, entstünde ein rundes Gefäß, von dem (451) gelten würde. Dieses Gefäß nun gehörig in den Cylinder gesetzt, wie bey der 46. Fig. HIDG an das dasige Prisma gefügt ist, würde da den Strudel vorstellen, und alle Schlüsse in 455 würden nun eben so bleiben.

Befände sich auch die Oeffnung nicht in der Mitte des Bodens, so könnte man sich doch allemahl einen geometrischen Körper vorstellen, dessen untere Grundfläche die Oeffnung, die obere ein Querschnitt des Cylinders oder das Prisma wäre, an den Seiten herunter begränzten ihn eine oder mehr krumme Flächen, deren Durchschnitt mit einer Verticalfläche eine krumme Linie nach aussen zu hohl, wie IMD 45 Fig. wäre. Ein solcher Körper könnte allemahl die Gestalt des Wirbels vorstellen, da es bey der Kraft durch den Wirbel (456; VI.) nur auf seine beyden Grundflächen ankömmt (452).

463. So wird sich also zeigen, daß die Gleichung (456) für eine Oeffnung im Boden eines jeden senkrechten Prisma gilt.

464. Wenn also die Oeffnung in Vergleichung mit dem Boden ziemlich klein ist, so enthält (461) den theoretischen Beweis von (165) für Oeffnungen im Boden.

465. Wäre die Oeffnung dem Querschnitte des Prisma gleich, also h = m, so fiele in (456) das

das erste Glied linker Hand weg, und man hätte $dv = 2gd$ also $v = 2gt$ und (458) $z = gt^2$. Die Geschwindigkeit ändert sich also hier, wie sich die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers ändert (Hdh. Mech. I. Abschn. 34; 35), und wächst beständig mit der Zeit, so daß sie in einer unendlichen Zeit unendlich wird.

Man stelle sich vor, das Prisma AK habe bey GK einen Boden, und werde nun mit Wasser angefüllt, denn nehme man den Boden plötzlich weg, so fängt die ganze Wassersäule AK auf einmahl zu fallen an, wie ein schwerer Körper fallen würde, der eben den Raum ausfüllte. Tritt also oben kein Wasser mehr hinein, so wird die Wasserschicht, die anfangs bey AE war, mit einer beschleunigten Bewegung in der Zeit in GK gekommen seyn, die ein schwerer Körper braucht, durch AG zu fallen, und alsdenn wäre das Prisma leer. Soll es aber beständig voll erhalten werden, so muß immer bey AE Wasser mit der Geschwindigkeit hineintreten, mit welcher das im Prisma befindliche hinabsinkt, und weil das letztere immer schneller sinkt, so muß das erste immer schneller hineintreten, und fängt also im Prisma nicht aus der Ruhe, sondern schon mit einer gewissen Geschwindigkeit zu sinken an, (wie Hdh Mech. I. Abschn. 81.). Diese Geschwindigkeit, mit der das oben hineintretende Wasser zu sinken anfängt, wird ohne Ende grösser und grösser, wie das unten herausfallende ohne Ende immer schneller und schneller fällt, so wird begreif-

gelassen, wird $\left(\frac{\alpha + \varkappa v}{\alpha - \varkappa v}\right)^{\frac{1}{2\alpha\varkappa}} = e^{\frac{t}{2m\alpha}}$

also $\frac{\alpha + \varkappa v}{\alpha - \varkappa v} = e^{\frac{\alpha\varkappa t}{am}}$. Diese Potenz von e will ich E nennen, so ist $\alpha + \varkappa v = E\alpha - E.\varkappa v$.

Daraus erhält man $v = \frac{\alpha.(E-1)}{\varkappa.(E+1)}$ wo auf der rechten Seite alles durch gegebene Grössen und t gegeben ist.

468. Weil $\frac{\alpha}{\varkappa} = 2\sqrt{\frac{gah^2}{h^2 - m^2}}$ so wird aus (458) $z = a.\frac{h^2}{h^2 - m^2}.\left(\frac{E-1}{E+1}\right)^2$.

469. Weil E durch die veränderliche Grösse t gegeben ist, so ist z veränderlich. Das Differential von $\frac{E-1}{E+1}$ ist $= 2dE$ (An. Un. 26) $= \frac{2\alpha\varkappa dt}{am}.E$ (An. Un. 241) bejaht, also wächst z beständig, wie sich auch ohne Differentialrechnung daraus herleiten lässt, daß $\frac{E-1}{E+1} = \frac{1 - \frac{1}{E}}{1 + \frac{1}{E}}$ wo E mit t zugleich wächst, wie dar-

aus

aus offenbahr ist, weil e=2,718... (An. Un. 232) also eine Potenz von e von einem höhern Grade grösser ist, da nun alsdenn $\frac{1}{E}$ abnimmt, so nimmt der Nenner ab, und der Zähler wächst.

Man kann also dem Wachsthume von z keine andere Gränze sezzen, als $t = \infty$; diese Voraussezzung für t giebt eine Gränze, der sich z beständig nähert, sie aber nie erreicht. Weil nun alsdenn E unendlich wird, so ist diese Gränze $z = a$.

$\frac{h^2}{h^2 - m^2}$ das kann man also für den grösten Werth von z annehmen, den es eigentlich nie erreicht.

470. Weil $\frac{\alpha x}{ma} = 2\sqrt{\frac{g.(h^2 - m^2)}{am^2}}$ so kann dieses leicht sehr groß seyn, wenn m etwas klein in Vergleichung mit h, und a nur nicht sehr groß in Vergleichung mit g ist. In diesem Falle wird der Exponent eine sehr grosse Zahl, auch selbst, wenn t ein Bruch z. E. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ist, das ist, einen solchen Theil einer Secunde bedeutet. Folglich wird E in diesem Falle auch für ein ziemlich kleines t, eine sehr grosse Zahl, so daß $\frac{E-1}{E+1}$ ohne merklichen Irrthum = 1 kann angenommen werden, und daher erreicht z in einer sehr kurzen Zeit vom Anfange des Ausflusses einen Werth, der seiner Gränze (469) sehr nahe kömmt, so

wird

wird, innerhalb eine fast unmerklichen Zeit, die Geschwindigkeit schon können für beständig angenommen werden, wie die Erfahrung bey verticalen Oeffnungen lehrt (91).

Exempel. $h = 9m$, welches statt fände, wenn h und m Kreise wären, da der erste den dreyfachen Durchmesser des letzten hätte. Ferner sey $a = g$ oder das Gefäß so hoch, als der Fall in einer Secunde $= 15,625$ Fuß. So ist $\frac{\alpha \varkappa}{ma} =$

$2\sqrt{\frac{h^2 - m^2}{m^2}} = 2\sqrt{80}$. Man setze $t = \frac{1}{2}$,

so ist $\frac{\alpha \varkappa t}{am} = \sqrt{80} = 8,9442$ also $E = e^{8,9442}$.

Dieses zu berechnen, nehme ich aus den gewöhnlichen Tafeln den Logarithmen von

$2,718 = 0,4342494$

mult. mit $8,944$

$3,4739972$
3908244
173689
17368

$3,88380$

Giebt E etwa 7652, also $\frac{E-1}{E+1} = \frac{7651}{7653} =$

$0,99$. Daher $z = a.\frac{81}{80}.0,99^2 = a\frac{81}{80}.0,98.a$

Dieses zeigt, wie nahe schon in einer halben Secunde, bey einer so grossen Oeffnung, als nicht

leicht

leicht gebraucht wird, z seinem grösten Werthe kömmt.

Weil auch $\frac{8}{8}\frac{1}{0}$. 0,98 = 0,99 so erhellt, daß auch schon hier beynahe z = a. (464).

471. Bernoulli ist nicht darauf verfallen, die Vergleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit zu suchen, sondern er sucht eine Gleichung zwischen v oder z, und der Länge des Wasserprisma, das in der Zeit t ausgelaufen ist. Das Differential dieser Länge dx, ist $= \frac{h.Pp}{m}$ (455. I.). In dem, was er herausbringt, setzt er x unendlich, und findet so die Gränze, der z sich nähert. Ich habe sein Verfahren bey einer allgemeinern Aufgabe unten (637) beybehalten.

Hieraus ist nicht so leicht und deutlich zu übersehen, ob die Geschwindigkeit sich ihrer Gränze in sehr kurzer Zeit nähert; In der That hat auch B. dieses für keinen andern Fall dargethan, als für den hier betrachteten, und noch dazu nur für eine sehr kleine Oeffnung. Erst an Ende seiner Hydraulik; P. II, art. 28. handelt er davon, wie kurz die Zeit sey, in welcher die Geschwindigkeit beynahe gleichförmig werde. Dieses folgt nach der allgemeinen Aufgabe, die ich unten von (558 ... 649) abgehandelt habe, aber es wird sogleich auf die jezt angezeigte Art eingeschränkt. B. setzt in seinem Exempel h = 100 m, a = 4 Fuß, t = 0, 1 einer Secunde. Dieses giebt (470) m^2 in

Vergleichung mit h^2 weggelassen $\frac{\alpha\kappa}{ma} = 100\sqrt{g}$

Folglich $E = e^{10\sqrt{g}}$. Da $e > 2$ und g beynahe $= 16$; so kann man gewiß $E = 2^{40}$ annehmen, wo sogleich erhellt, daß ohne einigen merklichen Irrthum, $\frac{E-1}{E+1} = 1$ und $z = a$.

Ueber den Strudel.

472. Men begreift, daß die Vorstellung des Strudels, von der Grösse und Gestalt völlig unbestimmt bleiben (454 und 455. II.) nur dazu dient die Aufmerksamkeit auf eine gewisse Kraft zu ziehen, vermöge der die Geschwindigkeit im Gefässe in die Geschwindigkeit in der Oeffnung übergeht. Wo man sich also auch nicht bequem einbilden könnte, wie der Strudel beschaffen seyn müsste, da würde man doch annehmen dürfen, es sey eine bewegende Kraft $\frac{h^2 - m^2}{4gh} v^2$ nöthig, die Geschwindigkeit $\frac{mv}{h}$ in v zu verwandeln. Denn eigentlich gründet sich nichts darauf, daß ein Strudel entsteht, sondern daß Kraft erfodert wird, Geschwindigkeit zu ändern. Ich habe dergleichen Gedanken von Bernoullis Strudel schon in einer 1750 herausgegebenen Schrift geäussert (*). Der Strudel dient blos, dieses sinnlich

(*) De lege continui in natura Lipsiae 1750. §. 11.

lich zu machen, ohngefähr, wie die hohle Kugel des Himmels dient die tägliche Bewegung sinnlich zu machen. Wirklich eine hohle Himmelskugel annehmen, wäre eine Erdichtung; so ist der Strudel vielleicht auch eine: Aber sagen, daß die tägliche Bewegung uns so vorkömmt, als wenn sich eine hohle Kugel um uns drehte, das ist die strengste Wahrheit: Und eben so wahr ist es, daß beym Ausflusse des Wassers eine solche Kraft muß angewandt werden, als wenn ein Strudel entstehen sollte. Könnte man diese Kraft durch den Strudel, nicht: die bewegende Kraft zum Uebergange heissen, und dabey an den Uebergang aus der einen Geschwindigkeit in die andere denken?

Ausfluß durch ein Gefäß mit einer Röhre.

473. Das bisher betrachtete Gefäß, habe an seiner Oeffnung eine Röhre GC 47 F. durchaus von der Weite m. Die Röhre mache mit dem Horizonte den Winkel GBO = β, ihre Länge sey GB = b; also das Loth GO = b sin β. Uebrigens heisst noch h des Gefässes Querschnitt, a seine Höhe.

Röhre und Gefäß werden mit Wasser gefüllt, da die Röhre bey C verschlossen ist, man öffnet sie, und läßt das Wasser da auslaufen. Seine

Geschwindigkeit daselbst soll v heissen, und der Höhe $z = \frac{v^2}{4g}$ gehören.

474. Wenn das Wasser schwer ist, so hat es, entweder in GD nicht die Geschwindigkeit, mit der es bey BC ausfliesst, und wird auf dem Wege durch die Röhre von der Schwere, wie ein fallender Körper, beschleuniget, oder die Wirkungen der Wasserschichten in einander, ändern diese Beschleunigung, und machen die Bewegung durch die ganze Röhre gleichförmiger. Diese Wirkungen der Schwere und der Wasserschichten, müsste man eigentlich untersuchen.

475. Lässt sich aber eine Art erdenken, wie man Bewegung, die das Wasser in der Röhre wirklich als eine schwere Masse hat, in ihm, als in einer blos trägen Masse hervorbringen könnte; lässt sich auf diese Art, die Wirkung der Schwere, so zu reden, aus dem Wasser wegnehmen, und eben das, was sie thut, wenigstens was aus ihr beym Ausflusse in BC, erfolgt, auf eine andere Art bewerkstelligen, so könnte man die Geschwindigkeit des Wassers durch die ganze Röhre gleich groß annehmen, und sich vorstellen, die Geschwindigkeit des Wassers im Gefässe, verwandelte sich gleich, wo es in die Röhre tritt, in v, und mit dieser. ungeänderten Geschwindigkeit, gienge es znr Röhre hinaus.

476. Zugleich, wenn man annimmt, das Wasser habe in der Röhre überall die Geschwindig-

digkeit v, folgt auch, es habe im Gefäſſe überall die $\frac{mv}{h}$ (wie in 455 II.) und die Kraft zum Uebergange aus einer Geſchwindigkeit in die andere (472) iſt $\frac{h^2 - m^2}{4gh} v^2$ (455; VI.).

477. Man ſetze, dieſe Geſchwindigkeit beym Ausfluſſe, bleibe ungeändert (wie in 455 XIII.).

478. I. Wollte man das Waſſer in der Röhre blos als träg anſehen, ſo könnte das, was jetzo die Schwere in dieſem Waſſer thut, folgendergeſtalt ausgerichtet werden:

II. Eine Kraft = GO.m, die bey BC parallel mit GB, gegen die Röhre zu druckte, erhielte das ſchwere Waſſer in der Röhre, wenn es keine Bewegung hätte; (Hydroſt. 27.) Wollte man alſo machen, daß blos träges Waſſer, mit eben der Gewalt längſt der Röhre hinabzugehen ſtrebte, mit der ſchweres Waſſer in ihr hinabzugehen ſtrebt, ſo dürfte man ſich nur oben bey GD einen Kolben vorſtellen, der mit der Gewalt GO. m in die Röhre getrieben würde.

III. Dieſer Kolben verträte die Stelle der reſpectiven Schwere des Waſſers (Stat. 102.).

IV. Das bisherige ſetzt voraus, auf das Waſſer in der Röhre wirke keine andere Kraft, als die Schwere, die in dieſes Waſſer wirkt, oder die ihr gleichgültige Kraft des Kolbens. Es müſſte alſo oben im Gefäſſe kein Waſſer, oder

welches eben das ist, das Wasser im Gefässe müsste nicht schwer, nur träg seyn.

V. Nimmt man das letztere an, so könnte man sich statt des Kolbens bey GD einen anderen über der Oberfläche des Wassers im Gefässe, bey AE vorstellen; der da in das Gefäß hinein getrieben würde, seinen Druck durch das blos träge Wasser des Gefässes fortpflanzte, und dadurch die Oberfläche GD eben so stark druckte, als der vorige Kolben

VI. Die bewegende Kraft, welche diesen Kolben im Gefässe triebe, müsste die bewegende Kraft des Wassers in der Röhre, ins Gefäß übergetragen seyn (wie in 440). Man stelle sich nähmlich zwo gleich dicke Schichten träges Wasser vor, eine im Gefässe bey AE, die andere in der Röhre, bey GD. die letzte werde von der bewegenden Kraft GO. m gegen das Gefäß zu, die erste, von der bewegenden Kraft $\frac{h}{m}$. m. GO = h. GO gegen die Röhre zu, getrieben; der Druck pflanzte sich von einer zur andern, durch das blos träge Wasser im Gefässe fort, so erhält jede die andere; und also ist es für das blos träge Wasser in der Röhre einerley, ob es unmittelbar von der Kraft m. GO bey GD längst der Röhre hin, oder von der Kraft h. GO bey AE vermittelst des blos trägen Wassers im Gefässe gedruckt wird.

VII. Und wie es einerley ist, wenn sich das Wasser nicht bewegt, ob die Kraft m. GO bey GD

auf

auf träges Wasser druckt, oder ob das Wasser in der Röhre schwer ist, so ist es auch unter dieser Voraussetzung einerley, ob die Kraft h. GO bey AE auf blos träges Wasser druckt, oder ob das Wasser in der Röhre schwer ist.

VIII. Es ist auch, wenn das Wasser durchaus ruht für das Wasser bey GD einerley, ob auf die Oberfläche AE eine Kraft = ha druckt, oder ob es durch das ganze Gefäß schwer ist.

IX. Man stelle sich nun vor, ruhendes träges Wasser im Gefässe und in der Röhre, habe auf seiner Oberfläche AE einen Kolben, mit einem Gewichte h. a + h. GO beladen, so pflanzt dieses Gewicht durch das Wasser des Gefässes, auf die Fläche GD einen Druck fort, der

h. (a + GO). $\frac{m}{h}$ m. (a + GO) ist, oder ein paar

gleich dicke Wasserschichten, eine bey AE von h. (a + GO) gegen die Röhre, die andere von m. (a + GO) bey GD gegen das Gefäß getrieben, erhielten einander (440). Das träge Wasser in der Röhre wird also von einer Kraft m. (a + GO) längst der Röhre hingetrieben, so daß eine gleiche Kraft an BC gegen die Röhre zu, angebracht, solches erhielte.

Ist aber das Wasser durchaus schwer, so druckt auf GD eine Wassersäule ma folglich auf BC eine Wassersäule m. (a + GO).

BC leidet also einerley Druck, es mag das Wasser durchaus schwer seyn, oder es mag blos trä-

des Cylinders GD = e, HI der Halbmesser des Cylinders, und wenn sich die Figur HIDG um die Axe HG drehte, entstünde ein rundes Gefäß, von dem (451) gelten würde. Dieses Gefäß nun gehörig in den Cylinder gesetzt, wie bey der 46. Fig. HIDG an das dasige Prisma gefügt ist, würde da den Strudel vorstellen, und alle Schlüsse in 455 würden nun eben so bleiben.

Befände sich auch die Oeffnung nicht in der Mitte des Bodens, so könnte man sich doch allemahl einen geometrischen Körper vorstellen, dessen untere Grundfläche die Oeffnung, die obere ein Querschnitt des Cylinders oder das Prisma wäre, an den Seiten herunter begränzten ihn eine oder mehr krumme Flächen, deren Durchschnitt mit einer Verticalfläche eine krumme Linie nach aussen zu hohl, wie IMD 45 Fig. wäre. Ein solcher Körper könnte allemahl die Gestalt des Wirbels vorstellen, da es bey der Kraft durch den Wirbel (456; VI.) nur auf seine beyden Grundflächen ankömmt (452).

463. So wird sich also zeigen, daß die Gleichung (456) für eine Oeffnung im Boden eines jeden senkrechten Prisma gilt.

464. Wenn also die Oeffnung in Vergleichung mit dem Boden ziemlich klein ist, so enthält (461) den theoretischen Beweis von (165) für Oeffnungen im Boden.

465. Wäre die Oeffnung dem Querschnitte des Prisma gleich, also h = m, so fiele in (456) das

das erste Glied linker Hand weg, und man hätte $dv = 2gd$ also $v = 2gt$ und (458) $z = gt^2$. Die Geschwindigkeit ändert sich also hier, wie sich die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers ändert (Höh. Mech. I. Abschn. 34; 35), und wächst beständig mit der Zeit, so daß sie in einer unendlichen Zeit unendlich wird.

Man stelle sich vor, das Prisma AK habe bey GK einen Boden, und werde nun mit Wasser angefüllt, denn nehme man den Boden plötzlich weg, so fängt die ganze Wassersäule AK auf einmahl zu fallen an, wie ein schwerer Körper fallen würde, der eben den Raum ausfüllte. Tritt also oben kein Wasser mehr hinein, so wird die Wasserschicht, die anfangs bey AE war, mit einer beschleunigten Bewegung in der Zeit in GK gekommen seyn, die ein schwerer Körper braucht, durch AG zu fallen, und alsdenn wäre das Prisma leer. Soll es aber beständig voll erhalten werden, so muß immer bey AE Wasser mit der Geschwindigkeit hineintreten, mit welcher das im Prisma befindliche hinabsinkt, und weil das letztere immer schneller sinkt, so muß das erste immer schneller hineintreten, und fängt also im Prisma nicht aus der Ruhe, sondern schon mit einer gewissen Geschwindigkeit zu sinken an, (wie Höh Mech. I. Abschn. 81.). Diese Geschwindigkeit, mit der das oben hineintretende Wasser zu sinken anfängt, wird ohne Ende grösser und grösser, wie das unten herausfallende ohne Ende immer schneller und schneller fällt, so wird be-

greiflich, wie diese Geschwindigkeit unendlich wachsen kann.

466. Setzte man in (489). $h = m$, so würde $z = \infty$. Die Bedeutung hievon wird sich nun aus vorigem Absatze zeigen. Es heisst so viel: die Geschwindigkeit des herausfliessenden Wassers, wird nicht eher beständig, bis sie unendlich wird, das ist, sie wird nie beständig, sondern wächst ohne Ende fort, weil sie erstlich in einer unendlichen Zeit, das ist, niemahls beständig wird. Dieses führt natürlich darauf, zu untersuchen, wie lange Zeit bey andern Verhältnissen von h und m nöthig ist, bis die Geschwindigkeit etwa beynahe beständig wird. Die allgemeine Gleichung (456) beantwortet diese Frage.

467. Aufg. Die Vergleichung zwischen der Zeit und Geschwindigkeit zu finden.

Aufl. I. Aus (456) wird

$$2mady = (4gah - \frac{(h^2 - m^2)}{h} \cdot v^2)\,dt$$

$$\text{oder } \frac{1}{4gah - \frac{(h^2 - m^2)}{h} \cdot v^2} \cdot dv = \frac{dt}{2ma}.$$

II. Das, was sich linker Hand befindet, auf logarithmische Differentiale zu bringen, muß man den Bruch, der in dv multiplicirt ist, in zweene zerlegen, aus deren Addition er entsteht. Die dazu nöthige Rechnung ist schon allgemein in Anal. Un. 359 gemacht, und es ist

vor-

dorten z	a	b	α^2	x^2
hier v	1	0	4gah	$\frac{h^2 - m^2}{h}$

Man behalte der Bequemlichkeit wegen, vors erste noch die dortigen griechischen Buchstaben, deren Bedeutung hier angezeigt ist, so findet sich der linke Theil der Gleichung

$$\frac{1}{2\alpha}.dv \quad \frac{1}{2\alpha}.dv$$
$$\frac{}{\alpha + xv} + \frac{}{\alpha - xv}.$$

III. Die logarithmischeu Differentiale deutlicher zu sehen, drücke man vorstehendes so aus:

$\frac{1}{2\alpha x}.\left(\frac{x\,dv}{\alpha + xv} + \frac{x\,dv}{\alpha - xv}\right)$; davon ist das Integral $\frac{1}{2\alpha x}.(\log(\alpha + xv) - \log(\alpha - xv))$ (An. Un. 218).

IV. Folglich wird aus (I.)

$$\frac{1}{2\alpha x}.\log\frac{\alpha + xv}{\alpha - xv} = \frac{t}{2m\alpha}$$

Weil v und t zugleich = o werden, so ist dieses schon die verbesserte Integralgleichung ohne Hinzusetzung einer andern beständigen Grösse, denn für v = o kömmt im linken Theile der Gleichung log 1 welches auch = o.

V. Wenn also log e = 1; so ist $\frac{t}{2m\alpha} = \frac{t}{2m\alpha}$.

log e und die Logarithmen auf beyden Seiten weg-

ge-

gelassen, wird $\left(\frac{\alpha + \varkappa v}{\alpha - \varkappa v}\right)^{\frac{1}{2\alpha\varkappa}} = e^{\frac{t}{2m\alpha}}$

$$\text{also } \frac{\alpha + \varkappa v}{\alpha - \varkappa v} = e^{\frac{\alpha\varkappa t}{am}}.$$

Diese Potenz von e will ich E nennen, so ist $\alpha + \varkappa v = E\alpha - E.\varkappa v$.

Daraus erhält man $v = \frac{\alpha.(E-1)}{\varkappa.(E+1)}$ wo auf der rechten Seite alles durch gegebene Grössen und t gegeben ist.

468. Weil $\frac{\alpha}{\varkappa} = 2\sqrt{\frac{gah^2}{h^2 - m^2}}$ so wird aus (458) $z = a.\frac{h^2}{h^2 - m^2}.\left(\frac{E-1}{E+1}\right)^2$.

469. Weil E durch die veränderliche Grösse t gegeben ist, so ist z veränderlich. Das Differential von $\frac{E-1}{E+1}$ ist $= 2dE$ (An. Un. 26) $= \frac{2\alpha\varkappa dt}{am}.E$ (An. Un. 241) bejaht, also wächst z beständig, wie sich auch ohne Differentialrechnung daraus herleiten lässt, daß $\frac{E-1}{E+1} = \frac{1 - \frac{1}{E}}{1 + \frac{1}{E}}$ wo E mit t zugleich wächst, wie dar-

aus

aus offenbahr ist, weil e=2,718... (An. Un. 232) also eine Potenz von e von einem höhern Grade grösser ist, da nun alsdenn $\frac{1}{E}$ abnimmt, so nimmt der Nenner ab, und der Zähler wächst.

Man kann also dem Wachsthume von z keine andere Gränze setzen, als $t = \infty$; diese Voraussetzung für t giebt eine Gränze, der sich z beständig nähert, sie aber nie erreicht. Weil nun alsdenn E unendlich wird, so ist diese Gränze $z = a$.

$\frac{h^2}{h^2 - m^2}$ das kann man also für den grösten Werth von z annehmen, den es eigentlich nie erreicht.

470. Weil $\frac{\alpha\, x}{m\, a} = 2\sqrt{\frac{g.(h^2 - m^2)}{a\, m^2}}$ so kann dieses leicht sehr groß seyn, wenn m etwas klein in Vergleichung mit h, und a nur nicht sehr groß in Vergleichung mit g ist. In diesem Falle wird der Exponent eine sehr grosse Zahl, auch selbst, wenn t ein Bruch z. E. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ist, das ist, einen solchen Theil einer Secunde bedeutet. Folglich wird E in diesem Falle auch für ein ziemlich kleines t, eine sehr grosse Zahl, so daß $\frac{E-1}{E+1}$ ohne merklichen Irrthum = 1 kann angenommen werden, und daher erreicht z in einer sehr kurzen Zeit vom Anfange des Ausflusses einen Werth, der seiner Gränze (469) sehr nahe kömmt, so

wird

wird, innerhalb eine fast unmerklichen Zeit, die Geschwindigkeit schon können für beständig angenommen werden, wie die Erfahrung bey verticalen Oeffnungen lehrt (91).

Exempel. $h = 9m$, welches statt fände, wenn h und m Kreise wären, da der erste den dreyfachen Durchmesser des letzten hätte. Ferner sey $a = g$ oder das Gefäß so hoch, als der Fall in einer Secunde $= 15,625$ Fuß. So ist $\frac{\alpha \varkappa}{ma} =$

$2\sqrt{\frac{h^2 - m^2}{m^2}} = 2\sqrt{80}$. Man setze $t = \frac{1}{2}$,

so ist $\frac{\alpha \varkappa t}{am} = \sqrt{80} = 8,9442$ also $E = e^{8,9442}$.

Dieses zu berechnen, nehme ich aus den gewöhnlichen Tafeln den Logarithmen von

$2,718 = 0,4342494$

mult. mit $8,944$

$3,4739972$
3908244
173689
17368

$3,88380$

Giebt E etwa 7652, also $\frac{E-1}{E+1} = \frac{7651}{7653} =$

$0,99$. Daher $z = a.\frac{81}{80}.0,99^2 = a\frac{81}{80}.0,98.a$

Dieses zeigt, wie nahe schon in einer halben Secunde, bey einer so grossen Oeffnung, als nicht

leicht

leicht gebraucht wird, z seinem grösten Werthe kömmt.

Weil auch $\frac{3}{8}\frac{1}{0}$. 0,98 = 0,99 so erhellt, daß auch schon hier beynahe z = a. (464).

471. Bernoulli ist nicht darauf verfallen, die Vergleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit zu suchen, sondern er sucht eine Gleichung zwischen v oder z, und der Länge des Wasserprisma, das in der Zeit t ausgelaufen ist. Das Differential dieser Länge dx, ist $= \frac{h.Pp}{m}$ (455. I.). In dem, was er herausbringt, setzt er x unendlich, und findet so die Gränze, der z sich nähert. Ich habe sein Verfahren bey einer allgemeinern Aufgabe unten (637) beybehalten.

Hieraus ist nicht so leicht und deutlich zu übersehen, ob die Geschwindigkeit sich ihrer Gränze in sehr kurzer Zeit nähert; In der That hat auch B. dieses für keinen andern Fall dargethan, als für den hier betrachteten, und noch dazu nur für eine sehr kleine Oeffnung. Erst an Ende seiner Hydraulik; P. II, art. 28. handelt er davon, wie kurz die Zeit sey, in welcher die Geschwindigkeit beynahe gleichförmig werde. Dieses folgt nach der allgemeinen Aufgabe, die ich unten von (558 ... 649) abgehandelt habe, aber es wird sogleich auf die jezt angezeigte Art eingeschränkt. B. setzt in seinem Exempel h = 100 m, a = 4 Fuß, t = 0, 1 einer Secunde. Dieses giebt (470) m^2 in

Vergleichung mit h^2 weggelassen $\frac{\alpha x}{ma} = 100\sqrt{g}$

Folglich $E = e^{10\sqrt{g}}$. Da $e > 2$ und g beynahe $= 16$; so kann man gewiß $E = 2^{40}$ annehmen, wo sogleich erhellt, daß ohne einigen merklichen Irrthum, $\frac{E-1}{E+1} = 1$ und $z = a$.

Ueber den Strudel.

472. Men begreift, daß die Vorstellung des Strudels, von der Grösse und Gestalt völlig unbestimmt bleiben (454 und 455. II.) nur dazu dient die Aufmerksamkeit auf eine gewisse Kraft zu ziehen, vermöge der die Geschwindigkeit im Gefässe in die Geschwindigkeit in der Oeffnung übergeht. Wo man sich also auch nicht bequem einbilden könnte, wie der Strudel beschaffen seyn müsste, da würde man doch annehmen dürfen, es sey eine bewegende Kraft $\frac{h^2 - m^2}{4gh} v^2$ nöthig, die Geschwindigkeit $\frac{mv}{h}$ in v zu verwandeln. Denn eigentlich gründet sich nichts darauf, daß ein Strudel entsteht, sondern daß Kraft erfodert wird, Geschwindigkeit zu ändern. Ich habe dergleichen Gedanken von Bernoullis Strudel schon in einer 1750 herausgegebenen Schrift geäussert (*). Der Strudel dient blos, dieses sinnlich

(*) De lege continui in natura Lipsiae 1750. §. 11.

lich zu machen, ohngefähr, wie die hohle Kugel des Himmels dient die tägliche Bewegung sinnlich zu machen. Wirklich eine hohle Himmelskugel annehmen, wäre eine Erdichtung; so ist der Strudel vielleicht auch eine: Aber sagen, daß die tägliche Bewegung uns so vorkömmt, als wenn sich eine hohle Kugel um uns drehte, das ist die strengste Wahrheit: Und eben so wahr ist es, daß beym Ausflusse des Wassers eine solche Kraft muß angewandt werden, als wenn ein Strudel entstehen sollte. Könnte man diese Kraft durch den Strudel, nicht: die bewegende Kraft zum Uebergange heissen, und dabey an den Uebergang aus der einen Geschwindigkeit in die andere denken?

Ausfluß durch ein Gefäß mit einer Röhre.

473. Das bisher betrachtete Gefäß, habe an seiner Oeffnung eine Röhre GC 47 F. durchaus von der Weite m. Die Röhre mache mit dem Horizonte den Winkel GBO $= \beta$, ihre Länge sey GB $=$ b; also das Loth GO $=$ b sin β. Uebrigens heisst noch h des Gefässes Querschnitt, a seine Höhe.

Röhre und Gefäß werden mit Wasser gefüllt, da die Röhre bey C verschlossen ist, man öffnet sie, und läßt das Wasser da auslaufen. Seine

Geschwindigkeit daselbst soll v heissen, und der Höhe $z = \frac{v^2}{4g}$ gehören.

474. Wenn das Wasser schwer ist, so hat es, entweder in GD nicht die Geschwindigkeit, mit der es bey BC ausfliesst, und wird auf dem Wege durch die Röhre von der Schwere, wie ein fallender Körper, beschleuniget, oder die Wirkungen der Wasserschichten in einander, ändern diese Beschleunigung, und machen die Bewegung durch die ganze Röhre gleichförmiger. Diese Wirkungen der Schwere und der Wasserschichten, müsste man eigentlich untersuchen.

475. Lässt sich aber eine Art erdenken, wie man Bewegung, die das Wasser in der Röhre wirklich als eine schwere Masse hat, in ihm, als in einer blos trägen Masse hervorbringen könnte; lässt sich auf diese Art, die Wirkung der Schwere, so zu reden, aus dem Wasser wegnehmen, und eben das, was sie thut, wenigstens was aus ihr beym Ausflusse in BC, erfolgt, auf eine andere Art bewerkstelligen, so könnte man die Geschwindigkeit des Wassers durch die ganze Röhre gleich groß annehmen, und sich vorstellen, die Geschwindigkeit des Wassers im Gefässe, verwandelte sich gleich, wo es in die Röhre tritt, in v, und mit dieser. ungeänderten Geschwindigkeit, gienge es znr Röhre hinaus.

476. Zugleich, wenn man annimmt, das Wasser habe in der Röhre überall die Geschwindig-

digkeit v, folgt auch, es habe im Gefässe überall die $\frac{m\,v}{h}$ (wie in 455 II.) und die Kraft zum Uebergange aus einer Geschwindigkeit in die andere (472) ist $\frac{h^2 - m^2}{4gh}\,v^2$ (455; VI.).

477. Man setze, diese Geschwindigkeit beym Ausflusse, bleibe ungeändert (wie in 455 XIII.).

478. I. Wollte man das Wasser in der Röhre blos als träg ansehen, so könnte das, was jetzo die Schwere in diesem Wasser thut, folgendergestalt ausgerichtet werden:

II. Eine Kraft = GO.m, die bey BC parallel mit GB, gegen die Röhre zu druckte, erhielte das schwere Wasser in der Röhre, wenn es keine Bewegung hätte; (Hydrost. 27.) Wollte man also machen, daß blos träges Wasser, mit eben der Gewalt längst der Röhre hinabzugehen strebte, mit der schweres Wasser in ihr hinabzugehen strebt, so dürfte man sich nur oben bey GD einen Kolben vorstellen, der mit der Gewalt GO. m in die Röhre getrieben würde.

III. Dieser Kolben verträte die Stelle der respectiven Schwere des Wassers (Stat. 102.).

IV. Das bisherige setzt voraus, auf das Wasser in der Röhre wirke keine andere Kraft, als die Schwere, die in dieses Wasser wirkt, oder die ihr gleichgültige Kraft des Kolbens. Es müsste also oben im Gefässe kein Wasser, oder

welches eben das ist, das Wasser im Gefässe müsste nicht schwer, nur träg seyn.

V. Nimmt man das letztere an, so könnte man sich statt des Kolbens bey GD einen anderen über der Oberfläche des Wassers im Gefässe, bey AE vorstellen; der da in das Gefäß hinein getrieben würde, seinen Druck durch das blos träge Wasser des Gefässes fortpflanzte, und dadurch die Oberfläche GD eben so stark druckte, als der vorige Kolben

VI. Die bewegende Kraft, welche diesen Kolben im Gefässe triebe, müsste die bewegende Kraft des Wassers in der Röhre, ins Gefäß übergetragen seyn (wie in 440). Man stelle sich nähmlich zwo gleich dicke Schichten träges Wasser vor, eine im Gefässe bey AE, die andere in der Röhre, bey GD. die letzte werde von der bewegenden Kraft GO. m gegen das Gefäß zu, die erste, von der bewegenden Kraft $\frac{h}{m}$. m. GO = h. GO gegen die Röhre zu, getrieben; der Druck pflanzte sich von einer zur andern, durch das blos träge Wasser im Gefässe fort, so erhält jede die andere; und also ist es für das blos träge Wasser in der Röhre einerley, ob es unmittelbar von der Kraft m. GO bey GD längst der Röhre hin, oder von der Kraft h. GO bey AE vermittelst des blos trägen Wassers im Gefässe gedruckt wird.

VII. Und wie es einerley ist, wenn sich das Wasser nicht bewegt, ob die Kraft m. GO bey GD

auf

auf träges Wasser druckt, oder ob das Wasser in der Röhre schwer ist, so ist es auch unter dieser Voraussetzung einerley, ob die Kraft h. GO bey AE auf blos träges Wasser druckt, oder ob das Wasser in der Röhre schwer ist.

VIII. Es ist auch, wenn das Wasser durchaus ruht für das Wasser bey GD einerley, ob auf die Oberfläche AE eine Kraft = ha druckt, oder ob es durch das ganze Gefäß schwer ist.

IX. Man stelle sich nun vor, ruhendes träges Wasser im Gefässe und in der Röhre, habe auf seiner Oberfläche AE einen Kolben, mit einem Gewichte h. a + h. GO beladen, so pflanzt dieses Gewicht durch das Wasser des Gefässes, auf die Fläche GD einen Druck fort, der h. (a + GO). $\frac{m}{h}$ m. (a + GO) ist, oder ein paar gleich dicke Wasserschichten, eine bey AE von h. (a + GO) gegen die Röhre, die andere von m. (a + GO) bey GD gegen das Gefäß getrieben, erhielten einander (440). Das träge Wasser in der Röhre wird also von einer Kraft m. (a + GO) längst der Röhre hingetrieben, so daß eine gleiche Kraft an BC gegen die Röhre zu, angebracht, solches erhielte.

Ist aber das Wasser durchaus schwer, so druckt auf GD eine Wassersäule ma folglich auf BC eine Wassersäule m. (a + GO).

BC leidet also einerley Druck, es mag das Wasser durchaus schwer seyn, oder es mag blos

träge seyn, und auf der Oberfläche AE ein Gewicht haben, so viel, als das Gewicht des Wassers im Gefässe, und das ins Gefäß übergetragene respective Gewicht (Stat. 102) zusammen ausmachen.

X. Die Geschwindigkeit ∧, mit welcher schweres Wasser bey BC ausfliesst, rührt völlig von den Wirkungen der Schwere in alle Wassertheilchen durch Gefäß und Röhre zusammen her. Nun hat man in (IX.) eine Kraft, die bey AE auf blos träges ruhendes Wasser angebracht, in dem Wasser bey BC, eben das thut, was die Schwere durch ihre Wirkungen in alles schwere ruhende Wasser, in eben dem Wasser bey BC thut. Man kann also auf die Gedanken gerathen, zu untersuchen, was diese Kraft für eine Geschwindigkeit bey BC in blos trägem Wasser verursachen werde, und anzunehmen, eben die Geschwindigkeit bey BC werde in schweren Wasser von den Wirkungen der Schwere entstehen. Die Frage liesse sich so abfassen:

479. Aufg. In Gefäß und Röhre befindet sich blos träge Wasser. Bey AE druckt man auf einen Kolben mit einer Kraft, welche das Gewicht der Wassermenge h. (a + GO) erhalten kann. Wie groß ist die beständige Geschwindigkeit, die dadurch in der Röhre entstehen wird?

Aufl. Wenn diese noch unbekannte Geschwindigkeit v heisst, also die im Gefäß $\frac{mv}{h}$ ist, so muß

die bewegende Kraft am Kolben so groß seyn, daß durch sie der Uebergang aus einer Geschwindigkeit in die andere kann bewirkt werden, weil ohne diesen Uebergang der Fluß des Wassers fortgesetzt wird. Also ist $\frac{h^2 - m^2}{4gh} \cdot v^2 = h$. (a + GO) woraus sich v findet.

480. Diese Gleichung scheint für blos träges Wasser keiner Einwendung ausgesetzt, die Anwendung derselben auf schweres Wasser setzt folgendes zum voraus.

I. Schweres Wasser, das im Gefäß und in der Röhre still stünde, druckt den Boden der Röhre BC, mit einer gewissen Gewalt. Man nehme das Wasser im Gefässe und in der Röhre blos träg an, und suche, was für eine Kraft auf seine Oberfläche bey AE gebracht, durch eine Wirkung, die dieses blos träge Wasser bis BC fortsetzte, verursachte, daß BC mit eben der Gewalt gedruckt würde (478. IX.).

II. Diese Kraft verursacht durch ihren Druck, daß sich das Wasser durch die Röhre mit einer gewissen Geschwindigkeit v, von G bis C bewegt.

III. Und diese Geschwindigkeit v, ist eben diejenige, mit welcher das Wasser bey BC ausfliesst, wenn es nicht blos träg ist, und von der angegebenen Kraft auf seine Oberfläche gedruckt wird, sondern wenn alle seine Theilchen von der Schwere getrieben werden.

481. Ich kann freylich nicht sagen, daß mir die dritte dieser Voraussetzungen, so überzeugend erwiesen vorkäme, als der pythagorische Lehrsatz; ich dächte indessen doch, es sey sehr glaublich, daß Wasser in BC mit einerley Geschwindigkeit herausfliesst, wenn es einerley Druck leidet, es mag nun dieser Druck von einer einzigen Kraft herrühren, die sich auf seiner obersten Fläche befindet, oder von unzähligen Kräften seiner unzähligen Theilchen, die sie durch Wirkungen der Schwere erhalten, und vermöge deren sie selbst auf unzählige mannichfaltige Arten in einander wirken.

482. Denn wenn man sich darauf einlassen will, die Wirkungen der Schwere durch und durch im Wasser zu betrachten, so muß man überlegen, daß es nicht genug ist, sich Wasserschichten, wie etwa Pq 46. Fig. eine ist, vorzustellen, deren Theile alle nach parallelen Richtungen getrieben würden. So lange man sich hierauf einschränken kann, ist nicht viel besonders von der Bewegung des Wassers zu sagen; es erfodert wenig Nachdenken einzusehen, daß Wasser durch einen hohlen Cylinder so herabfällt, wie es in Eyß verwandelt, herabfallen würde.

Wo aber Wasser aus dem Gefässe in die Oeffnung, und ferner in die Röhre gehen muß, da müssen seine einzelnen Theile auf allerley Art ihre Richtungen und Geschwindigkeiten ändern, werden dadurch auf allerley Arten in einander wirken, und nur, wenn man diese Aenderungen und ihre Folgen anzugeben weiß, ist man im

Stande, die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in BC ausfliesst, aus dem, woraus sie eigentlich erfolgt, aas den Wirkungen der Schwere in alle und jede Wassertheilchen herzuleiten.

483. Der Schwung einer Pendelstange hat auch seinen ersten Ursprung von der Schwere, seine eigentliche Bestimmung erhält er durch die Wirkungen aller schweren und zugleich bewegten Theile der Stange, diese Wirkungen sind z. E. daß ein Theil den andern schneller zu gehen nöthigt, als derselbe sonst gehen würde, der andere wieder des ersten Bewegung einigermassen hindert, u. s. w. Die Lehre vom Mittelpuncte des Schwunges (Höh. Mech. III. Abschn. 6.) zeigt, wie sich das, was aus allen diesen Wirkungen zusammen erfolgt, auf die Bewegung eines einzigen Punctes bringen lässt. So etwas muß, deucht mich, derjenige leisten, der unsere Kenntniß von der Bewegung des Wassers, so überzeugend und deutlich machen will, als die Theorie vom Mittelpuncte des Schwunges ist. Hier getraue ich mir nicht, dieses zu leisten, und nehme also die Voraussetzung (480) an. (Von der man auch weiter unten (590) nachsehen kann).

484. Wenn man die Geschwindigkeit, mit welcher schweres Wasser bey BC ausfliessen soll, als beständig annehmen will, so muß wohl immer gleichviel Wasser im Gefässe AK bleiben, weil sich die Geschwindigkeit des Ausflusses vermuthlich ändert, wenn sich das Gefäß nach und nach ausleert. Also wird das bisherige folgen-

des

des geben, wenn man in der Gleichung (479) die Werthe von GO und von v aus (473) sezt.

Wenn Gefäß und Röhre der 47. Fig. immer voll erhalten werden, und die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bey BC ausfliesst, beständig wird, so gehört sie der Höhe $z = (a + b. \sin \beta). \frac{h^2}{h^2 - m^2}$.

485. Daß die Geschwindigkeit beständig wird, oder sich einer gewissen beständigen Geschwindigkeit immer nähert, nehme ich hier deßwegen an, um die Untersuchung so weit abzukürzen, daß man die Voraussetzungen, die dabey nothwendig sind (483) bequemer berutheilen kann. Wegen der veränderlichen Geschwindigkeit, werde ich mich in der Folge erklären (495). Jezo will ich von der gefundenen Formel noch einige Anwendungen machen.

486. Ein fester Körper, der allein, längst der schiefen Fläche GB aus der Ruhe herabfiele, hätte in B die Geschwindigkeit, welche der Höhe GO gehört (Höh. Mech. II. Abschn. 20) und weil die Schwere eine absolute Kraft ist (Höh. Mech. I. Abschn. 28) so wächst seine Geschwindigkeit um eben so viel, wenn er auch den Fall in G schon mit einer gewissen Geschwindigkeit anfinge, (wie in Höh. Mech. I. Abschn. 81). Man könnte also in die Versuchung gerathen, die Frage, wie schweres Wasser bey BC ausläuft, wenn

Gefäß und Röhre immer voll erhalten werden, so zu beantworten:

Wenn keine Röhre am Gefässe wäre, liefe das Wasser zur Oeffnung GD mit der Geschwindigkeit heraus, die der Höhe $\frac{a.h^2}{h^2-m^2}$ gehörte (459). Man nehme also an, es trete mit dieser Geschwindigkeit in die Röhre hinein, und falle längst derselben hinunter, wie ein schwerer Körper; So hätte es in BC die Geschwindigkeit, die der Höhe $\frac{a.h^2}{h^2-m^2} + b.\sin\beta$ gehörte.

487. Die Höhe, welche der Geschwindigkeit nach (485) gehört, ist um $b.\sin\beta.\frac{m^2}{h^2-m^2}$ grösser als gegenwärtige (486), also gäbe gegenwärtiges Verfahren die Geschwindigkeit zu klein. Nur wenn m sehr klein ist, verschwände dieser Unterschied beyder Höhen.

884. Ueberhaupt ist für ein kleines m; $z = a + b.\sin\beta$. Also läuft aus einem weiten Gefässe, das immer voll erhalten wird, durch eine enge Röhre das Wasser so heraus, daß seine Geschwindigkeit beym Auslaufe, der Wasserhöhe über der Oeffnung der Röhre zugehört.

489. Das bisherige gilt für jede Neigung der Röhre. Ist sie, wie gewöhnlich vertical, so ist $\sin\beta = 1$ und $GO = b$ der Länge der Röhre selbst gleich.

Für

Für eine horizontale Röhre.

490. Wäre $\beta = 0$ und in (484) $z = a$. $\frac{h^2}{h^2 - m^2}$ die Geschwindigkeit des Ausflusses richtet sich also nur nach der Höhe des Wassers im Gefässe, auf die Länge der Röhre kömmt nichts dabey an, und das Wasser fliesst also mit gleicher Geschwindigkeit zur Oeffnung der horizontalen Röhre, oder zur gleichen Oeffnung des Gefässes, ohne Röhre heraus.

491. Es ist begreiflich, daß hiebey die Oeffnung in der Seitenwand des Gefässes seyn muß. Vielleicht kostete es einige Mühe, sich hier den Strudel vorzustellen; es ist aber nicht nöthig (472). Daß das Wasser durch gleiche Oeffnungen im Boden, und in der Seitenwand mit gleicher Geschwindigkeit fliesst (490; 459), wird wohl damit zusammenhängen, daß es auf sie einerley Druck ausübt (Hydrost. 28).

492. Für die horizontale Röhre ist in (479) $GO = 0$ und es wird aus ihr kein Gewicht auf die Oberfläche AE übergetragen wie denn auch, wenn das Wasser schwer ist, das Ende BC nur einen Druck $= ma$ leidet, das Wasser in der horizontalen Röhre selbst, wird von ihr getragen, und druckt nicht auf BC, wenigstens nicht so, wie dieser Druck vorhin bey der schiefen Röhre ist betrachtet worden. Denn sonst, wenn man sich eine weite Röhre horizontal gelegt, mit ein

paar

paar Boden, wie ein cylindrisches Faß vorstellte, und dieses Faß mit Wasser füllte, so würde jeder Boden so gedruckt, wie in (1. u. f.) berechnet wird.

Solche weite Röhren werden hier nicht betrachtet, wie schon daraus erhellt, weil bey ihnen der Wehrt von a sehr unbestimmt wäre.

493. Man könnte sich hiebey folgenden Einwurf machen: Wenn die horizontale Röhre anfangs am Ende BC verschlossen ist, Gefäß und Röhre mit Wasser gefüllt werden, und nun BC geöffnet wird, daß das Wasser da herausläuft, so geht Kraft dazu, das Wasser der Röhre, wie einen trägen Körper in Bewegung zu setzen, ob es gleich nicht, wie ein schwerer, darf gehoben oder erhalten werden, weil es von der Röhre getragen wird. Diese Kraft nun kann nirgend anders seyn, als in dem Wasser des Gefässes, denn das Wasser in der horizontalen Röhre für sich selbst, hat keine Kraft, sich zu bewegen. Die Kraft des Wassers im Gefässe, wird blos durch dieses Wasser im Gefässe bestimmt, und bleibt also einerley, wenn das Gefäß einerley bleibt. Aber die Masse des Wassers in der Röhre, ist grösser oder kleiner, nachdem die Röhre länger oder kürzer ist. Es kann also nicht einerley seyn, ob die Kraft im Gefässe viel oder wenig Masse in der Röhre zu bewegen hat. Und folglich wäre die Länge der Röhre in Betrachtung zu ziehen.

Das alles ist vollkommen richtig, es trifft aber gegenwärtigen Satz nicht. Die Folge fliesst

hier-

hieraus: Die Geschwindigkeit v, in dem Wasser der Röhre zu erregen, gehört bey einer langen Röhre mehr Zeit, als bey einer kurzen: Aber diese Zeit wird hier nicht betrachtet. Man nimmt an, die Geschwindigkeit sey schon entstanden; und da wendet das Wasser des Gefässes keine Kraft an, das Wasser der Röhre zu bewegen, denn dieses letztere Wasser bewegt sich mit seiner schon erhaltenen Geschwindigkeit immer fort; nur die Geschwindigkeit des Wassers im Gefässe, in die, welche das in der Röhre hat, zu verwandeln, ist nun Kraft nöthig, und dabey kömmt nichts auf die Länge der Röhre an.

494. Das bisherige enthält die Theorie dessen, was (80....168) nach Erfahrungen ist untersucht worden, die Kegelförmige u. a. Gestalten der Röhre beyseite gesetzt, über die man doch leicht, wie erhellt, nach eben den Gründen, nur weitläuftigere theoretische Berechnungen anstellen könnte.

495. Es folgte nunmehr, die bisher vorgetragene Untersuchung des Gefässes, mit der Röhre so anzustellen, daß man die Geschwindigkeit veränderlich annähme. Was man durch diese Bemühung erhalten könnte, wäre nur sich zu versichern, daß sich diese veränderliche Geschwindigkeit, ziemlich bald der vorhin gefundenen beständigen näherte, und das wird man schon aus der Rechnung für das Gefäß ohne Röhre (470) vermuthen, wenigstens, wenn die Röhre nicht sehr lang ist. Um also nicht zu weitläuftig zu

seyn,

seyn, will ich eine Frage vornehmen, da die Geschwindigkeit muß als veränderlich betrachtet werden. Das Verfahren bey Beantwortung dieser Frage, wird zeigen, wie man es machen müsste, die Geschwindigkeit auch hier als veränderlich zu betrachten.

Gefäß mit einer Röhre, das sich ausleeret.

496. Aufg. Gefäß und Röhre (47 Fig.) sind anfangs voll Wasser, dessen Oberfläche die Höhe GA über dem Boden des Gefässes hat. Man öffnet die Röhre bey C, daß das Wasser daselbst ausläuft, dessen Stelle aber oben durch kein anderes ersetzt wird. Man sucht für jede Zeit, und den zugehörigen Stand des Wassers im Gefässe, die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bey C ausläuft.

Aufl. I. In der Zeit t sey es um AP gesunken. Also ist in dieser Zeit aus dem Gefässe die Wassermenge AP. h gegangen. Eben soviel Wasser muß durch die Oeffnung der Röhre bey C ausgeflossen seyn. Dieses Wasser, in ein Prisma verwandelt, dessen Grundfläche die Oeffnung der Röhre, die Länge $= x$ ist, giebt $AP.h = m.x$

oder $AP = \frac{mx}{h}$.

II. Im Gefässe ist das noch übrige Wasser $= ha - mx$. Ich nehme es in Schichten getheilt an, deren jede, jetzo eine gewisse Geschwin-

digkeit, und am Ende des nächsten Elements der Zeit, dt, eine andere hat. Eben so stelle ich mir das Wasser der Röhre in Schichten getheilt vor, deren jede jetzt die Geschwindigkeit v hat, mit der das Wasser bey C ausfliesst, und diese Geschwindigket darauf um dv ändert. So hat jede Wasserschicht im Gefässe, die Geschwindigkeit $\frac{mv}{h}$ und ändert solche um $\frac{mdv}{h}$. (Man erinnere sich hiebey an 474 ... 476).

III. In jedes Wassertheilchen in der Röhre, muß eine beschleunigende Kraft $\frac{dv}{2gdt}$ wirken, und in jedes Wassertheilchen im Gefässe, eine solche Kraft $\frac{mdv}{2ghdt}$. Dieß erhellt, wie in (455. XVI.).

IV. Hievon wird nur das Wasser im Strudel ausgenommen. Es gehört eigentlich weder in das Gefäß noch in die Röhre, sondern geht aus dem Gefässe in die Röhre über. Seine bewegende Kraft ist schon oft angegeben, und da man die beschleunigenden Kräfte in (III.) nur sucht, daraus bewegende herzuleiten, so hat man nur nöthig, die beyden angezeigten zu betrachten.

V. Es sind nähmlich die bewegenden Kräfte des Wassers in der Röhre $\frac{mbdv}{2gdt}$, und im Gefässe

fässe $\frac{(ha - mx).\,mdv}{2ghdt}$.

Nähmlich, wenn man sich diese Wasser als blos träg vorstellt, so ist die Geschwindigkeit des Wassers der Röhre, aus v in $v + dv$ zu ändern, ein Druck nöthig, so stark ihn das Gewicht einer Wassermenge $\frac{mbdv}{2gdt}$ geben konnte. Dieser Druck liesse sich etwa vermittelst eines Kolbens sinnlich vorstellen, wie in (478; II.).

Eben so von der bewegenden Kraft des Wassers im Gefässe.

VI. Statt des Kolbens, der das Wasser in der Röhre mit der angezeigten bewegenden Kraft druckt, kann man sich einen auf der Oberfläche des Wassers im Gefässe vorstellen, der mit der Kraft $\frac{h}{m} \cdot \frac{mbdv}{2gdt} = \frac{hbdv}{2gdt}$ getrieben wird, der wird eben die bewegende Kraft in der Röhre verursachen (wie in 478; VI.), so wird die bewegende Kraft in der Röhre, ins Gefäß übergetragen.

VII. Würde eben der Kolben auf dem Wasser im Gefässe, noch überdieß mit der Kraft $\frac{(ha - mx).\,mdv}{2ghdt}$ gedruckt, so gäbe dieser Druck die bewegende Kraft des Wassers im Gefässe.

VIII. Und käme zu den beyden noch ein Druck, so stark als die (451) angegebene Kraft, so ver-

ursacht dieser Druck, daß das Wasser mit der Geschwindigkeit v ausfliesst (wie in 476).

IX. Alle drey zusammen, werden also machen, daß das Wasser mit der Geschwindigkeit v ausfliesst, die sich in der Zeit dt um dv ändert.

X. Dieses Verfahren unterscheidet sich von dem (478) nur darinnen, daß hier die Geschwindigkeit veränderlich ist, also die beyden bewegenden Kräfte, die zu Veränderung der Geschwindigkeit gehören, noch zu der (476) kommen müssen.

XI. Wenn also dorten die Kraft (476) allein der Summe des Gewichts des Wassers im Gefässe, und des ins Gefäß übergetragenen respectiven Gewichts des Wassers in der Röhre gleich gesetzt ward, so muß man jetzo, nach eben der Art zu verfahren, die erwähnte drey Kräfte zusammen dieser Summe gleich setzen. Uebrigens gehören hieher eben die Erinnerungen, die ich (480. u. f.) vorgetragen habe.

497. Das giebt also folgende Gleichung

$$\frac{m\,(ha - mx)\,dv}{2ghdt} + \frac{hbdv}{2gdt} + \frac{h^2 - m^2}{4gh} \cdot v^2 = ah - mx + h.b.\sin\beta.$$

498. I. Von den drey veränderlichen Grössen der Gleichung (497), läßt sich jetzo keine wegschaffen, als $dt = \frac{dx}{v}$, so kömmt $\frac{2mvdv.\,(ha - mx)}{hdx}$ +

$$+\frac{2hbvdv}{dx}+\frac{h^2-m^2}{h}v^2=4g.\ (ah-mx+h.b.\sin\beta).$$

III. Daraus kömmt $2(hb+\frac{m.(ha-mx)}{h})$

$$vdv=(4g\,(ah-mx+h.b.\sin\beta)-\frac{(h^2-m^2)v^2}{h})dx.$$

499. Hierinn, aus (458) $4gz$ statt v^2, und $4gdz$ statt $2vdv$ gesetzt, kömmt

$$dz\,(hb+\frac{m.(ha-mx)}{h})=$$

$$(ah-mx+hb.\sin\beta-\frac{(h^2-m^2).z}{h}).\ dx.$$

500. Oder

$$dz=\frac{(h.(ah-mx+hb.\sin\beta)-(h^2-m^2)z)dx}{h^2b+m.\,(ha-mx)}.$$

501. Unter dieser Gestalt liesse sich der Ausdruck schon mit An. Un (412) vergleichen; Zur Abkürzung und bequemerer Anwendung aber dient noch folgendes.

502. Man nenne w die Höhe des noch übrigen Wassers im Gefässe, über dem Boden des Gefässes, so ist $w=a-\frac{mx}{h}$ (496; I.) also $hw=ha-mx$ und $dx=-\frac{hdw}{m}$; Dieses giebt nach gehöriger Berechnung

$$dz = \frac{(h^2 - m^2).\,z\,dw}{m^2 w + mhb} - \frac{h^2.(w + b.\sin\beta).\,dw}{m^2 w + mhb}$$

503. Da ist nun aus angeführtem Orte der An Unendl.

dorten	y	a	x	p	b	q	n
hier	z	1	w	$\frac{h^2-m^2}{m^2w+mhb}$	$-h^2$	$\frac{w+b.\sin\beta}{m^2w+mhb}$	0

504. Das dortige $\frac{p\,dx}{a}$ ist also hier

$$\frac{h^2-m^2}{m^2w+mhb}.dw = \frac{h^2-m^2}{m^2}.\frac{m^2dw}{m^2w+mhb} = x.$$

$\frac{m^2\,dw}{m^2w+mhb}$ wenn man $\frac{h^2-m^2}{m^2} = x$ setzt, woraus $\frac{h^2}{m^2} = x+1$ folgt.

Das dortige $\int\frac{pdx}{a}$ wird also hier $x.\log(m^2w+mhb)$ und das dortige z, hier $(m^2w+mhb)^x$.

505. Weil das dortige n hier $= 0$, so ist das dortige $z^{n-1}\,qdx$ so viel, als hiesse es $\frac{qdx}{z}$ und da wird es hier $\frac{(w+b.\sin\beta).\,dw}{(m^2w+mhb)^{x+1}}$. Man heisse dieses Differential dS, und nehme das Integral davon, S, so, daß es für $w = a$; oder $x = 0$ verschwindet.

506.

506. Also wird die Gleichung O; An. Un.

(412) hier $c - \frac{(m^2 w + mhb)^{-\varkappa}}{-1} = -h^2 . S$

$-1 . z$

oder $z = (m^2 w + mhb)^{\varkappa} . (c - h^2 . S)$. Wo c so muß bestimmt werden, daß $z = o$ für $w = a$; Also ist $o = (m^2 a + mhb)^{\varkappa} . (c - o)$ folglich $c = o$ und das verbesserte Integral $z = -(m^2 w + mhb)^{\varkappa} . h^2 S$.

507. Hier ist also nur noch übrig, das Integral S zu finden. Man setze $mw + hb = y$; folglich $w = \frac{y - hb}{m}$, $dw = \frac{dy}{m}$ so ist

$$dS = \frac{(\frac{y - hb}{m} + b . \sin\beta) . \frac{dy}{m}}{m^{\varkappa+1} . y^{\varkappa+1}} \text{ oder}$$

$$dS = \frac{1}{m^{\varkappa+3}} . (y^{-\varkappa} dy + b . (m . \sin\beta - h) y^{-\varkappa-1} dy)$$

also

$$S = \frac{1}{m^{\varkappa+3}} . (\frac{y^{1-\varkappa}}{1-\varkappa} + \frac{b . (m . \sin\beta - h) y^{-\varkappa}}{-\varkappa}) + Const$$

der veränderliche Factor läßt sich so ausdrücken:

$\frac{1}{(1-\varkappa) . y^{\varkappa-1}} - \frac{b . (m . \sin\beta - h)}{\varkappa . y^{\varkappa}}$ und das giebt

$$\frac{xy-(1-x).\,b.\,(m.\sin\beta-h).}{x.(1-x).\,y^{x}}$$

Dieses läßt sich bequemer so ausdrücken:

$$\frac{(x-1).\,b.\,(h-m.\sin\beta)-xy}{(x-1).\,x.\,y^{x}}$$

Also ist

$$S=\frac{(x-1).\,b(h-m.\sin\beta)-xy}{m^{x+3}(x-1).\,x.\,y^{x}}+\text{Const}$$

508. Und weil $y=ma+hb$ für $w=a$, so ist

$$o=\frac{(x-1).\,b.(h-m.\sin\beta)-x(ma+hb)}{m^{x+3}.(x-1).x.(ma+hb)^{x}}+\text{Const}$$

Dieses giebt

$$\text{Const}=\frac{xma+hb+(x-1).m.\,b.\sin\beta}{x.(x-1).\,m^{x+3}(ma+hb)^{x}}$$

509. Setzt man nun in (507) im Nenner des Werthes von S; statt y seinen Werth $mw+hb$, so kömmt

$$S=\frac{1}{x.(x-1).m^{x+3}}\left\{\frac{xma+hb+(x-1).mb.\sin\beta}{(ma+hb)^{x}}-\frac{(xmw+hb+(x-1).mb.\sin\beta)}{y^{x}}\right.$$

510. Diese Integration findet nicht statt, wenn $x=1$ oder $h=m\sqrt{2}$; alsdann ist in (507)

$dS=$

$$dS = \frac{1}{w^4} \cdot \left(\frac{dy}{y} + b\,(m.\sin\beta - h).\, y^{-2}\, dy\right)$$

$$S = \frac{1}{m^4}\left(\log y - \frac{b.(m.\sin\beta - h)}{y}\right) + \text{Conſt}$$

$$o = \frac{1}{m^4}.\left(\log(ma + hb) - \frac{b.(m.\sin\beta - h)}{ma + hb}\right) + \text{Conſt}$$

alſo

$$S = \frac{1}{m^4}.\left(\log\frac{mw + hb}{ma + hb} + \frac{b.(m.\sin\beta - h).(y - ma - hb)}{y.(ma + hb)}\right)$$

wenn man hier ſtatt hund y ihre Werthe ſetzt, kömmt

$$S = \frac{1}{m^4}.\left(\log\frac{w + b\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} + \frac{b.(\sin\beta - \sqrt{2}).(w - a)}{(w + b\sqrt{2}).a + b\sqrt{2}}\right)$$

511. Nun iſt leicht z aus 506 zu berechnen.

Weil es $= m^{\varkappa}.y^{\varkappa}.h^2$, S ſo wird man es ſo finden:

$$z = \frac{h^2}{\varkappa\,(\varkappa - 1).\,m^3}.$$

$$\left\{ + \varkappa mw + hb + (\varkappa - 1).\,mb.\sin\beta \right.$$

$$\left. - (\varkappa ma + hb + (\varkappa - 1).\,mb.\sin\beta).\left(\frac{mw + hb}{ma + hb}\right)^{\varkappa} \right.$$

512. Der unveränderliche Coefficient $\frac{h^2}{\varkappa.(\varkappa - 1).m^3}$ iſt $\frac{\varkappa + 1}{\varkappa\,(\varkappa - 1).\,m}$.

Anwendung dieſer Formel auf beſondere Fälle.

513. Ein Gefäß ohne Röhre, das ſich gleich durch ſeine Oeffnung ausleeret.

Hier ist $b=o$ also

$$z=\frac{x+1}{x.(x-1).m}.(xmw-xma.(\frac{w}{a})^{x}) \text{ oder}$$

$$z=\frac{x+1}{x-1}.(w-a.(\frac{w}{a})^{x})$$

514. Hätte das Gefäß keinen Boden, so wäre $h=m$; $x=o$; und $z=\frac{w-a}{-1}=a-w$; wie sich gehört, denn es ist klar, daß das Wasser solchergestalt in einem Prisma, das keinen Boden hat, hinabfiele, wie jeder anderer schwerer Körper, und so seine Geschwindigkeit allemahl der Höhe gehörte, um die es gefallen ist.

515. Ist $\frac{h}{m}$ und welches daraus folgt, auch x sehr groß, so ist $(\frac{w}{a})^{x}$ sehr klein, weil $\frac{w}{a}$ ein eigentlicher Bruch seyn soll, da man $w<a$ annimmt. Es ist also beynahe $z=w$, wie in (166) angenommen wird.

Nur gilt dieses nicht im Anfange der Bewegung, wenn $\frac{w}{a}$ noch beynahe $=1$. Die Rechnung gründet sich nähmlich darauf, daß $\frac{mx}{h}$ (496.

I.) schon eine beträchtliche Grösse hat, und giebt also die ersten Geschwindigkeiten nicht.

516.

§16. Für $h^2 = 2m^2$ wird aus (§10)

$$z = 2w.\log\frac{a}{w}.$$

§17. Wenn man in (§01) $b = o$ sezt, so wird $dz = \frac{xzdw}{w} - (x+1)dw$, dieses $= o$ gesezt, giebt $\frac{z}{w} = \frac{x+1}{x}$ für das grösste z; und diesen Werth in (§13) gesezt, giebt $\frac{x+1}{x}.w =$

$(w - (\frac{w}{a})^x .a).\frac{x+1}{x-1}$ also $w = \frac{a}{\sqrt[x-1]{x}}$.

Die Höhe, welche dieser grösten Geschwindigkeit gehört, ist $\frac{w.(x+1)}{x} = \frac{a.(x+1)}{\sqrt[x]{x.(x-1)}}$

§18. Diese Rechnungen stimmen mit Daniel Bernoullis Hydrodyn. Sect III. §. 13 ... 17. überein. Zur Bequemlichkeit dessen, der sie vergleichen wollte, will ich beyderley Benennungen unter einander sezen.

D. Bern.	m	n	a	x	$\frac{m^2-n^2}{n^2}$	$\frac{m^2}{n^2}$	$\frac{m^2-2n^2}{n^2}$
Meine	h	m	a	w	x	$x+1$	$x-1$

§19. Exempel. Dan. Bernoulli giebt folgendes: Ein Cylinder habe einen viermahl so grossen Durchmesser, als seine Oeffnung, (so grosse Oeffnungen kommen selten vor), und das Was-

Wasser sey um den hundertsten Theil der Höhe gesunken, die es anfangs im Gefässe hatte. So ist

$h = 16\,m$; $x + 1 = 256$; $\frac{w}{a} = 0,99$ und $z =$

$\frac{256}{254}.a\,(0,99 - 0,99^{255})$ Weil log 99--2 oder log 0,99 = --0,0043648, so giebt dieses mit

255 multipl. $\log 0,99^{255} = -1,1130240$ und das zu 5 addirt, giebt 3,8869760 den Logarithmen der Hunderttausendtheilchen, die auf diese Potenz gehen. Sie ist also 0,07708, welches von 0,99 abgezogen 0,91292 lässt. Daraus berechnet man ferner $z = 0,9199.a$ oder $= 0,92.a$.

Bey einer so grossen Oeffnung, und da das Wasser noch so wenig gesunken war, ist schon (515) beynahe wahr. Man begreift, daß es für kleinere Oeffnungen, und wenn das Wasser tiefer gesunken ist, der Wahrheit noch näher kommen muß.

520. Die Zeit t, in welcher eine gegebene Geschwindigkeit erhalten würde, liesse sich so finden: $vdt = dx\,(496;\text{I.}) = -\frac{hdw}{m}$ (501) also ist

$dt = -\frac{hdw}{2mV gz}$ wo man z hier aus (513) hat. Es ist aber kein Nutzen von weiterer Beschäftigung mit diesem Differentiale zu erwarten.

521. Eben so läuft in der Zeit die Wassermenge $h.(a-w)$ aus, in der man aus (520) nach

nach der Integration suchen könnte, w durch t auszudrücken. Wovon aber auch kein Nutzen zu sehen ist.

Eine enge Röhre an einem weiten Gefässe.

522. Hier ist x groß (504). Und in dem Werthe von z (511) wird nachstehendes daraus folgen:

523. Es ist allemahl, für jeden Werth von x; der Quotient

$$\frac{mw+hb}{ma+hb} = \frac{mw+mb\sqrt{(x+1)}}{ma+mb\sqrt{(x+1)}}$$

$$= \frac{w+b\sqrt{(x+1)}}{a+b\sqrt{(x+1)}} = 1 - \frac{(a-w)}{b\sqrt{(x+1)}+a}$$

ein eigentlicher Bruch.

Dieser Bruch aber kömmt der Einheit desto näher, je grösser x ist; desto kleiner ist alsdenn das, was von der Einheit abgezogen wird.

Bey einem gegebenen x kömmt er der Einheit desto näher je grösser w ist, für $w=a$ wäre er völlig $=1$, was auch x seyn möchte.

Für ein gegebenes x ist er am kleinsten, wenn $w=0$. Also ist $\frac{b\sqrt{(x+1)}}{a+b\sqrt{(x+1)}}$ oder

$1-\frac{a}{b\sqrt{(x+1)}+a}$ der kleinste Werth, den dieser Quotient haben kann.

524.

524. Nun ist man wohl nicht berechtiget, nur deßwegen anzunehmen $\left(1 - \frac{a}{b\sqrt{(x+1)}+a}\right)^x$ sey was sehr kleines, weil es eine hohe Potenz eines Bruches ist. Denn wenn dieser Bruch der Einheit sehr nahe kömmt, so könnte auch diese Potenz der Einheit sehr nahe kommen. Wer sich die Mühe geben will, die Reihe für sie nach dem binomischen Lehrsatze anzufangen, der wird sehen, daß das grosse x in ihre Coefficienten dergestalt kömmt, daß man sich nicht berechtiget halten darf, die ersten Glieder beynahe für das ganze zu nehmen, und folglich diese Reihe hier keinen Gebrauch hat.

525. Ex. Im Versuche (174) war $h = 110$. m also $\sqrt{(x+1)} = 110$ und $x+1 = 12100$ und $x = 12099$, $b = 3a$, so wird der kleinste Bruch in (522) $= \frac{3.110}{1+3.110} = \frac{330}{331}$

$5 + \log 330 = 7,5185139$
$\log 331 = 2,5198280$

$4,9986859$ giebt $\frac{330}{331} = 0,99697$

Wenn man von diesem Logarithmen wieder 5 abzieht, so bekömmt man den eigentlichen

log

$\log \frac{330}{331} = -0{,}0013141$

mult. mit 12099

118269
118269
262820
13141

— 15,8992959

wo man die letzten Zifern, nicht für richtig annehmen darf.

Wenn man zu diesem verneinten Logarithmen, + 16 addirt, so giebt das, was herauskömmt, den Logarithmen des Bruches, zur Einheit eine Eins von der Ordnung -- 16 oder ein Zehntausend-Billiontheilchen angenommen. Und weil etwas über 0, 1 herauskömmt, so beträgt diese Potenz nur einige solche Theilchen, und kann daher ohne Bedenken, als verschwindend angesehen werden.

526. In besonderen Fällen sieht man nach dem angeführten Verfahren leicht, ob von $\frac{b\sqrt{(x+1)}+w}{b\sqrt{(x+1)}+a}$ die Potenz des Exponenten x sehr geringe ist, wenn man für w eine gewisse Grösse z. E. a. 0, 01 u. s. w. annimmt.

527. Wenn dieses also statt findet, so wird man in dem Werthe von z (511) wahrnehmen, daß dasjenige, was in diese Potenz multiplicirt ist, und dorten das Zeichen -- vor sich hat, ohngefähr so groß ist, als was in der Zeile darüber, mit dem Zeichen + voran steht und in 1 multiplicirt ist. Diese obere Zeile hat nur xmw, wo

die

die untere xma hat, und wenn auch in der obern Zeile $w = o$ wäre, so würde doch die Grösse xma, um welche sich die untere von der obern unterscheidet, nicht viel zu bedeuten haben, weil zwar x groß, aber dagegen m klein ist, uud also das Product aus beyden, nicht sehr groß seyn wird.

528. Unter diesen Umständen also wird man beynahe annehmen können

$$z = \frac{x+1}{x.(x-1).m}(xmw + hb + (x--1)\,m.b.\sin\beta).$$

529. Wenn man hier $m\sqrt{(x+1)}$ statt h setzt (504) so wird $z = \frac{x+1}{x--1}.(w + \frac{b\sqrt{(x+1)}}{x} + \frac{x--1}{x}.b.\sin\beta)$ und weil hier beynahe $x+1 = x--1 = x$; auch $\frac{b\sqrt{(x+1)}}{x}$ klein ist, so wird beynahe $z = w + b.\sin\beta$.

Oder: Die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfliesst, gehört beynahe der Wasserhöhe, über der Oeffnung der Röhre, wo es ausfliesst. Wie in 169 angenommen ward. Man s. auch unten (535).

530. Im Anfange der Bewegung, wo beynahe $w = a$, muß dieses weit von der Wahrheit abweichen (523), und wird überhaupt nicht anders, als nach einer Prüfung der Umstände, wie (526) lehret, anzunehmen seyn.

Für

Für eine horizontale Röhre.

531. Da ist, $\sin\beta = 0$; und wo (529) wahr ist, da gehört hier aus (529) die Geschwindigkeit des Ausflusses der Wasserhöhe, über der Oeffnung der Seitenwand, wo das Wasser aus dem Gefässe in die Röhre tritt, die Röhre mag übrigens so lang seyn als sie will. Ihre Länge kömmt hier aus der (492) angezeigten Ursache in so weit, in keine Betrachtung, daß das Gewicht des Wassers in ihr, nicht ins Gefäß übergetragen wird.

532. Die Geschwindigkeit für eine enge horizontale Röhre anzugeben, hat sich Joh. Bernoulli so verhalten (*). In der Gleichung (500) wo schon $\sin\beta = 0$ ist, läßt er alles weg, was mit m multiplicirt ist, und bekömmt so:

$dz = \frac{h^2(a-z)dx}{h^2 b}$ oder $dx = \frac{b\,dz}{a-z}$; dieß integrirt, daß x und z zugleich verschwinden, giebt

$x = b.\log\frac{a}{a-z}$ und $z = a.(1 - e^{-x:b})$ dieses

z nun wird am grösten, wenn $x = \infty$ und alsdenn wird es $= a$. Daher wird das Wasser sogleich seine grösste Geschwindigkeit, die der Höhe a zugehört, erlangen, eben die, mit welcher es aus einem immer vollen Gefässe, in eine enge Röhre flösse (490), denn auch hier, sagt B. kann man das Gefäß als immer voll betrachten, weil

(*) Hydraul. P. I. §. XII. Cor. 2.

weil wegen seiner gleichsam unendlichen Weite, eine fast unendliche Zeit erfodert wird, ehe es sich merklich senkt.

533. Dieses widerspricht nun zwar meiner Bestimmung (531) nicht, denn, wenn sich das Wasser nicht merklich senkt, so ist die Wasserhöhe immer fast = a. Und ich habe mir die Sache bey Gravesands Versuche (90) so vorgestellt. Auserdem aber, daß es doch nicht natürlich ist, ein Gefäß als immer voll zu betrachten, wenn es sich in sehr langer Zeit ausleeret, so hat B. gewiß mit der Gleichung (500) nicht recht verfahren.

534. Daraus, daß m klein ist, folgt nicht, daß man ah allein statt ah—mx setzen darf; denn x ist eben alsdenn sehr groß, wenn AP (496; I.) nur eine mittelmässige Grösse hat. Freylich fällt es weg, wenn man beständig AP = o setzen will, das heisst aber alsdenn gleich annehmen, das Gefäß soll immer voll bleiben, und da ist es natürlich, daß eben das kommen muß, was für das immer volle Gefäß kam. Eigentlich ist ah—mx = hw (501), und man muß die Gleichung (501) vornehmen.

Ich will mit dieser Gleichung so verfahren, daß ich β darinnen behalte, um auch auf die Röhre, die nicht horizontal liegt, Anwendung machen zu können.

Eben=

Ebenfalls eine enge Röhre.

535. I. Setzt man, wie hier verstattet ist, b lang, so ist für ein kleines m, wie hier auch angenommen wird, mw in Vergleichung mit hb klein; Für den Nenner der beyden Brüche in der Gleichung, kann man also mhb annehmen. Im Zähler des ersten Bruchs, darf man m^2 weglassen, und so kömmt

$$dz = \frac{hzdw}{mb} - \frac{h.(w+b.\sin\beta)\,dw}{mb}.$$

II. Hier ist $\frac{mb}{h} \cdot \frac{dz}{dw} = z - (w+b.\sin\beta)$

Nimmt man an $\frac{dz}{dw}$, der Quotient von ein paar Differentialen von einerley Art, sey weder sehr groß noch sehr klein, sondern von mittlerer Grösse, so giebt er durch das sehr kleine $\frac{m}{h}$ multiplicirt, was sehr geringes, und also ist der linke Theil der Gleichung sehr gering, und es ist beynahe $o = z - (w+b.\sin\beta)$ oder $z = w + b.\sin\beta$, welches die Sätze 529; 531; giebt.

Ohngefähr auf diese Art, verfährt auch Daniel Bernoulli Hydrodyn. Sect. III. §. 23.

III. Weil doch $\frac{m}{h}$ nicht unendlich klein, sondern nur geringe ist, so könnte immer noch der Zweifel übrig bleiben, ob $\frac{mdz}{h\,dw}.b$ deßwegen eben

so gar klein seyn muß, da man das Gesetz gar nicht weiß, nach dem sich die Verhältniß dz: dw richtet. Ich habe einen Versuch gemacht, ob die Integration der Gleichung (I.) hierinne mehr Licht gäbe; Ich will ihn hersetzen, erinnere aber im voraus, daß man ihn für nichts weiter, als für eine Uebung im Integriren anzusehen hat.

IV. Diese Gleichnng mit An. Un. 412. verglichen, ist

dorten	y	a	x	p	b	q
hier	z	1	w	$\frac{h}{mb}$	$-h$	$\frac{w+b.\sin\beta}{mb}$

n	
o	

also das dortige $\frac{p\,dx}{a}$ hier $\frac{hdw}{mb}$ und das dortige $\frac{\int p\,dx}{a}$ hier $\frac{hw}{mb}$ dafür ich $\varphi.w$ schreiben will, und das dortige z hier $e^{\varphi w}$ und das dortige $b.z^{n-1}$ qdx hier $-h.e^{-\varphi w}.\frac{(b.\sin\beta+w)}{mb}dw$

$$=-\frac{h.\sin\beta}{m}.e^{-\varphi w}.dw-\frac{h}{mb}.e^{-\varphi w}.wdw.$$

V. Diese beyden Differentiale werden aus An. Un. 242. integrirt. Für das erste ist

dorten	m	x	s
hier	$-\varphi=-\frac{h}{mb}$	w	o

also

also das Integral $-\frac{h.\sin\beta}{m}.e^{-\varphi w}.-\frac{1}{\varphi}=+b.$

$\sin\beta.e^{-\varphi w}$.

Für das zweyte Differential sind die dortigen m; x, eben wie vorhin, das dortige ε ist hier = 1 und das Integral wird

$$-\frac{h}{mb}.-e^{-\varphi w}.\left(\frac{w}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}\right)$$

$$=\frac{hw+mb}{h}.\frac{mb}{h}.e^{-\varphi w}$$

So wird $z=(b.\sin\beta+(\frac{hw+mb).mb}{h^2}).e^{-\varphi w}$

+ Const

und Const $=-(b.\sin\beta+\frac{(ha+mb).mb}{h^2}).e^{-\varphi a}$

aber auch dieser Ausdruck ist zu sehr zusammengesetzt, als daß sich daraus was allgemeines von der Geschwindigkeit kurz angeben liesse.

Bewegung durch ein Gefäß mit zwo Röhren.

536. Am Gefässe AK 48. Fig. dessen Weite h ist, sey bey GD die Oeffnung = m; von gleicher Weite mit einer daran gefügten Röhre DM, die aber wiederum bey LM eine engere Oeffnung = a habe, woran die Röhre MN gefügt sey.

Man nehme wieder an, das Wasser habe durch die ganze letzte Röhre MN, die Geschwindigkeit v, mit der es bey N ausfliesst, so hat es in GL, die Geschwindigkeit $\frac{n}{m}$ v, und in AK die Geschwindigkeit $\frac{m}{h} \cdot \frac{n}{m} v = \frac{n}{h} v$.

Wenn man sich also einen Strudel beym Durchgange aus AK; in GL; nnd einen andern beym Durchgange aus GL in MN vorstellt, so werden die dazu nöthigen bewegenden Kräfte aus (472) sich so finden lassen.

Für den Durchgang aus AK in GL ist

dorten	h	m	v
hier	h	m	$\frac{n}{m}$ v

und die bewegende Kraft $\frac{h^2 - m^2}{4gh} \cdot \frac{n^2 v^2}{m^2}$.

Für den Durchgang aus GL in MN ist

dorten	h	m	v
hier	m	n	v

und die bewegende Kraft, die sich, diesen Durchgang zu bewirken, in GL befinden muß, ist $\frac{m^2 - n^2}{4gm} \cdot v^2$.

Diese bewegende Kraft aus GL in AK übergetragen, wird $\frac{h}{m} \cdot \frac{m^2 - n^2}{4gm} \cdot v^2 = \frac{h(m^2 - n^2)}{4gm^2} v^2$

Diese

Diese übergetragene Kraft, und die vorhin in AK befindliche zusammen sind

$$\frac{h^2m^2 - m^2n^2}{4ghm^2} \cdot v^2 = \frac{h^2 - n^2}{4gh} v^2.$$

Diese jetzt gefundene bewegende Kraft in AE, würde also nach den Voraussetzungen dieser Theorie bewirken, daß das Wasser in N mit der Geschwindigkeit v ausfliesst.

Die Geschwindigkeit $\frac{nv}{h}$ im Gefässe, in die Geschwindigkeit v in der Röhre MN zu verwandeln, gehört also einerley bewegende Kraft, das Wasser mag aus dem Gefässe in diese Röhre vermittelst der Röhre GL oder unmittelbar gehen, so daß sich die Röhre MN gleich am Gefässe AK befände. Es versteht sich, daß alsdenn ML die Oeffnung des Gefässes statt GD wäre.

Sieht man diese Geschwindigkeit v als beständig an, so lässt sie sich so finden.

Die Längen sind AG = a; GM = b; LN = c; also ist das Gewicht des Wassers in der Röhre MN; = n. c; in die Röhre GL übergetragen = $\frac{m}{n}$. n. c = mc und das in das Gefäß übergetragen $\frac{h}{m}$. mc = hc.

Eben so das Gewicht des Wassers in der Röhre GL; = mb ins Gefäß übergetragen = $\frac{h}{m}$. b = hb.

Wird also das Gefäß beständig voll erhalten, so ist das Gewicht des Wassers in ihm h. a, und

$$h.(a+b+c)=\frac{(h^2-n^2)}{h}.z \text{ oder } z=\frac{h^2.(a+b+c)}{h^2-n^2}$$

Die beständige Geschwindigkeit ist also eben die, als ob die unterste Röhre gerade hinauf von N bis D reichte, oder auch als ob das ganze Gefäß, so weit als es ist, von A bis N hinunter reichte, und nur bey N die Oeffnung = n hätte.

537. Wollte man die Geschwindigkeit als veränderlich betrachten, so dürfte man nur die beschleunigende Kraft des Wassers in jeder Röhre suchen, wie in (496; III.) daraus fände sich die bewegende Kraft (wie dorten V.). Alle diese bewegenden Kräfte würden ins Gefäß übergetragen, (wie dorten VI) und das gäbe die Gleichung (wie 497).

538. Aus (536) erhellt, daß bey der beständigen Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausläuft, (angenommen, daß es eine solche beständige Geschwindigkeit oder eine ihr sehr nahe kommende hat) nichts auf die Menge und Beschaffenheit der Röhren ankömmt, durch welche das Wasser aus dem Gefässe in die letzte Röhre geleitet wird. Alles bestimmt sich nur durch die Weiten des Gefässes und der letzten Röhre, und die Wasserhöhe. So lange diese drey Grössen ungeändert bleiben, so lange ist die Geschwindigkeit des Wassers einerley, es mag

durch

durch soviel und so weite Röhren, als man will, gegangen seyn.

539. In (484) bleibt die Geschwindigkeit einerley, so lange die Weite der Röhre, und die Höhe des Wassers über ihrer untersten Oeffnung einerley bleibt, die Röhre mag vertical, schief, oder gar horizontal seyn. Selbst wenn sie aufwärts gebogen wäre (49. Fig.) wäre der 47. Fig. $GO = b. \sin \beta$ verneint, die Wasserhöhe über BC wäre $a - b. \sin \beta$ und das Gewicht des Wassers in CG, würde als ein verneintes Gewicht ins Gefäß übergetragen, die Gewalt nähmlich, die das Wasser bey BC mit der Geschwindigkeit v heraustriebe, wäre nun $a (h - b. \sin \beta)$ wie gleich daraus begreiflich wird, weil ein Theil des Gewichts des Wassers im Gefässe muß hier angewandt werden, das Wasser in der Röhre zu erhalten. Also gehört hier die Geschwindigkeit der Höhe $(a - b. \sin \beta). \frac{h^2}{h^2 - m^2}$ und wird wiederum durch die Wasserhöhe über BC, und die Weiten bestimmt.

540. Hieraus folgt, daß (538) noch wahr bleibt, wenn auch unter den Röhren, schiefe, horizontale, aufwärts gerichtete, sind.

541. Und weil sich eine krumme Röhre betrachten läßt, als bestünde sie aus unzählich vielen, unendlich kurzen geraden, so können unter diesen Röhren auch krumme seyn.

die untere xma hat, und wenn auch in der obern Zeile $w = o$ wäre, so würde doch die Grösse xma, um welche sich die untere von der obern unterscheidet, nicht viel zu bedeuten haben, weil zwar x groß, aber dagegen m klein ist, uud also das Product aus beyden, nicht sehr groß seyn wird.

528. Unter diesen Umständen also wird man beynahe annehmen können

$$z = \frac{x+1}{x.(x-1).m}(xmw + hb + (x--1)\,m.b.\sin\beta).$$

529. Wenn man hier $m\sqrt{(x+1)}$ statt h setzt (504) so wird $z = \frac{x+1}{x--1}.(w + \frac{b\sqrt{(x+1)}}{x} + \frac{x--1}{x}.b.\sin\beta)$ und weil hier beynahe $x+1 = x--1 = x$; auch $\frac{b\sqrt{(x+1)}}{x}$ klein ist, so wird beynahe $z = w + b.\sin\beta$.

Oder: Die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfliesst, gehört beynahe der Wasserhöhe, über der Oeffnung der Röhre, wo es ausfliesst. Wie in 169 angenommen ward. Man s. auch unten (535).

530. Im Anfange der Bewegung, wo beynahe $w = a$, muß dieses weit von der Wahrheit abweichen (523), und wird überhaupt nicht anders, als nach einer Prüfung der Umstände, wie (526) lehret, anzunehmen seyn.

Für

Für eine horizontale Röhre.

531. Da ist, $\sin\beta = 0$; und wo (529) wahr ist, da gehört hier aus (529) die Geschwindigkeit des Ausflusses der Wasserhöhe, über der Oeffnung der Seitenwand, wo das Wasser aus dem Gefässe in die Röhre tritt, die Röhre mag übrigens so lang seyn als sie will. Ihre Länge kömmt hier aus der (492) angezeigten Ursache in so weit, in keine Betrachtung, daß das Gewicht des Wassers in ihr, nicht ins Gefäß übergetragen wird.

532. Die Geschwindigkeit für eine enge horizontale Röhre anzugeben, hat sich Joh. Bernoulli so verhalten (*). In der Gleichung (500) wo schon $\sin\beta = 0$ ist, läßt er alles weg, was mit m multiplicirt ist, und bekömmt so:

$dz = \frac{h^2(a-z)dx}{h^2 b}$ oder $dx = \frac{b\,dz}{a-z}$; dieß integrirt, daß x und z zugleich verschwinden, giebt

$x = b.\log\frac{a}{a-z}$ und $z = a.(1 - e^{-x:b})$ dieses

z nun wird am grössten, wenn $x = \infty$ und alsdenn wird es $= a$. Daher wird das Wasser sogleich seine grösste Geschwindigkeit, die der Höhe a zugehört, erlangen, eben die, mit welcher es aus einem immer vollen Gefässe, in eine enge Röhre flösse (490), denn auch hier, sagt B. kann man das Gefäß als immer voll betrachten, weil

(*) Hydraul. P. I. §. XII. Cor. 2.

weil wegen seiner gleichsam unendlichen Weite, eine fast unendliche Zeit erfodert wird, ehe es sich merklich senkt.

533. Dieses widerspricht nun zwar meiner Bestimmung (531) nicht, denn, wenn sich das Wasser nicht merklich senkt, so ist die Wasserhöhe immer fast = a. Und ich habe mir die Sache bey Gravesands Versuche (90) so vorgestellt. Auserdem aber, daß es doch nicht natürlich ist, ein Gefäß als immer voll zu betrachten, wenn es sich in sehr langer Zeit ausleeret, so hat B. gewiß mit der Gleichung (500) nicht recht verfahren.

534. Daraus, daß m klein ist, folgt nicht, daß man ah allein statt ah—mx setzen darf; denn x ist eben alsdenn sehr groß, wenn AP (496; I.) nur eine mittelmässige Grösse hat. Freylich fällt es weg, wenn man beständig AP = o setzen will, das heisst aber alsdenn gleich annehmen, das Gefäß soll immer voll bleiben, und da ist es natürlich, daß eben das kommen muß, was für das immer volle Gefäß kam. Eigentlich ist ah—mx = hw (501), und man muß die Gleichung (501) vornehmen.

Ich will mit dieser Gleichung so verfahren, daß ich β darinnen behalte, um auch auf die Röhre, die nicht horizontal liegt, Anwendung machen zu können.

Eben=

Ebenfalls eine enge Röhre.

535. I. Setzt man, wie hier verstattet ist, b lang, so ist für ein kleines m, wie hier auch angenommen wird, mw in Vergleichung mit hb klein; Für den Nenner der beyden Brüche in der Gleichung, kann man also mhb annehmen. Im Zähler des ersten Bruchs, darf man m^2 weglassen, und so kömmt

$$dz = \frac{hzdw}{mb} - \frac{h.(w + b.\sin\beta)\,dw}{mb}.$$

II. Hier ist $\frac{mb}{h} \cdot \frac{dz}{dw} = z - (w + b.\sin\beta)$

Nimmt man an $\frac{dz}{dw}$, der Quotient von ein paar Differentialen von einerley Art, sey weder sehr groß noch sehr klein, sondern von mittlerer Grösse, so giebt er durch das sehr kleine $\frac{m}{h}$ multiplicirt, was sehr geringes, und also ist der linke Theil der Gleichung sehr gering, und es ist beynahe $o = z - (w + b.\sin\beta)$ oder $z = w + b.\sin\beta$, welches die Sätze 529; 531; giebt.

Ohngefähr auf diese Art, verfährt auch Daniel Bernoulli Hydrodyn. Sect. III. §. 23.

III. Weil doch $\frac{m}{h}$ nicht unendlich klein, sondern nur geringe ist, so könnte immer noch der Zweifel übrig bleiben, ob $\frac{mdz}{h\,dw}.b$ deßwegen eben

so gar klein seyn muß, da man das Gesetz gar nicht weiß, nach dem sich die Verhältniß dz: dw richtet. Ich habe einen Versuch gemacht, ob die Integration der Gleichung (I.) hierinne mehr Licht gäbe; Ich will ihn hersetzen, erinnere aber im voraus, daß man ihn für nichts weiter, als für eine Uebung im Integriren anzusehen hat.

IV. Diese Gleichnng mit An. Un. 412. verglichen, ist

dorten	y	a	x	p	b	q
hier	z	1	w	$\frac{h}{mb}$	$-h$	$\frac{w+b.\sin\beta}{mb}$

	n
	o

also das dortige $\frac{pdx}{a}$ hier $\frac{hdw}{mb}$ und das dortige $\frac{\int pdx}{a}$ hier $\frac{hw}{mb}$ dafür ich $\varphi.w$ schreiben will,

und das dortige z hier $e^{\varphi w}$ und das dortige $b.z^{n-1}$

qdx hier $-h.e^{-\varphi w}.\frac{(b.\sin\beta+w)}{mb}dw$

$=-\frac{h.\sin\beta}{m}.e^{-\varphi w}.dw-\frac{h}{mb}.e^{-\varphi w}.wdw.$

V. Diese beyden Differentiale werden aus An. Un. 242. integrirt. Für das erste ist

dorten	m	x	s
hier	$-\varphi=-\frac{h}{mb}$	w	o

also

also das Integral $-\frac{h.\sin\beta}{m}.e^{-\varphi w}.-\frac{1}{\varphi}=+b.$

$\sin\beta.e^{-\varphi w}$.

Für das zweyte Differential sind die dortigen m; x, eben wie vorhin, das dortige ε ist hier = 1 und das Integral wird

$$-\frac{h}{mb}.-e^{-\varphi w}.\left(\frac{w}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}\right)$$

$$=\frac{hw+mb}{h}.\frac{mb}{h}.e^{-\varphi w}$$

So wird $z=(b.\sin\beta+(\frac{hw+mb).mb}{h^2}).e^{-\varphi w}$

+ Const

und Const $=-(b.\sin\beta+\frac{(ha+mb).mb}{h^2}).e^{-\varphi a}$

aber auch dieser Ausdruck ist zu sehr zusammengesetzt, als daß sich daraus was allgemeines von der Geschwindigkeit kurz angeben liesse.

Bewegung durch ein Gefäß mit zwo Röhren.

536. Am Gefässe AK 48. Fig. dessen Weite h ist, sey bey GD die Oeffnung = m; von gleicher Weite mit einer daran gefügten Röhre DM, die aber wiederum bey LM eine engere Oeffnung = n habe, woran die Röhre MN gefügt sey.

Man nehme wieder an, das Wasser habe durch die ganze letzte Röhre MN, die Geschwindigkeit v, mit der es bey N ausfliesst, so hat es in GL, die Geschwindigkeit $\frac{n}{m}$ v, und in AK die Geschwindigkeit $\frac{m}{h} \cdot \frac{n}{m} v = \frac{n}{h} v$.

Wenn man sich also einen Strudel beym Durchgange aus AK; in GL; nnd einen andern beym Durchgange aus GL in MN vorstellt, so werden die dazu nöthigen bewegenden Kräfte aus (472) sich so finden lassen.

Für den Durchgang aus AK in GL ist

dorten	h	m	v
hier	h	m	$\frac{n}{m}$ v

und die bewegende Kraft $\frac{h^2 - m^2}{4gh} \cdot \frac{n^2 v^2}{m^2}$.

Für den Durchgang aus GL in MN ist

dorten	h	m	v
hier	m	n	v

und die bewegende Kraft, die sich, diesen Durchgang zu bewirken, in GL befinden muß, ist $\frac{m^2 - n^2}{4gm} \cdot v^2$.

Diese bewegende Kraft aus GL in AK übergetragen, wird $\frac{h}{m} \cdot \frac{m^2 - n^2}{4gm} \cdot v^2 = \frac{h(m^2 - n^2)}{4gm^2} v^2$

Diese

Diese übergetragene Kraft, und die vorhin in AK befindliche zusammen sind

$$\frac{h^2m^2 - m^2n^2}{4ghm^2} \cdot v^2 = \frac{h^2 - n^2}{4gh} v^2.$$

Diese jetzt gefundene bewegende Kraft in AE, würde also nach den Voraussetzungen dieser Theorie bewirken, daß das Wasser in N mit der Geschwindigkeit v ausfliesst.

Die Geschwindigkeit $\frac{nv}{h}$ im Gefässe, in die Geschwindigkeit v in der Röhre MN zu verwandeln, gehört also einerley bewegende Kraft, das Wasser mag aus dem Gefässe in diese Röhre vermittelst der Röhre GL oder unmittelbar gehen, so daß sich die Röhre MN gleich am Gefässe AK befände. Es versteht sich, daß alsdenn ML die Oeffnung des Gefässes statt GD wäre.

Sieht man diese Geschwindigkeit v als beständig an, so lässt sie sich so finden.

Die Längen sind AG = a; GM = b; LN = c; also ist das Gewicht des Wassers in der Röhre MN; = n. c; in die Röhre GL übergetragen = $\frac{m}{n}$. n. c = mc und das in das Gefäß übergetragen $\frac{h}{m}$. mc = hc.

Eben so das Gewicht des Wassers in der Röhre GL; = mb ins Gefäß übergetragen = $\frac{h}{m}$. b = hb.

Wird also das Gefäß beständig voll erhalten, so ist das Gewicht des Wassers in ihm h. a, und

$$h.(a+b+c)=\frac{(h^2-n^2)}{h}.z \text{ oder } z=\frac{h^2.(a+b+c)}{h^2-n^2}$$

Die beständige Geschwindigkeit ist also eben die, als ob die unterste Röhre gerade hinauf von N bis D reichte, oder auch als ob das ganze Gefäß, so weit als es ist, von A bis N hinunter reichte, und nur bey N die Oeffnung = n hätte.

537. Wollte man die Geschwindigkeit als veränderlich betrachten, so dürfte man nur die beschleunigende Kraft des Wassers in jeder Röhre suchen, wie in (496; III.) daraus fände sich die bewegende Kraft (wie dorten V.). Alle diese bewegenden Kräfte würden ins Gefäß übergetragen, (wie dorten VI) und das gäbe die Gleichung (wie 497).

538. Aus (536) erhellt, daß bey der beständigen Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausläuft, (angenommen, daß es eine solche beständige Geschwindigkeit oder eine ihr sehr nahe kommende hat) nichts auf die Menge und Beschaffenheit der Röhren ankömmt, durch welche das Wasser aus dem Gefässe in die letzte Röhre geleitet wird. Alles bestimmt sich nur durch die Weiten des Gefässes und der letzten Röhre, und die Wasserhöhe. So lange diese drey Grössen ungeändert bleiben, so lange ist die Geschwindigkeit des Wassers einerley, es mag

durch

durch soviel und so weite Röhren, als man will, gegangen seyn.

539. In (484) bleibt die Geschwindigkeit einerley, so lange die Weite der Röhre, und die Höhe des Wassers über ihrer untersten Oeffnung einerley bleibt, die Röhre mag vertical, schief, oder gar horizontal seyn. Selbst wenn sie aufwärts gebogen wäre (49. Fig.) wäre der 47. Fig. $GO = b. \sin \beta$ verneint, die Wasserhöhe über BC wäre $a - b. \sin \beta$ und das Gewicht des Wassers in CG, würde als ein verneintes Gewicht ins Gefäß übergetragen, die Gewalt nähmlich, die das Wasser bey BC mit der Geschwindigkeit v heraustriebe, wäre nun $a (h - b. \sin \beta)$ wie gleich daraus begreiflich wird, weil ein Theil des Gewichts des Wassers im Gefässe muß hier angewandt werden, das Wasser in der Röhre zu erhalten. Also gehört hier die Geschwindigkeit der Höhe $(a - b. \sin \beta). \frac{h^2}{h^2 - m^2}$ und wird wiederum durch die Wasserhöhe über BC, und die Weiten bestimmt.

540. Hieraus folgt, daß (538) noch wahr bleibt, wenn auch unter den Röhren, schiefe, horizontale, aufwärts gerichtete, sind.

541. Und weil sich eine krumme Röhre betrachten läßt, als bestünde sie aus unzählich vielen, unendlich kurzen geraden, so können unter diesen Röhren auch krumme seyn.

542. Die beständige Geschwindigkeit beym Ausflusse des Wassers, kömmt also nur auf die (538) angezeigten drey Grössen an, wie es auch an den Ausfluß geleitet wird. Ohngefähr wie ein fallender Körper, einerley Geschwindigkeit bekömmt, wenn er gleich tief gefallen ist, er mag, durch was für einen Weg er will, gefallen seyn. Höh. Mech. II. Abschn. 20).

543. Die veränderliche Geschwindigkeit liesse sich bey einem solchen aus mancherley Röhren zusammengesetzten Wege, wie in (537) betrachten. Man kann aus dem einfachsten Falle (511) urtheilen, ob man davon was brauchbares zu versprechen hat. Ohne Zweifel verlangt man meistens die Geschwindigkeit deßwegen zu wissen, um aus ihr zu berechnen, wieviel Wasser in einer gegebenen Zeit ausfliesst. Ist sie also veränderlich, und hat einen sehr zusammengesetzten Ausdruck, so würde das Differential der Wassermenge, welches sich (521) wie vdt verhielte, wohl nicht anders, als durch unendliche Reihen zu integriren seyn, und diese Mühe würde wohl nicht belohnt werden.

Von dem Drucke auf den Boden des Gefässes.

544. Aufg. Das Wasser im Gefässe AK (46. Fig.) sey nicht schwer, es werde aber durch irgend eine bewegende Kraft, einen Kolben z. E. getrieben, daß es mit der veränderlichen Geschwin-

digkeit v zur Oeffnung GD herausläuft. Man fragt, wie stark, während dieser Bewegung, dre Theil des Bodens bey DK gedruckt wird?

Aufl. Das Wasser, das vermöge der (455. VI.) angegebenen Kraft durch den Strudel getrieben wird, druckt während seines Durchfliessens an der Gränze ID auf das, welches man im Raume IDK als stillstehend annehmen kann (455; III.). Da das durchfliessende Wasser in seiner Figur von dem stillstehenden erhalten wird, so muß das stillstehende eben den Druck aufhalten, der das fortfliessende durch den Strudel treibt, und weil dieser Druck auf den Boden senkrecht gerichtet ist, und das stillstehende Wasser von dem noch vorhandenen Theile des Bodens bey DK getragen wird, so muß dieser Theil des Bodens den Druck tragen, den das stillstehende Wasser empfindet. Folglich ist der Druck, den er leidet $\frac{h^2 - m^2}{h} . z$ (458) $= ah. \left(\frac{E-1}{E+1}\right)^2$ (469).

545. Ich betrachte hier die Geschwindigkeit als veränderlich, und bestimme doch den Druck nur aus der Kraft durch den Strudel, ohne auf die Kraft zu sehen, welche die Geschwindigkeit v um dv ändert. Der Druck richtet sich nähmlich jeden Augenblick nach der Geschwindigkeit, die das Wasser denselben Augenblick beym Ausflusse hat, hat es den nächsten Augenblick eine andere, so zeigt sich von der Kraft, welche die Geschwindigkeit des Ausflusses ändert, der Erfolg eben

darinnen, daß den nächsten Augenblick der Druck anders ist.

546. Den (544) angegebenen Druck findet auch Joh. Bern. Hydraul. P. I. §. 27..30; aber gar nicht nach dieser Art zu schliessen, er bemerkt nicht einmahl, welches mich am meisten wundert, daß seine Formel eben mit der Kraft durch den Strudel einerley ist. Sein weitläuftiges Verfahren hier verständlich zu erklären, getraue ich mir nicht.

547. Dieß ist der Druck, der aus der Bewegung des Wassers entsteht. Dazu setzt Bernoulli, wenn das Wasser schwer ist, noch sein Gewicht, und also ist nach ihm der völlige Druck ah. $(1+(\frac{E-1}{E-1})^2)$.

Ich muß bekennen, daß mir dieses nicht recht deutlich vorkömmt. Die Bewegung schweres Wassers betrachte ich nach B. Anleitung so, als wenn es nur träg wäre, und auf seiner Oberfläche ein Kolben mit der Kraft ha ins Gefässe getrieben würde: Wenn nun diese Kraft, auf dem Boden den §44 angegebenen Druck hervorbringt, so sehe ich nicht, wie sie zugleich auf eben dem Boden noch einen andern = ha hervorbringen kann?

548. Wenn man auch Bernoullin zugäbe, zu dem Drucke der von der Bewegung herrührt (544), müsste noch der Druck gesetzt werden, den das Gewicht des Wassers verursacht, so sehe ich doch nicht, wie B. den letzten Druck = ha setzen kann?

Denn

Denn der Boden des Gefässes wird nicht ganz gedruckt, nur der Theil bey DK bekömmt einen Druck, weil der andere fehlt, dieser Theil bey DK ist $= h - m$, und wenn also das Wasser im Gefässe still stünde, bekäme er den Druck $a.(h--m)$ mehr kann er vom blossen Gewichte des Wassers nicht bekommen.

Die beschleunigende Kraft in 455; XV. zu finden.

549. Zu dieser Untersuchung hat mich das sehr dunkle und verwickelte Verfahren Joh. Bern. zu Findung des Drucks (546) veranlasst, wie jemand, der es nachsehen will, leicht wahrnehmen wird. Nicht in der Absicht, Bernoullis Vortrag zu erläutern, sondern weil mir diese Untersuchung sonst angenehm und lehrreich scheint, bringe ich sie hier bey.

550. Bey einerley Gefäß und einerley beständigen Wasserhöhe, sey die Oeffnung bey GD einmahl m; die Geschwindigkeit des Ausflusses v; denn, die Oeffnung $= n$, die Geschwindigkeit $= u$.

551. Weil nun beydemahl die bewegende Kraft, wovon diese Geschwindigkeiten herrühren $= ah$ ist, so ist aus 456.

$$\frac{h^2 - m^2}{4gh} v^2 + \frac{madv}{2gdt} = \frac{h - n^2}{4gh} . u^2 + \frac{nadu}{2gdt} .$$

552. Diese Gleichung muß richtig bleiben, was auch n und das zugehörige u ist. Nun

aber

aber ist für ein verschwindendes n; $u^2 = 4ga$ weil alsdenn die Geschwindigkeit der Höhe a zu-

gehört (469) und $\frac{nadu}{2gdt}$ in Vergleichung mit den übrigen Theilen der Gleichung verschwindet. Also kömmt, weil $v^2 = 4gz$;

$\frac{h^2 - m^2}{h} . z + \frac{madv}{2gdt} = ha$ oder;

$\frac{madv}{2gdt} = ah - \frac{(h^2 - m^2) . z}{h}$ folglich die beschleunigende Kraft $\frac{mdv}{2ghdt} = (1 - \frac{(h^2 - m^2)z}{ah^2})$.

553 Weil die Schwere = 1, so ist diese beschleunigende Kraft immer geringer, als die Schwere. Nähmlich was die Schwere, vermöge des Gewichts der Wassermenge ah. verursacht, wird nicht völlig zu Aenderung der Geschwindigkeit v angewandt, weil ein Theil davon der bewegenden Kraft zum Uebergange (472) gehört. In der That ist eben das, was in vorstehender Gleichung von 1 abgezogen wird, diese bewegende Kraft zum Uebergange, mit der Masse ah, dividirt, das ist eine beschleunigende Kraft in jedem Theilchen der Masse ah, die mit dieser Masse multiplicirt, die zum Uebergange gehörige bewegende Kraft giebt. Diese beschleunigende Kraft, von der beschleunigenden Kraft der Schwere weggenommen, lässt also die beschleunigende Kraft übrig, die zu Aenderung der Geschwindigkeit v

angewandt wird. So hängt alles deutlich zusammen.

554. Auch das erfolgt, wie man es erwarten muß, daß die beschleunigende Kraft in (III.) immer abnimmt, je grösser z wird, und für $z = \frac{h^2 a}{h^2 - m^2}$ verschwindet. Das heisst: die Geschwindigkeit ändert sich immer weniger und weniger, je grösser sie wird, und bleibt beständig, wenn sie am grösten geworden ist. Alles wie 467. u. f. erfodern.

Ueber Arten, wie man sich vorstellen kann, daß das Gefäß beständig voll erhalten werde.

555. Wenn man sich in (455) und anderswo vorstellt, daß das Gefäß immer voll bleibt, so entsteht natürlicher Weise die Frage, wie dieses dergestalt zu bewerkstelligen ist, daß die Schlüsse, die man bisher über solche Gefässe gemacht hat, oder noch machen wird, durch Wirkungen des hineintretenden Wassers nicht geändert werden; wie z. E. geschähe, wenn Wasser mit einer grossen Geschwindigkeit, die ihm ein hoher Fall gegeben hätte, oben in das Gefäß hineinstürzte, und dadurch der obersten Wasserschicht mehr Geschwindigkeit gäbe, als ihr bey diesen Berechnungen zugeschrieben wird.

556. Hr. Daniel Bernoulli untersucht (*) zweyerley Arten, das Gefäß voll zu erhalten; Eine, wenn in eben der Richtung, nach welcher sich die Oberfläche des Wassers bewegt, und mit eben der Geschwindigkeit, die das Wasser daselbst jeden Augenblick hat, gleichsam daselbst eine neue Oberfläche geschaffen würde, mit der Geschwindigkeit, die das nächste Wasser schon hat. Zweytens wenn das Wasser von der Seite her ohne Geschwindigkeit zugegossen wird, daß die Oberfläche, die so gleichsam stets von neuem geschaffen würde, für sich keine Bewegung hat, und nur von dem unter ihr befindlichen Wasser in Bewegung gebracht wird. Er übergeht andere Arten des Zugiessens. Jede von diesen Vorstellungen erfodert eine andere Untersuchung, wenn man die Geschwindigkeit bestimmen will, mit der Wasser aus einem beständig voll erhaltenen Gefässe fliesst, nachdem schon etwas herausgeflossen ist.

Ueber Bernoullis Auflösung der Aufgabe, in jeder dieser Vorstellungen, hat Hr. d' Alembert Betrachtungen angestellt (**) und zu zeigen gesucht, daß B. sich geirrt, besonders weil er die Erhaltung der lebendigen Kräfte auf einen Fall angewandt, wo die Aenderung der Geschwindigkeit nicht unendlich klein ist.

557. Ich begnüge mich, dieses nur zu erwähnen, da es keine practische Wichtigkeit hat. Aus den im ersten Abschnitte erzählten Versu-

chen,

(*) Hydrodyn. Sect. III. §..
(**) Traité des fluides §. 121. suiv.

chen, erhellt doch soviel, daß sich auf allerley Arten Gefässe voll erhalten lassen, und der Ausfluß allemahl in so weit der Theorie gemäß erfolgt, daß sich die Wassermengen wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen verhalten.

Von der Bewegung des Wassers durch Röhren von willkührlicher Gestalt.

558. Bisher sind nur gerade Röhren betrachtet worden; Die Absicht gegenwärtiger Untersuchung ist zu zeigen, was erfolgt, wenn sie nach Gefallen gekrümmt stnd, auch wie der Druck auf die Seitenwände der Röhren angegeben wird, davon (551) der einfachste Fall ist. Diese Untersuchungen sind im zweyten Theile von J. Bernoullis Hydraulick enthalten.

559. ECce 50 Fig. stelle einen Canal von willkührlicher Gestalt vor, sogleich wird erläutert werden, wie ihn diese Figur vorstellt. Es sey nähmlich AB eine Verticallinie, da man durch die Puncte A, P, T, B, u. d. g. horizontale Ebenen legen kann, die im Canale Querschnitte machen. Diese Querschnitte werden durch Ee, Ff, Nn, Cc, eben so angedeutet, wie in der 46 Fig. der Querschnitt des Prisma durch PZ.

Das Wasser in der Röhre, sey in wagrechte Schichten von unendlich kleiner Dicke durch Querschnitte bey Ff, Mm; bey Nn, Ll; getheilt. In jeder solcher Schicht, stelle man sich die Stelle vor, wo ihr Schwerpunct wäre, wenn das Wasser in

ihr ein fester Körper wäre. Dergleichen Puncte mögen G, H, V, I, seyn. Die Linie, in der sie sich befinden, heisst die centrische Linie. Sie wird aus der Figur des Canas gegeben seyn.

560. Die erste Weite bey Ee, heisse h, die letzte bey Cc, ω, die bey Ff, y, die bey Nn, r, die Dicke jeder Schicht PR, oder TS sey $=$ dt, also die Schichten selbst, Fm $=$ ydt; Nl, rdt.

ID berühre die centrische Linie in I; das Wasser, das zu einer gegebenen Zeit schon aus dem Canale durch den letzten Querschnitt bey Cc geflossen ist, mag einen schiefen Cylinder ausfüllen, dessen Grundfläche der genannte Querschnitt, die Länge ID $=$ x ist.

Die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser zu einer gegebenen Zeit bey Cc ausfliesst, sey $=$ v;

Das Element der centrischen Linie Hh heisse ds, so ist die respective Schwere, mit welcher die Schicht Fm nach der Richtung Hh getrieben wird $\frac{dt}{ds}$; und daher ihr Gewicht nach der Verticallinie ydt, ihre bewegende Kraft nach Hh aber $\frac{ydt^2}{ds}$; Eben so sind für die Schicht Nl diese beyden Dinge rdt, $\frac{rdt^2}{ds}$.

561. Jeder Schicht Gewicht ydt in den obersten Querschnitt bey Ee, übergetragen, erfodert

da

da die bewegende Kraft $\frac{h}{y}$. ydt = hdt, folglich erfodern die Gewichte aller Schichten zusammen von E bis C; in Ee die bewegende Kraft ſhdt = ht = ha wenn AB = a.

Ein Kolben mit dieſer Kraft bey Ee in den Kanal getrieben, vertritt die Stelle der Schwere, die durch alle Schichten von E bis C, in alle Waſſertheilchen wirkt.

Weil AB vertical iſt, alſo Linien, die darauf ſenkrecht ſtehen, wie PF u. ſ. w. horizontal ſind, ſo macht die gerade Linie, welche bey Hh die centriſche berührt, mit der Horizontallinie einen Winkel, deſſen Sinus $= \frac{PR}{Hh} = \frac{dt}{ds}$;

Bey I ſey dieſer Sinus $\frac{1}{\alpha}$ und $= \frac{1}{\beta}$ bey G.

Bernoulli druckt dieſes ſo aus; die Tangente bey H verhalte ſich zu ihrer verticalen Subtangente = ds : dt, und dieſe Verhältniß ſey α : 1 bey I; β : 1 bey G;

Wenn in der 53 Fig. ID der centriſchen Linie Tangente bey I iſt, IV, vertical DV horizontal iſt, ſo iſt $IV = \frac{ID}{\alpha}$.

563. Daß ſich in einer unendlich dünnen Schicht alle Waſſertheilchen einander parallel bewegen, muß man annehmen, wenn man über dieſe Gegenſtände Berechnungen anſtellen will, und es iſt eine Vorausſetzung von eben der Art,

wie das parallele Sinken horizontaler Schichten (173; I.).

564. Also kann man sagen: Das Wasser gehe bey Cc nach der Richtung ID heraus (560) die Geschwindigkeit v, mit der es nach dieser Richtung herausgeht, zerlege man in einen verticalen und horizontalen Theil, so verhält sich v zum verticalen Theile = α : 1 der verticale Theil ist also $\frac{v}{\alpha}$. Mit dieser Geschwindigkeit entfernt sich das Wasser von der Horizontallinie BC, indem es mit v nach ID fortgeht.

Joh. Bernoulli nennt dieses subuelocitatem verticalem; wie leicht zu sehen ist, zur Nachahmung der Subtangente. Es braucht wohl keine neue Benennung, da man jede schiefe Bewegung oder Geschwindigkeit, in eine verticale und eine horizontale zerlegen kann (Höh. Mech. I. Abschn. 174.).

Eben so ist $\frac{udt}{ds}$ die verticale Geschwindigkeit des Wassers in H; wenn es nach Hh die Geschwindigkeit u hat.

565. Wie sich diese Geschwindigkeit u im Canale wegen der unterschiedenen Weiten desselben ändern muß, lässt sich so übersehen: In der Zeit, in welcher das Wasser aus Ff in Mm kömmt, ist bey Cc so viel Wasser ausgelaufen, als in dem Prisma Fm enthalten war. Der Innhalt dieses Prisma ist ydt, und soll ein glei-

ches Prisma Cc zur Grundfläche haben, so ist desselben Höhe $\frac{ydt}{\omega}$. Soviel beträgt der Weg des Wassers, das durch Cc gegangen ist, nach der verticalen Richtung, soviel wäre nähmlich das Wassertheilchen, das in I war, tiefer, unten BC gekommen, indem das Wasser im Canale aus Ff in Mm kam. Dieser verticale Weg des Wassers bey Cc, verhält sich aber zu seinem schiefen Wege nach ID wie $1 : \alpha$, also hat das Wasser bey Cc in der angegebenen Zeit, nach ID den Weg $\frac{\alpha ydt}{\omega}$ gemacht. In eben der Zeit hat das Wasser bey Ff, nach der dasigen Lage der centrischen Linie, den Weg Hh, zurückgelegt. Und weil sich die Geschwindigkeiten verhalten, wie die Wege in einerley Zeit, so ist $v : u = \frac{\alpha ydt}{\omega} : ds$;

566. Dieses giebt $u = \frac{v.\omega ds}{\omega ydt}$ für die Geschwindigkeit des Wassers in Ff nach Hh; Und $\frac{v.\omega}{\alpha y}$ für desselben verticale Geschwindigkeit nach PR.

Für die erste Schicht bey Ee; ist $\frac{ds}{dt} = \beta$ und $y = h$; also die Geschwindigkeit derselbigen Schicht, nach der dasigen Tangente der centrischen

schen Linie; $\frac{\beta\omega v}{\alpha h}$ und ihre verticale Geschwindigkeit $\frac{\omega . v}{\alpha h}$.

567. Heisst dx der Weg, den das Wasser, das bey Cc ausfliesst, nach der Richtung ID zurücklegt, so ist $\frac{dx}{\alpha}$ der Weg, den es nach der verticalen Richtung zurücklegt, und des Wassers bey Ff, Weg nach der Richtung Hh, ist $\frac{u\,dx}{v} = \frac{\omega . dx . ds}{\alpha y dt}$, sein Weg nach der verticalen Richtung $\frac{\omega . dx}{\alpha y}$.

568. Indem das Wasser durch den Canal geht, ändert sich seine Geschwindigkeit beständig, vermöge der Kraft, von der seine Bewegung ursprünglich herrührt, z. E. der Schwere, wenn es schwer ist, der Gewalt, mit der es etwa vermittelst eines Kolbens bey Ee, getrieben würde, wenn es blos träge wäre, beyder Kräfte zusammen, wenn z. E. schweres Wasser, noch vermittelst einer Kraft, die einen Kolben drückt, fortgetrieben würde. Nächst diesem würken auch die Wassertheilchen, auf unzählige Art in einander, nachdem z. E. durch die Figur der Röhre, Wassertheilchen anders, als sie gehen wollten, zu gehen genöthigt, dadurch andere zu treiben veranlasst werden u. s. w.

569 Ohne alle diese unterschiedene Kräfte und Wirkungen aus einander zu setzen, welches wohl unmöglich seyn würde, kann man so verfahren: wenn das Wasser der Schicht Fm seine Geschwindigkeit um du verändert, so setzt dieses in jedem Wassertheilchen dieser Schicht eine beschleunigende Kraft $\frac{udu}{2gds}$ voraus; (wie in 447; das dortige dx ist hier ds) diese beschleunigende Kraft, entsteht aus allen solchen Wirkungen, dergleichen ich angedeutet habe. Sie giebt für diese Schicht dir bewegende Kraft $\frac{yududt}{2gds}$ nach der Richtung Hh;

570. Dieses mit $\frac{ds}{dt}$ multiplicirt, giebt die bewegende Kraft $\frac{yudu}{2g}$ nach der verticalen Richtung, welche jener gleichgültig wäre; Ein verticaler Druck nähmlich auf Ff, niederwärts, von der jetzt angegebenen Stärke, und ein Druck auf Mm, nach hH aufwärts gerichtet, von der im vorigen Absatze angegebenen Stärke, erhielten einander. Jene verursachte in der Wasserschicht, so etwas, wie das Gewicht eines schweren Körpers ist, der auf einer schiefen Fläche liegt, und dieser erhielte die respective Schwere.

571. Diese verticale bewegende Kraft (570 auf Ee übergetragen, giebt daselbst $\frac{h}{y} \cdot \frac{yudu}{2g} = \frac{hudu}{2g}$. Das Integral davon gehörig genommen, giebet die verticale bewegende Kraft in Ee, von welcher alle die verticalen bewegenden Kräfte der Schichten entstehen können, (wie in 449) weil nun aus jeder Schicht ihrer verticalen bewegenden Kraft, die zugehörige schiefe entsteht, so entstehen aus dem erwähnten Integrale die bewegenden Kräfte der Schichten, jede nach der dasigen Richtung der centrischen Linie.

572. Das Integral muß verschwinden, wenn Ff auf Ee fällt, oder wenn u die 566 angezeigte Grösse für die erste Schicht hat. Wenn also das Integral $\frac{hu^2}{4g} + \text{Const}$ gesetzt wird, so ist $\frac{\beta^2\omega^2v^2}{4g\alpha^2.h} + \text{Const} = 0$; und das verbesserte Integral $\frac{h^2u^2\alpha^2 - \beta^2\omega^2.v^2}{4g\alpha^2h}$; dieses gäbe die bewegende Kraft in Ee, von der alle bewegenden Kräfte von Ee bis Mm herrühren könnten. Die bewegende Kraft in Ee, von der alle bewegenden Kräfte durch den ganzen Canal herrühren könnten, findet sich also, wenn man $u = v$ setzt, und ist $\frac{v^2(\alpha^2h^2 - \beta^2.\omega^2)}{4g\alpha^2h}$

573. Aus dieser bewegenden Kraft in Ee, wird also dasjenige in den unterschiedenen Schichten des Canals erfolgen, was in denselben erfolgen muß, indem das Wasser mit der Geschwindigkeit v ausfliesst. Bernoulli nennt sie, die statische, oder lieber hydrostatische Kraft, weil sie blos durch einen Uebertrag nach den Vorschriften der Hydrostatik gefunden wird, und blos das Bestreben des Wassers, aus der Stelle einer Schicht, in die Stelle der andern überzugehen, angiebt, ohne auf die Aenderung der Geschwindigkeit beym Ausflusse zu sehen.

574. Man sieht leicht, daß dieses die beym prismatischen Gefässe (455; VI.) so genannte Kraft durch den Strudel ist. Für dieses Gefäß wäre $\alpha = \beta = 1$; $\omega = m$ und so käme die dortige Formel.

Wo die Geschwindigkeit einer Schicht in der andern ihre, bey einer beständigen Krümmung des Canals nicht plötzlich, sondern nach dem Gesetze der Stetigkeit übergeht, da entsteht kein Strudel, und doch berechnet B. hier auch eine solche bewegende Kraft. Also erhellt, daß er von dem Strudel ohngefähr, wie ich (472) gedacht hat.

575. Nun ist übrig, zu betrachten, was vorgehen muß, wenn sich die Geschwindigkeit des Ausflusses ändert. Hiebey werde ich folgendes vorläufig erinnern:

Wenn P eine willkührliche oder bestimmte Stelle der Verticallinie AP ist, (wie eine Abscisse

einer krummen Linie, da, was man von ihr sagt, von jeder Abscisse gilt, da man aber doch eine gewisse Abscisse zu einer gewissen Absicht betrachten kann,) so giebt es im Canale eine bestimmte Ebene bey Ff, und eine ihr unendlich nahe bey Mm; welche zwischen sich einen gewissen Raum einschliessen. Dieser Raum bleibt immer an seiner Stelle, indem durch ihn immer ander und anderes Wasser durchgeht. Wenn ich vorhin sagte, die Wasserschicht Fm ändere ihre Geschwindigkeit, so geschahe das deßwegen, weil diese Menge Wasser, die jetzo den Raum Fm einnimmt, in einen andern Raum kömmt. Diese Aenderung der Geschwindigkeit muß erfolgen, wenn auch v beym Auslaufe immer einerley bleibt.

Bliebe die Geschwindigkeit beym Auslaufe immer einerley, so hätte alles Wasser, das durch den Canal geht, allemahl eine gewisse Geschwindigkeit, wenn es im Raume Fm ist, anders als die, welche es hatte ehe es in diesen Raum kam, anders als die, welche es bekömmt, nach dem es diesen Raum verlassen hat. Die Geschwindigkeit in Fm, würde durch die Weite bey Ff bestimmt, und ist (566) angegeben.

Eben der angeführte Ausdruck dieser Geschwindigkeit aber, zeigt, daß sie anders wird, wenn die Geschwindigkeit des Ausflusses anders wird.

Also kann u die Geschwindigkeit einer gegebenen Menge Wasser bedeuten, das jetzo in Fm ist, einige Zeit darauf in Nl kömmt, und

endlich ausfliesst. Dieses u ändert sich nach der Weite des Canals, bey einerley v, es ändert sich wegen des Raumes, den einerley Wasser nach und nach einnimmt, und so ist es bisher betrachtet worden.

576. Aendert sich aber die Geschwindigkeit des Ausflusses, so kann man fragen: Was hat das Wasser, das jetzo im Raume Fm ist, für eine Geschwindigkeit, indem das bey Cc; mit v ausfliesst, und was hat anderes Wasser, das gleich darauf in Fm ist, daselbst für eine Geschwindigkeit, indem das bey Cc, mit v + dv ausfliesst? Hier ändert sich also die Geschwindigkeit in einerley Raume wegen der veränderten Geschwindigkeit des Ausflusses.

Diese Geschwindigkeit, die immer anderes und anderes Wasser, in einerley Raume Fm hat, so wie sie der Geschwindigkeit v des Ausflusses zugehört, will ich U nennen.

577. Also ist, nach (566) $U = \frac{v.\omega ds}{\alpha y dt}$ deswegen aber sind U und u nicht einerley, weil sich u mit y ändert, U aber bey einerley y bleibt.

Eben so ist auch $U + dU = (v + dv).\frac{\omega ds}{\alpha y dt}$;

Folglich $dU = \frac{\omega.dvds}{\alpha y dt}$ Weil sich nun mit U eben wie mit u; in der Zeit der Weg ds zurücklegen läßt, in welcher das Wasser, das bey Cc ausfliesst, den Weg dx zurücklegt (567) so ist, wie

in (569) die beschleunigende Kraft, die erfodert wird U um dU zu ändern, $\frac{UdU}{2gds} = \frac{\omega^2 \text{ v. d v. d s}}{\alpha^2 y^2 dt^2 . 2g}$

$= \frac{\omega . v d v d s}{\alpha y dx dt . 2g}$ weil das Wasserprisma, das in dieser Zeit durch Cc gelaufen ist, $\frac{\omega . dx}{\alpha} = y dt$ (565; 567).

578 Diese beschleunigende Kraft wirkt in jedes Wassertheilchen, das sich im Raume Fm befindet, indem sich beym Ausflusse v in dv ändert.

Aus ihr folgt in dem Wasser, das sich in diesem Raume befindet, die bewegende Kraft $\frac{\omega . v dv ds}{2g . \alpha dx}$ nach der Richtung Hh; diese giebt (wie 570.) die verticale bewegende Kraft $\frac{\omega . v . dv . ds^2}{2g . \alpha dx dt}$, und diese, auf Ee übertragen, giebt $\frac{h . \omega . v dv . ds^2}{2g . \alpha y dx dt}$, für die bewegende Kraft in Ee, aus der sie entstehen kann, wie (571).

579. Zu eben der Zeit, da sich dieses v, um eben das dv ändert, hätte, in einem andern Raume NI, das dasige Wasser eine andere Geschwindigkeit wie U in Fm; diese Geschwindigkeit und ihr Differential, würden durch eben das v, und dv, so bestimmt wie U, und dU; nur wären, statt der dortigen y, ds, dt, hier jeder Querschnitt

bey Nn, Vv, TS. Diese Geschwindigkeit, und ihre Aenderung, gäbe eben so in diesem Wasser eine beschleunigende Kraft, eine bewegende nach Vv, und eine bewegende verticale; und die letztere in Ee übergetragen, gäbe daselbst die Kraft, von der sie entstehen kann.

So erhellt, daß man sich, bey einerley v, dv, und dx, für jeden Raum wie Fm, eine bewegende Kraft in Ee übergetragen vorstellen kann, so daß sich für einen andern Raum nur y, dt, ds, änderten.

Das heisst, die Summe aller bewegenden Kräfte in Ee, aus denen zusammen die bewegenden Kräfte in allem Wasser, das in allen den Räumen, wie Ff des Canals ist, entstehen können, findet sich so, daß man den Ausdruck der übergetragenen Kraft (578) dergestalt integrirt, daß v, dv, dx, unveränderlich, und nur y, ds, dt, veränderlich sind.

Dieses Integral ist also $\frac{h.\omega.vdv}{2g.\alpha.dx}\int\frac{ds^2}{ydt}$.

580. Die Kraft in Ee, welche durch dieses Integral angegeben wird, heisst B. die hydraulische Kraft, zum Unterschiede von der hydrostatischen (573). Sie befindet sich bey wirklicher Beschleunigung des Ausflusses.

581. Man sieht wiederum leicht, daß diese hydraulische Kraft auch schon beym prismatischen

Gefässe vorgekommen ist. Es ist nähmlich

hier	h	ω	α	y	ds = dt
455; XVI	h	m	1	h	Pp (46 Fig.)

also hier $\frac{ds^2}{ydt}$ dorten $\frac{Pp}{h}$ das Integral davon $\frac{a}{h}$ giebt mit $\frac{h.m.vdv}{2gdx}$ multiplicirt, $\frac{amvdv}{2gdx}$ wie dorten, wenn $dx = vdt$ setzt.

582. Aus der Art, wie man auf das Integral (579) gekommen ist, erhellt, daß $\int \frac{ds^2}{ydt}$ so muß genommen werden, daß es verschwindet, wenn Ff auf Ee fällt, und wenn man es auf diese Art verbessert hat, setzt man darinnen $y = \omega$. So eingerichtet mag es M heissen, alsdenn ist das Integral (579) $\frac{h.\omega.vdv}{2g.\alpha dx}$. M

583. Man nimmt also wieder folgendes an: Das Wasser in der Röhre sey blos träge; Eine Kraft, die auf Ee wirkt, so stark, als das Integral am Ende (572) anzeigt, verursacht, daß es bey Cc mit der Geschwindigkeit v ausfliesst; Eine Kraft, die auf Ee wirkt, so stark, als das Integral (582) anzeigt, verursacht, daß sich diese Geschwindigkeit um dv ändert. Beyde Kräfte zusammen, verursachen also, daß das Wasser bey Cc mit einer veränderlichen Geschwindigkeit v ausfliesst.

584. Ist das Wasser in der Röhre schwer und ruhig, so leidet die Fläche bey Cc von der

Last

Last des über ihr befindlichen Wassers einen Druck, der sich durch das Gewicht einer Wassersäule $= a.\omega$ ausdrucken lässt, wenn $AB = a$; so stark diese Fläche solchergestalt von schwerem, ruhenden Wasser gedruckt wird, so stark wird sie auch von blos trägem Wasser gedruckt, auf dessen Oberfläche bey Ee etwa ein Kolben, mit der Kraft $\frac{h}{\omega}.a.\omega = ha$ wirkte. Das erhellt gleich unmittelbar hier durch solche Schlüsse, wie (478; IX.) sind vorgetragen worden, und ist auch für gegenwärtige Untersuchung besonders (561) dargethan worden.

585. Nimmt man also ferner an: das Wasser fliesst in Cc auf einerley Art aus, wenn Cc, einerley Druck leidet, der Druck mag herrühren woher er will, so wird sich nachstehendes folgern lassen:

586. Die beyden in (583) angezeigten Kräfte zusammen, machen, daß blos träges Wasser, bey Cc mit der veränderlichen Geschwindigkeit v ausflösse.

587. Wenn der Canal immer voll schweres Wasser erhalten wird, so ist die Ursache, warum dieses Wasser, bey Cc mit einer gewissen Geschwindigkeit in jedem Augenblicke ausfliesst, lediglich in den Wirkungen der Schwere in das Wasser zu suchen, das diesen Augenblick im Canale enthalten ist.

588.

588. Von diesen Wirkungen der Schwere, läßt sich soviel angeben: Aus ihnen erfolgt, daß die Fläche bey Cc, wenn das schwere Wasser in der Röhre ruhete, so gedruckt würde, als wenn das Wasser nur träg wäre, und auf Ee mit der Kraft ha gedruckt würde.

589. Die Geschwindigkeit des bewegten Wassers bey C, entstehet ursprünglich aus dem Drucke, den es von dem über ihm befindlichen schweren Wasser leidet. Eigentlich entsteht, aus den Wirkungen der beschleunigenden Kraft der Schwere, in alle Theilchen einer gewissen Masse zusammen, ein Druck; Was denselben aufhält, daß sich die Masse nicht bewegen kann, trägt ein Gewicht. Wird der Druck nicht aufgehalten, so entsteht aus seiner Fortsetzung durch viele Augenblicke nach einander, Fall, mit einer wachsenden Geschwindigkeit. Ich dächte, dieses stimmte mit den Gründen überein, auf denen die ganze Statik und Mechanik beruhen, und wird sich durch das erläutern lassen, was ich Höh. Mech. I. Abschn. 61; III. Abschn. 180, umständlicher ausgeführt habe.

590. Hieraus, sollte ich glauben, liesse sich nachstehendes schliessen.

Wenn ein Druck, so stark als derjenige, den stillstehendes schweres Wasser auf Cc ausübt, durch irgend eine andere Kraft, als durch die Schwere im trägen Wasser, unterhalten wird, so entstehet in dem Wasser bey Cc eben die Bewegung,

wegung, die entstehet, wenn schweres Wasser daselbst ausfliesst.

Ich überlege nähmlich, daß Bewegung und die mit ihr verbundene Geschwindigkeit, aus fortgesetztem Drucke entsteht, wenn nicht eine unbewegliche Hinderniß den Druck beständig aufhält, und daß also in dem Wasser bey Cc, aus einerley fortgesetztem Drucke, einerley Bewegung entstehen wird, dieser Druck mag durch beständige Wirkungen der Schwere, oder auf andere Art fortgesetzt werden.

591. Also werde ich schliessen, verursacht die Kraft ha auf Ee (588) eben den Ausfluß blos trägen Wassers durch Cc, den die Schwere bey schwerem Wasser verursachte.

592. Der Ausfluß, blos trägen Wassers mit der veränderlichen Geschwindigkeit v, würde durch die beyden Kräfte in Ee, die (583) angiebt, zusammen verursacht.

593. Sollen also diese beyden Kräfte zusammen, eben den Ausfluß verursachen, den die Schwere verursachet, so ist ihre Summe so groß, als ha (591).

594. Dieß giebt also die Gleichung

$$\frac{v^2(\alpha^2 h^2 - \beta^2 \omega^2)}{4g\alpha^2 h} \frac{}{} + \frac{h.\omega.v\,dv}{2g\alpha\,dx}.\ M = ah$$

595. Drückt man v, durch die zugehörige Höhe aus (458), so kömmt

$$\frac{z.(\alpha^2 h^2 - \beta^2 \omega^2)}{\alpha^2 h} \frac{}{} + \frac{h.\omega.dz}{\alpha\,dx}.\ M = ah.$$

Hier ist nichts veränderlich, als z und x, M ist eine unveränderliche Grösse (582).

596. Dieses giebt

$$dz = \frac{\alpha^2 a h^2 dx - (\alpha^2 h^2 - \beta^2 \omega^2) z dx}{\alpha h^2 \omega M}$$

Man kann diese Formel mit (An. Un. 411; I.) vergleichen und integriren. S. unten (637).

Folgerungen, wenn sich die Geschwindigkeit nicht ändert.

597. Alsdenn ist $dz = o$ und $z = \frac{\alpha^2 h^2 a}{\alpha^2 h^2 - \beta^2 \omega^2}$

wie man gleich gefunden hätte, wenn die hydrostatische Kraft (572) allein wäre $= ah$ gesetzt worden; (wie in 455; VII. und 457.)

598. Dieser Werth von z, lässt sich ferner so ausdrucken

$$z = \frac{a}{1 - \left(\frac{\beta \omega}{\alpha h}\right)^2}$$

und bleibt also der Werth von z, einerley, wenn nur a, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\omega}{h}$, einer bleiben, das Wasser fliesst also aus zwey Gefässen, die beyde immer voll erhalten werden, mit einerley beständigen Geschwindigkeit, wenn folgende Umstände für beyde einerley sind I) die Wasserhöhe a, II) die Verhältniß der obern und untern Weite $h : \omega$; das eine Gefäß

fäß kann unten weiter seyn, als das andere, nur muß es in eben der Verhältniß auch oben weiter seyn. III) Die Verhältniß $\beta : \alpha$. (562) diese kömmt auf der Beschaffenheit der centrischen Linie bey Ee, Cc an. Man begreift, daß diese drey Umstände, bey zwey Gefässen einerley seyn können, obgleich sonst die Gestalten der Gefässe gar sehr unterschieden sind.

Einige Fälle, wo die centrische Linie gerade ist.

599. I. Wie man von jeder ebenen Figur den Schwerpunct finden kann; so sey H der Schwerpunct des Querschnittes des Canals bey Ff, alsdenn ist H in der centrischen Linie (559).

II. Man stelle einen ungleichseitigen Kegel, so daß seine Grundfläche bey Ee horizontal liegt, die Spitze niederwärts gekehrt ist, und schneide von ihm ein Stück mit einer Ebene weg, die der horizontalen Grundfläche parallel liegt. Das übrige Kegelstück, sey zwischen den horizontalen Ebenen bey Ee, Cc, enthalten, so kann es einen solchen Canal vorstellen Desselben centrische Linie, ist das Stück der Axe des abgekürzten Kegels, zwischen den beyden Grundflächen, also eine schiefe gerade Linie.

III. Es ist klar, daß man sich statt dieses Kegels, jeden andern Körper vorstellen kann, dessen Querschnitte alle einander ähnlich sind (Alg. 542).

IV. Und so auch jedes schiefe Prisma, weil da alle Querschnitte völlig einerley sind.

V. Ich gebe solche Exempel, wo die centrische Linie gerade, und doch schief ist, wenn von einem Stücke eines gleichseitigen Kegels, von einem senkrechten Prisma u. d. g. die Axen vertical gestellt werden, so ist die centrische Linie zugleich gerade und vertical.

Die Gleichung (596), wenn die centrische Linie gerade ist.

600. Alsdenn ist $\alpha = \beta = \frac{ds}{dt}$ (560; 562)

also in (582) $\frac{ds^2}{y\,dt} = \frac{\alpha^2\,dt}{y}$, das Integral davon $M = \alpha^2 \int \frac{dt}{y}$ also kömmt in (596)

$$dz = \frac{a h^2\,dx - (h^2 - \omega^2)\,z\,dx}{\alpha h^2\,\omega . \int \frac{dt}{y}}$$

Die beständige Geschwindigkeit, wenn die centrische Linie gerade ist.

601. Aus (597) wird $z = \frac{h^2 a}{h^2 - \omega^2}$, welches also einerley bleibt, die centrische Linie mag vertical oder schief seyn.

Aus

Aus zwey Kegelstücken, deren eines zu einem gleichseitigen Kegel, das andere zu einem ungleichseitigen gehörte, flösse das Wasser mit gleicher beständiger Geschwindigkeit, wenn beyde Grundflächen sich bey einem wie bey dem anderen verhielten, und die obere Grundfläche über die untere, nach der Verticallinie bey einem so hoch stünde, als bey dem andern.

Dieß ist nur ein besonderer Fall von 598.

Aenderung der Geschwindigkeit, wenn die Richtung des einfliessenden und ausfliessenden Wassers etwas geändert wird.

602. Man stelle sich vor, an die bisher betrachtete Röhre, werden (51 Fig.) oben über Ee, unten, unter Cc, ganz kurze Ansätze gebracht, etwa so, daß der untere Ansatz Cpqc, wo er aufhört, vertical ist, da die Röhre bey Cc in einer schiefen Richtung aufhörte; eben so bringe man über Ee einen Ansatz an, der zu oberst, wo das Wasser in ihn tritt, auch verticale Wände habe. Nun besteht also der Canal aus dem vorigen Stücke zwischen Ee u. Cc, u. beyden Ansätzen; h, ω, sind nun die äusern Weiten beyder Ansätze, und das vorige a, ist um soviel grösser, soviel es die beyden Ansätze vermehren. Man begreift aber leicht, daß die Ansätze so kurz seyn können, daß dadurch a nicht merklich verändert wird, daß

auch ihre äuserſten Weiten ſo groß ſeyn können, als vorhin die Weiten bey Ee, Cc waren, oder doch eben die Verhältniß haben können. Untrr dieſen Umſtänden alſo könnte man wohl vermuthen, das Waſſer würde bey pq mit eben der Geſchwindigkeit ausflieſſen, wie vorhin bey Cc.

Wenn man aber die Gleichung (596) betrachtet, ſo findet ſich, daß ſich darinnen dasjenige beträchtlich ändert, was die Richtung der centriſchen Linie beym Einfluſſe und beym Ausfluſſe betrifft. Es wäre nähmlich nun $\alpha = \beta = 1$, alſo änderte ſich z nach ganz andern Geſetzen als zuvor, und für die beſtändige Geſchwindigkeit wäre es in (597) allemahl $= \frac{h^2 a}{h^2 - \omega^2}$, wie wenn die Röhre ein ſenkrechtes Priſma wäre (459).

603. Hieraus wird begreiflich, wie ſehr ſich der Ausfluß des Waſſers ändern kann, wenn man nur ſeine Richtung beym Ausfluſſe ändert, und dieſe kann ſo geſchehen, daß man davon keine merklichen Aenderungen in der Geſchwindigkeit des Waſſers erwarten ſollte. Bernoulli beruft ſich dieſe Erinnerung der Theorie zu erläutern, auf einige Verſuche Polenis, die er nicht deutlich angiebt, es ſind aber ohne Zweifel die 120 u. f. beygebrachten, beſonders der 14; 15; 16, u. d. g. in (127). Man ſ. auch (136).

604. Wenn aber Bernoulli (Hydraul. P. II. §. VII. Cor. 4.) Polenis 15 u. 16 Verſuch gemeynt hat, wie ich nicht anders urtheilen kann,

ſo

so ist er in zwey Dingen nicht recht von der eigentlichen Beschaffenheit unterrichtet gewesen. Er erzählt erstlich die Sache so: Poleni habe von ungefähr wahrgenommen, daß durch eine durchlöcherte Platte nicht gleich viel Wasser geflossen sey, nachdem man die eine oder die andere Seite der Platte gegen das Gefäß gekehret habe, und nun habe man bey genauerer Betrachtung das Loch kegelförmig befunden.

Poleni aber hatte das Loch mit Vorsatze kegelförmig gemacht.

Ferner sagt Bernoulli: es sey leicht zu sehen, warum das Loch mehr Wasser gegeben, wenn seine grössere Weite auswärts gekehrt gewesen, denn der herausgehende Wasserstrahl sey alsdenn dicker gewesen, und es sey auch geschwinder gelaufen, das folge daraus, weil $z = \frac{h^2 a}{h^2 - \omega^2}$ grösser werde, wenn alles übrige bleibt, nur ω kleiner wird, welches B. hier für die Weite der Mündung annimmt, wo das Wasser ausfliesst.

Bernoulli hat sich aber nur eingebildet, wie die Erfahrung müsste gewesen seyn, seine Theorie zu bestätigen. Die Versuche zeigen gerade das Gegentheil. Im 15; floß durch die engere Oeffnung soviel Wasser innerhalb $1\frac{1}{4}$ Minute, als im 16 durch die weitere innerhalb $1\frac{1}{2}$ Min. Also floß es durch die weitere langsamer.

Das bestreitet indessen B. Theorie nicht, weil sich die Geschwindigkeit des ausfliessenden-

Wassers, durch soviel uns vielleicht grossentheils noch unbekannte Ursachen ändern kann. Nur wird die Theorie auch hierdurch nicht bestätiget.

605. Aber es kann selbst der Zweifel entstehen, mit was für Rechte B. hier $z = \frac{h^2 a}{h^2 - \omega^2}$ setzt, gerade bey einer Gelegenheit, da er zeigen wollte, wie wichtig es ist, auf die Richtung der centrischen Linie beym Ausflusse zu sehen. Hier aber war die centrische Linie daselbst ganz oder beynahe horizontal, denn man sieht aus der Beschreibung von Polenis Versuchen, daß die Oeffnung in der Seite des Gefässes war. Wenn auch B daran nicht gedacht, sondern sich vielleicht die Oeffnung im Boden vorgestellt hat, so entsteht doch natürlich hiebey die Frage, was die Formel (597) giebt, wenn die Röhre bey Cc horizontal liegt.

606. Alsdenn müsste α unendlich seyn (562) und da scheint es, als würde $z = a$; Welches doch wohl nicht allemahl seyn kann, nur gelten wird, wenn die Oeffnung der Röhre, durch welches das Wasser ausfliesst, in Vergleichung mit der Wasserhöhe geringe ist, und sonst dem widerspräche, was (490) aus Gründen ist hergeleitet worden, die mit gegenwärtigen völlig einerley sind.

Die Querschnitte sind horizontal angenommen worden; Wenn also die Röhre horizontal ist, so träfe eine horizontale Ebene durch eine solche

Stel-

Stelle C in der einen Wand gelegt, nie an die andere, und solchergestalt wäre ω unendlich, man dürfte also im Werthe von z, des Divisors zweyten Theil nicht weglassen; So würde wenigstens das nicht folgen, was den vorigen Lehren zuwider ist.

607. Man stelle sich, wo das Wasser aus der Röhre ausfliesst, durch I eine Ebene, bey Kk (52 F.) senkrecht auf die Richtung des Wassers ID vor, so groß, daß sie gleich daselbst die Oeffnung der Röhre verschliessen könnte. Diese Fläche heisse m; Sie wäre da der eigentliche Querschnitt, die eigentliche Oeffnung der Röhre. Senkrecht durch sie geht alles Wasser, das durch den Querschnitt Cc schief durchgeht. In der Zeit, da das Wasser den Weg ID zurücklegt, geht also durch m, die Wassermenge m. ID; durch ω; die Wassermenge $\frac{\omega . ID}{\alpha}$ (562). Weil nun beyde Wassermengen gleich sind, so ist $\omega = m . \alpha$. Dieses in 597 gesetzt, giebt $z = \frac{h^2 a}{h^2 - \beta^2 m^2}$.

Gewöhnlichermassen ist $\beta = 1$, sonst könnte durch die sich auch β wegschaffen liesse.

man sich auch bey G eine Fläche $= \frac{h}{\beta}$ vorstellen,

608. Bernoulli erinnert selbst am Ende der Vorrede, daß man sich nicht eben nur wagrechte Schichten im Wasser vorstellen dürfe. Man könne es auch in Schichten von anderer Lage abtheilen, z. E. solche, die auf die Richtung seiner Be-

wegung senkrecht stehen, und also vertical sind, wenn das Wasser in horizontalen Röhren fliesst; Dieses ist destomehr verstattet, je mehr das Wasser selbst durch die Lage, in die es sich setzt, dazu Anlaß giebt; da z. E. in engen Röhren das Wasser (wegen des Anhängens an die Röhre) sich so stellt, daß seine äussersten Flächen dem Querschnitte der Röhre parallel sind, wenn die Röhre gleich schief oder horizontal gehalten wird.

Ueber den Druck, den durchfliessendes Wasser auf die Seiten des Canals ausübt.

609. Der Druck des Wassers auf die Seitenwände des Gefässes, rührt bekanntermassen daher, weil es einem Drucke, den es von oben leidet, und unten nicht ausweichen kann, seitwärts auszuweichen sucht. Wenn man also zu wissen verlangt, wie stark das Wasser, das durch den Canal Ec fliesst, an irgend einer Stelle z. E. bey F, auf die Seitenwand druckt, wird man sich die Sache etwa vorstellen können: Die Wasserschicht, die jetzo in Fm ist, wird von dem obern Wasser gedruckt, und durch den Druck, den sie leidet und fortpflanzt, treibt sie das unter ihr befindliche Wasser fort

610. Das darunter befindliche Wasser, weicht freylich dem Drucke aus, aber es kömmt an seine Stelle immer anderes, das von dem jedesmahl im Raume Fm befindlichen Wasser,

ebenfalls gedruckt werden muß, so stark als vorhin, wenn v ungeändert bleibt, oder mit veränderlicher Stärke, nachdem v sich ändert.

Also wird man sich vorstellen können, das Wasser, das jeden Augenblick im Raume Fm ist, drucke auf Mm, wie es auf eine unbewegliche Grundfläche drucken würde. Denn ob gleich das, was unter ihm bey Mm ist, fortgeht, so kömmt doch an dessen Stelle wieder was anderes, das auch gedruckt werden muß.

Ist es nicht einerley? ob ein Ding immer an einer Stelle bleibt, oder ob an diese Stelle ein ander Ding kömmt, eben das zu leiden, was das vorige gelitten hätte, wenn es da geblieben wäre.

611. So wäre die Frage darauf gebracht, wie stark wird das Wasser, das jeden Augenblick im Raume Fm ist, von dem über ihm befindlichen Wasser gedruckt?

612. Das heisst offenbar soviel: Wenn das Wasser, das sich über Ff, von E bis f befindet, plötzlich wegkäme, und doch das Wasser von F bis c, seine Bewegung wenigstens den nächsten Augenblick darauf eben so fortsetzen sollte wie vorhin, was müsste statt dieses weggekommenen Wassers, für eine Kraft auf das Wasser in Fm wirken?

613. Man sehe also das Wasser in Fm als die oberste Wasserschicht an, wie vorhin das Wasser bey Ee war; man suche, was auf Fm für eine be-

bewegende Kraft muß angebracht werden, in dem Wasser durch Fc zu bewirken, daß es bey Cc mit der veränderlichen Geschwindigkeit v; ausfliesst. Man bringe also das von (558) an gebrauchte Verfahren, hier so an, daß Fm als die oberste Schicht angesehen wird.

614. Zu dieser Absicht, sey bey Nl eine Wasserschicht, so daß Nl jeden Raum zwischen F und c bedeuten kann, wie vorhin Fm jeden Raum zwischen E und c bedeutete. Die unbestimmte Weite dieser Wasserschicht, der Querschnitt bey Nn heisse r, wie vorhin y dergleichen unbestimmter Querschnitt bey Ff war; Noch können ds; dt, eben so gut Vv, TS, bedeuten, wie sie vorhin Hh, PR, bedeuteten, nähmlich unbestimmte Elemente der centrischen Linie und der Wasserhöhe, ohne daß man etwa deßwegen glaubte Vv = Hh; TS = PR setzen zu müssen, welches beydes zusammen wenigstens nicht anginge, als wenn die centrische Linie gerade ist.

615. Man suche also, nach 472 u. 479. was für eine hydrostatische und hydraulische Kraft auf Ff müsste angebracht werden damit der Ausfluß bey Cc eben so bliebe, wie er bisher ist angenommen worden. So werden sich folgende Vergleichungen geben.

dorten	h	β
hier	y	$\frac{Hh}{PR}$

Die

Die übrigen Benennungen bleiben ungeändert, weil sie sich auf Grössen beym Auslaufe beziehen.

616. So wird hier aus (572) die hydrostatische Kraft $\frac{v^2.(\alpha^2 y^2 - \omega^2.Hh^2 : PR^2)}{4g\alpha^2.y}$ und aus (579) die hydraulische $\frac{y.\omega.v.dv}{2g\alpha dx} \int \frac{ds^2}{r.dt}$

617. Das Integral in der hydraulischen Kraft, muß so genommen werden, daß es verschwindet, wenn man sich vorstellt, Nn falle auf Ff; Nach dieser Verbesserung setze man in ihm $r = \omega$, und was solchergestalt herauskömmt, heisse N, so ist die hydraulische Kraft (nach dem Verfahren in 582) $\frac{y.\omega.vdv}{2g\alpha dx}.N.$

618. I. N, ist durch die unveränderlichen Grössen gegeben, die die Figur des Canals bestimmen, und durch y, welches bey dem Verfahren, wie man N findet, als unveränderlich angesehen wird. Den Werth von N also zu bestimmen, wie ihn die hydraulische Kraft bey Ff erfodert, setzt man statt y die Weite des Canals bey Ff, und wollte man eben so, den Druck an irgend einer andern Stelle des Canals z. E. zwischen F und E bestimm, so fände man die dasige hydraulische Kraft, wenn man in 617; statt y die dasige Weite des Canals setzt, So ist die hydraulische Kraft hier eine Grösse, die sich ändert, indem sich y ändert, nachdem diese Kraft

nähm-

nähmlich für die oder jene Stelle des Canals gesucht wird; Sonst ändert sich in dieser hydraulischen Kraft nichts, denn die veränderlichen Grössen, die zum Ausflusse gehören, werder hier als beständig angesehen, da man annimmt, daß der Ausfluß mit eben der nnveränderlichen, oder mit der eben so geänderten Geschwindigkeit fortgeht, und nur sucht, was für Kräfte auf einer unbestimmten Wasserschicht des Canals nöthig sind, den Ausfluß eben so zu erhalten, als ob der Canal voll wäre.

II. Eben so, ist in der hydrostatischen Kraft, alles unveränderlich, sobald man die Stelle der Schicht Fm im Canale bestimmt hat; läßt man sich aber diese ändern, so kömmt für ein anderes y, und die ihm zugehörigen Hh; PR; eine andere hydrostatische Kraft bey eben dem v.

619. Man kann also unter Hh jedes ds, unter PR jedes dt verstehen, und die hydrostatische Kraft so ausdrucken $\frac{v^2.(\alpha^2 y^2 - \omega^2.ds^2:dt^2)}{4.g.\alpha^2.y}$; da wird denn allemahl für die Verhältniß ds:dt diejenige genommen werden, die an der Stelle des Canals, wo man den Druck suchen will, statt findet.

Ich habe diesen Ausdruck der hydrostatischen Kraft nicht gleich (616) geben wollen, weil ich da auch ds, dt, für Vv, TS, brachte. Nun aber, nachdem man N gefunden hat, sind ds, dt, in der Bedeutung für Vv, TS, nicht mehr im Ausdrucke

der

der hydraulischen Kraft vorhanden, und es macht also keine Zweydeutigkeit, wenn man sie für Hh, PR, in derjenigen Schicht des Canals braucht, die jetzo als die oberste angesehen wird.

620. Jeder Wasserschicht zwischen F und C ihr Gewicht auf Ff als jetzo die oberste Fläche getragen, giebt eine gewisse bewegende Kraft, von deren Drucke auf Ff es entstehen kann; und die Summe aller dieser bewegenden Kräfte, oder der Druck auf Ff, von welcher die Gewichte aller angegebener Wasserschichten entstehen können, ist y. PB. Dieß ist völlig einerley Verfahren mit (561) nur PB, y, statt AB, h, gesetzt.

Ich will PB = q nennen, so heisst das hier berechnete y. q.

621. B. setzt es = y. t, und nennt also BP = t; Weil man aber zuvor das veränderliche in dem Canale von AE nach BC zu gerechnet, z. E. AP als eine Abscisse, AR als die nächste, PR als ihr Differential angesehen hat, so müsste man PR als — dt betrachten, wenn BP = t. Das ist im vorhergehenden nicht geschehen, und würde z. E. in 561 erfodert haben, ſ — h dt = Const — ht zu setzen, woraus o = Const — ha und das Integral h. (a — t) gefolgt wäre, welche allerdings für t = o auch ha wie dorten gegeben hätte; Um aber Mißverstand, der hierbey entstehen könnte, zu vermeiden, will ich lieber t von A an rechnen, da denn q = a — t das bey mir heisst, was B. nunmehr t nennt.

622.

622. Wenn also der Ausfluß bey Cc, durch den Druck bestimmt wird, den das Wasser daselbst leidet, so wird dieser Druck, wenn das Gefäß bis an Ee voll ist, aus zween Theilen bestehen; Sie werden folgende seyn.

I. Das Gewicht des Wassers in FC verursacht auf Cc einen gewissen Druck; Dieser ist so stark, als der, welchen die Kraft y.q auf Ff angebracht, auf Cc verursacht.

II. Die Fläche bey Ff litte von dem über ihr befindlichen Wasser einen gewissen Druck, den will ich P nennen (*), die Wirkung desselben pflanzt sich durch die unteren Wasserschichten bis Cc fort, und verursacht daselbst ebenfalls einen gewissen Druck.

Dieses beydes zusammen ist der Druck, den Cc leidet, indem daselbst der Ausfluß so wie angenommen wird, erfolgt.

623. Wenn aber der Ausfluß ohne das Wasser von Ee bis Ff, noch eben auf die angenommene Art erfolgen soll, so sind dazu auf Ff die beyden Kräfte (616) nöthig.

Also werden diese beyden Kräfte zusammen wohl soviel seyn, als die beyden (622) zusammen; oder es ist

$$\frac{v^2.(\alpha^2.y^2-\omega^2.ds^2:dt^2)}{4g\alpha^2y}+\frac{y.\omega.v.dv}{2g\alpha dx}.N=y.q+P.$$

624.

(*) B. nennt ihn π.

624. Nun ist P eben der Druck, der gesucht wird (611), wenn man also auf die bekannte Art, v durch z ausdruckt, so ist

$$\frac{z.(a^2.y^2-\omega^2.ds^2:dt^2)}{\alpha^2.y}+\frac{N.y.\omega.dz}{\alpha\,dx}-q.y=P.$$

Wo man $\frac{dz}{dx}$ aus (596) hat. Man s. unten (633).

625. Sollte eine Fläche so groß als Ff den gefundenen Druck $=P$ von über ihr stillstehendem schwerem Wasser leiden, so müsste über dieser Fläche eine Wassersäule stehen, deren Höhe $=\frac{P}{y}$ wäre.

Folglich druckt das bewegte Wasser auf eine Stelle der Wand der Röhre bey F, wie auf eben die Stelle schweres stillstehendes Wasser drucken würde, das über der Fläche Ff stünde, und die Höhe $\frac{P}{y}$ hätte.

626. Ist also bey F eine Oeffnung mit einer daran gefügten Röhre FS 53. Fig. so wird schweres stillstehendes Wasser in dieser Röhre durch den Druck des vorbeyfliessenden Wassers bis an R, so daß R über F um die Höhe $\frac{P}{y}$ erhoben ist.

627. Wenn das Wasser irgendwo an die Wände des Canals anstiesse, würde sich dadurch seine Geschwindigkeit und folglich der hier bestimmte Druck ändern. Wo es schnell in einem

sehr krummen Canale geht, bekömmt es eine starke Schwungkraft, und dadurch wird auch dieser Druck auf des Canals auswärts gebogene Wand stärker, auf die einwärts gebogene schwächer werden. Bernoulli räth daher, wenn jemand Versuche hierüber anstellen wollte, die Röhre (626) weder in die convexe noch in die concave Gegend des Canals zu setzen, sondern so, daß sie auf die Ebene, in der die Convexität und Concavität sind, senkrecht eingesetzt wird, und wenn diese Ebene nicht horizontal ist, muß die Röhre nachgehends, so viel als nöthig ist, gebogen werden, damit sie vertical wird.

628. Solche Untersuchungen über den Druck durchfliessenden Wassers auf die Wände des Canals, hat Hr. Daniel Bernoulli zuerst angestellt (*), auch vorgeschlagen, ihn durch Röhren zu zeigen, die man in die Wand einsetzte. Er nennt diese Untersuchung hydraulico-staticam. Es ist begreiflich, daß sie sich mit Nutzen auf viele praktische Fragen würde anwenden lassen, z. E. auf die Festigkeit der Röhren, die in (45) für stillstehendes Wasser ist betrachtet worden. Man sieht leicht, daß durchfliessendes nicht so stark drückt.

629. Gewöhnlich wird man den Druck suchen, wenn die Geschwindigkeit beständig angenommen wird; da ist alsdenn aus (624)

$$\frac{z.(\alpha^2 y^2 - \omega^2 . ds^2 : dt^2)}{\alpha^2 y} - qy = P.$$

630.

(*) Hydrodyn. Sect. XII.

630 Wenn die centrische Linie gerade ist, wird diese Gleichung aus (600) $\frac{z(y^2-\omega^2)}{y}-qy=P$, wo man auch z aus (601) setzen könnte.

631. Wenn ein Gefäß so hoch als ein anders ist, auch oben und unten so weit, als das andere oben und unten, endlich beyder Gefässe centrische Linien gerade sind, so ist die beständige Geschwindigkeit des Ausflusses bey einem so groß, als bey dem andern (601).

Ist nun das eine an einer Stelle, die um die Höhe q über seine unterste Oeffnung erhoben ist, so weit, als das andere, in gleicher Höhe über seiner untersten Grundfläche, daß also ein gewisses q und das ihm zugehörige y für beyde einerley sind, so ist auch da der Druck in beyden einerley (630).

632. Wäre also für jedes q, das y in einem Gefässe so groß als in dem andern, so litten zwo Stellen jede in einem Gefässe, die über ihre Grundflächen gleich viel erhoben sind, allemahl einerley Druck, und in Röhren, die man in diese Stellen einsetzte, würde das Wasser gleich hoch erhalten.

Wenn ein gleichseitiger und ein ungleichseitiger Kegel, gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind beyder Querschnitte in gleicher senkrechter Entfernung von der Grundfläche allemahl gleich (Geom. 61. S. 2. Zus.). Man durchschneide also diese beyden Kegel mit einer Ebene, die von ihren beyden Grundflächen gleich-

weit absteht, so erhält man ein paar abgekürzte Kegelstücke, die solche Gefässe vorstellen können.

633. Wenn man in (624) und (625) aus (596) den Werth von $\frac{dz}{dx}$ setzt, so erhält man

$$\frac{P}{y} = \frac{z.(\alpha^2 y^2 - \omega^2 ds^2 : dt^2)}{\alpha^2 . y^2} + \frac{N.(\alpha^2 . ah^2 - (\alpha^2 h^2 - \beta^2 \omega^2) z)}{\alpha^2 h^2 . M} - q.$$

634. Weil die Geschwindigkeit des Auslaufens nach und nach wächst, so kann man sie gleich im Anfange der Bewegung $= o$ setzen. Ist also $z = o$; so wird $\frac{P}{y} = \frac{Na}{M} - q$; Für die Höhe, auf welche das Wasser in der eingesetzten Röhre gleich im Anfang erhalten wird, wenn die Geschwindigkeit noch sehr gering ist.

635. Wer diese Berechnung nicht gemacht hat, könnte sich vorstellen: Wenn das Gefäß 53. Fig. anfangs bey Cc verschlossen ist, und nun daselbst geöffnet wird, so sey im ersten Augenblicke, der Druck noch bey F eben so stark, als vor der Eröffnung. Aber vor der Eröffnung, müsste das Wasser in der Röhre FS, nach den Gesetzen der Hydrostatik auf der Höhe a—q über F stehen, wenn Ee, Ff, um die Höhen a, q, über Cc erhoben sind. Nun erhellt, daß N (617) ein Theil des Integrals ist, davon M das ganze ist (582). Das Integral M erstreckt sich nähmlich

lich durch den ganzen Canal, und N durch das Stück cF; also ist $\frac{N.a}{M} < a$ und die Höhe, auf welcher das Wasser in der eingesetzten Röhre erhalten wird; kleiner, wenn das Wasser durch den Canal fliesst, als wenn es darinnen steht, auch gleich im ersten Augenblicke. Daß also so gleich, so bald der Ausfluß angeht, das Wasser vermöge der Schwere nicht so stark auf die Seitenwände druckt, als da es stille stand, sondern so gleich ein Theil der Schwere zum Forttreiben des Wassers angewandt wird.

636. Hiebey müsste man aber nach B. Erinnerung mit darauf sehen, ob die Voraussetzung gegenwärtiger Theorie allemahl statt findet, daß die Wasserschichten, auch wenn sie noch nicht wirklich bewegt werden, wagrecht sinken wollen (173; I.), und die Schwerpuncte derselben wie G, H, I, sich an jeder Stelle des Canals in der Mitte befinden. Wenn ein sehr weites Gefäß im Boden eine sehr enge Oeffnung hat, und wirklich nach B. Gedanken ein Strudel entsteht (455; II; III.) so macht dieser Strudel eine Art von Gefässe aus, das an das weitere angesetzt wäre (455; IV.). Setzte man nun in die Seitenwand des weiten Gefässes eine Röhre, um durch die Höhe des Wassers in ihr den Druck des im Gefässe vorbeyfliessenden Wassers auf diese Stelle der Seitenwand zu bestimmen, so könnte man zum Einsetzen eine solche Stelle wählen, wo das Wasser

um den Strudel stille stünde; da glaubt B. würde das Wasser in der eingesetzten Röhre durch seine Höhe den Druck nicht genau anzeigen, weil diese Röhre eigentlich in den Umfang des Strudels eingesetzt werden müsste, wenn sie in die Wand des Gefässes eingesetzt seyn sollte, da der Strudel als das Gefäß, das an das weitere gefügt ist, betrachtet wird. Weil man nun nicht weiß, wie weit sich der Strudel über der Fläche, wo das Wasser ausläuft, anfängt, so räth Bernoulli, die Röhre allemahl bis mitten ins Gefäß, also bis an die centrische Linie zu führen, und den Theil von ihr, der aus dem Gefässe herausragt, vertical aufwärts zu krümmen. So würden die zufälligen Ursachen, die an der äusern Fläche des Wassers den Druck ändern können, dergleichen (627) angeführt sind, hier keinen Irrthum machen. Der Theil der Röhre, die ins Gefäß hineinginge, müsste dünne seyn, um durch seine Dicke nicht die Bewegung des Wassers zu stören.

Von dem Wasser, das um den Strudel stehen bleibt, sollte ich sonst vermuthen, es würde auch den Druck fortpflanzen, den es von dem durchfliessenden Wasser leidet, und dadurch es selbst stillstehend erhalten wird, ohngefähr wie ich mir die Sache in (544) vorgestellt habe.

In=

Integration der Formel (596).

637. Sie giebt $\frac{ah^2\omega.M.dz}{\alpha^2ah^2-(\alpha^2h^2-\beta^2\omega^2)z}=dx$

oder $\frac{-\alpha h^2\omega M}{\alpha^2h^2-\beta^2\omega^2}.\frac{-(\alpha^2h^2-\beta^2\omega^2)dz}{\alpha^2ah^2-(\alpha^2h^2-\beta^2\omega^2)z}=dx.$

Man wird die Bedeutung der Buchstaben, die ich hier statt der so sehr zusammengesetzten Grössen brauche, leicht verstehen, wenn ich die Gleichung so ausdrucke: $-c.\frac{-ndz}{m-nz}=dx$; Also $-c.\log(m-nz)+Const=x$ und weil x und z zugleich verschwinden, also $+c.\log m=Const$ so ist $c.\log\frac{m}{m-nz}=x$ und $\frac{m}{m-nz}=e^{x:c}$

Hier ist $\frac{x}{\epsilon}=\frac{\alpha^2h^2-\beta^2\omega^2}{\alpha h^2\omega M}.x$, und wenn man $e^{x:c}=E$ setzt, so ist $z=\frac{m.(E-1)}{n.E}=\frac{m}{n}.$

$(1-E^{-1})=\frac{\alpha^2ah^2}{\alpha^2h^2-\beta^2\omega^2}.(1-E^{-1}).$

Anwendung hievon, auf Gefässe wo die centrische Linie vertical ist.

638. Hier ist $\alpha=\beta=1$. Also $\frac{1}{c}=\frac{h^2-\omega^2}{h^2\omega M}$

und $z=\frac{h^2a}{h^2-\omega^2}.(1-1:e^{(h^2-\omega^2).x:Mh^2\omega})$

639. Die Formel, wenn sich z nicht mehr ändert (597), für gegenwärtigen Fall erhält man, wenn man hier x unendlich setzt, daß eigentlich unendlich viel Wasser ausgeflossen seyn müsste. Die Geschwindigkeit nähert sich nähmlich, wie bekannt ist, einer gewissen beständigen Gränze, und es kömmt nur darauf an, ob sie dieser Gränze bald sehr nahe kömmt.

640. Hätte ein Gefäß, AC 54. Fig. in der Seite eine oder mehr horizontale Röhren CF, GH, HK, und wären die Weiten bey AD = h; bey CE = m, bey FG = n, bey HI = p, die Oeffnung bey K; = ω; so ist für die beständige Geschwindigkeit $z = \frac{h^2 a}{h^2 - \omega^2}$ eben als ob die Oeffnung K gleich am Gefässe wäre. Dieß erhellt aus (542), wo ich den Satz, und noch viel allgemeiner, als nur für horizontale Röhren, dargethan habe, wenn das Gefäß prismatisch war. Nun gilt er also von jedem Gefässe, dessen centrische Linie vertical ist.

Druck auf eine Stelle eines horizontalen Canals, bey unveränderlicher Geschwindigkeit.

641. Wenn man irgendwo in die Wand des horizontalen Canals CFHK 54. Fig. eine verticale Röhre einsetzte, durch den Stand des Wassers in ihr den Druck zu bestimmen, so wäre (aus 600) in der Formel (629) ds = dt für das

Ge-

Gefäß, dessen centrische Linie vertical ist, und für jeden Canal, dessen centrische Linie horizontal ist, weil man das Wasser in ihm in verticale Schichten theilen kann (608). Ferner bedeutete q in 629; wie hoch die Stelle, wo die Röhre eingesetzt ward, über die Stelle erhoben war, wo das Wasser auslief. Hier wird die Weite, auch der unterschiedenen Stücke, aus welchen der horizontale Canal etwa besteht (640) nicht so beträchtlich seyn, daß man nicht $q = o$ setzen dürfte, weil z E. CF nicht viel über K erhoben seyn wird. Also wird aus (629)

$$\frac{P}{y} = \frac{z.(y^2 - \omega^2)}{y^2} = \frac{h^2 a.(y^2 - \omega^2)}{y^2.(h^2 - \omega^2)}.$$

642. Nun ist aus (640) $y = m$ für die erste Röhre CG; also würde in einer verticalen Röhre, die in sie gesetzt würde, das Wasser durch den Druck des vorbeyfliessenden auf der Höhe $\frac{h^2.a(m^2 - \omega^2)}{m^2.(h^2 - \omega^2)}$ erhalten, und eben so findet man, wie hoch es in verticalen Röhren, die man in FH, HK, setzte, erhalten würde, wenn man n, oder p statt y setzt.

Bernoulli meldet, daß diese Rechnungen auf das genaueste mit Versuchen übereingestimmt hätten. Er wird die 643; III. meynen.

Der Wasserstand in einer solchen verticalen Röhre im ersten Augenblicke des Auslaufens fände sich aus (633) wie in (634) für $q = o$.

643. I. Wenn das Gefäß sehr weit ist, so wird in (642) h sehr groß, und die Höhe in der eingesetzten Röhre ist $\frac{m^2 - \omega^2}{m^2}$. a Wie beym Daniel Bernoulli, Hydrod. Sect. XII. §. 5.

II. Diese Höhe ist $= a. (1 - \frac{\omega^2}{m^2})$. Nun ist a die Höhe des Wassers im Gefässe, und so hoch würde auch das Wasser in der eingesetzten Röhre stehen, wenn K verschlossen wäre, daß da nichts ausliefe. Also kann man sich Versuche dieser Art so vorstellen: Man verschliesse K und fülle das Gefäß, messe alsdenn, wie hoch das Wasser in der eingesetzten Röhre steht. Ist solche enge, daß in ihr nach Art der Haarröhrchen das Wasser über dem Horizonte steht, in dem es sich nach der Hydrostatik befinden sollte, so muß man diese Wirkung des Haarröhrchens besonders untersuchen, und allemahl bey den folgenden Abmessungen mit in Betrachtung ziehen. Nun öffne man K, und da wird das Wasser in der eingesetzten Röhre um die Höhe $\frac{a. \omega^2}{m^2}$ sinken.

III. Daniel Bernoulli hat Versuche hierüber angestellt (*) die genau mit der Theorie zutreffen. Hier-

(*) Experimenta coram Societate instituta in confirmationem theoriae pressionum quas latera canalis ab aqua transfluente sustinent, Comm. Petrop. T. IV. p. 194.

Hier ist einer: a=115 engl. Linien, $\frac{\omega}{m}=(\frac{17}{5.7})^2$

also

$$\begin{array}{rl} \log 17 = & 1{,}2304489 \\ \log 35 = & 1{,}5440680 \\ \hline \log \frac{17}{35} = & -0{,}3136191 \\ 4.\ \log \frac{17}{35} = & -1{,}2544764 \\ \log 115 = & +2{,}0606978 \\ \hline \log 115.(\frac{17}{5.7})^4 = & +0{,}8062214 \end{array}$$

gehört zu 6, 4; soviel sollte das Wasser in der eingesetzten Röhre nach der Theorie sinken. Die Erfahrung gab $6\frac{2}{3}$.

Es ist Bernoullis zweytes Experiment. Er hatte an einen weiten Kasten eine horizontale Röhre gesetzt, deren Durchmesser 7 Lin. war, über der Stelle, wo diese Röhre aus dem Kasten herausging, ward das Wasser 115 Lin. hoch gehalten. An die äuserste Oeffnung der Röhre, wurden Platten gebracht, deren jede ein anderes Loch in der Mitte hatte. Das Loch der Platte bey gegenwärtigem Versuche hatte $3\frac{2}{5}$ Linien im Durchmesser.

IV. Die Formel II. erklärt Langsdorf für unrichtig. Seine Erinnerungen, und was er statt ihrer setzt, Lehrb. d. Hydrod. IX. Kap. Druck des Wassers gegen die Wände der Röhren, durch die es fliesst; Ausfluß durch eine in einer Röhre angebrachte Seitenöffnung, oder durch Oeffnungen in Schiedwänden.

644. Wenn man sich in der 54. Fig. vorstellt, CK sey eine einzige cylindrische Röhre bey K so weit als bey CE, also $\omega = m$; so wird der Druck, oder die ihm gemässe Wasserhöhe in (642) $= 0$.

Wenn nähmlich alle verticale Querschnitte der horizontalen Röhre gleich weit sind, so weicht das Wasser, das an irgend einer Stelle, z. E. bey FG, nach K zu geht, dem, welches ihm von CE her nachfolgt, so geschwind aus, als dieses folgt, und es entsteht kein solcher Druck, wie hier betrachtet wird.

645. Der Canal könnte sich aber auch von CE nach K zu trompetenförmig erweitern (ohngefähr wie EDGF 23. Fig.). In diesem Falle wäre $\omega > m$; die Formel des Drucks und der Wasserhöhe gäbe was verneintes. Was bedeutet dieses?

Ich dächte, eine sehr natürliche Antwort wäre, es bedeutet nur, daß alsdenn kein Druck vermöge der Bewegung des Wassers entsteht, wie sich schon aus 644 schliessen lässt.

646. Es ist keine Folge, daß eine analytische Formel die bejaht, einen gewissen physischen Umstand anzeigt, **verneint** den entgegengesetzten physischen Umstand bedeutet.

Wenn eines Glases Brennweite verneint wird (Dioptr. 27), so gehen deßwegen die gebrochnen Lichtstrahlen nicht nach einer Gegend, welche der entgegengesetzt wäre, nach der sie bey einer bejahten Brennweite gingen. Zum Glücke,

cke, zeigt doch hier der verneinte Werth der Brennweite etwas an, aber nur deßwegen, weil jeder Lichtstrahl einen geometrischen Theil hat (Kat. 24), dessen Lage durch das bejahte oder verneinte angegeben wird.

647. In Fällen aber, wo etwas blos geometrisches nicht so mit dem physischen zusammenhängt, läßt sich aus dem verneinten Werthe einer Formel, gewiß das entgegengesetzte physische nicht schliessen. Man ist nicht berechtiget, eine anziehende Kraft, die sich nach einer gewissen Potenz der Entfernung richtet, als verneint, und folglich forttreibend anzusehen, wenn diese Potenz bey verneinter Entfernung verneint würde (*).

Ein ander solches Beyspiel, giebt die Erwärmung einer gegebenen Stelle auf der Erde, in so fern solche Erwärmung von der Sonne herrührt. Ich habe im Hamburgischen Magazine (**) Halleys Art, diese Berechnung zu führen, analytisch erwiesen. Man schätzt diese Erwärmung für jeden Augenblick, nach dem Sinus der Sonnenhöhe. Wenn nun die Sonne unter dem Horizonte ist. ihre Höhe und derselben Sinus verneint werden, wird jemanden einfallen, daß die Sonne alsdenn kälte, weil die Formel ihrer Erwärmung einen verneinten Werth bekömmt? Daß die Wirkung der Sonne in diesem Verstande nie verneint werden könne, erinnert Hr. Euler aus-

(*) Höher. Mech. I. Abschn. 95.
(**) Im alten Hamb. Mag. II B. 4. St. 6 Art.

ausdrücklich (*), ob er gleich nachgehends, um seine Rechnung zu einigem Nutzen anzuwenden, von der Wahrscheinlichkeit, wie er sich ausdruckt, etwas abgeht, und für die Sonne unter dem Horizonte, eine verneinte Erwärmung annimmt, die sich nach dem Sinus der Tiefe richtet (**).

648. I. So denkt Johann Bernoulli von dem Falle (645) nicht. Er glaubt, weil der Druck verneint werde, verwandele er sich in ein Saugen, wenn man von der unteren Seite der horizontalen Röhre, z. E. bey G, eine Röhre vertical hinabliesse, und unten in ein Gefäß mit Wasser stellte, so würde aus dem Gefässe das Wasser durch Saugen in die Röhre auf die Höhe $\frac{h^2 a.(\omega^2 - m^2)}{m.(h^2 - \omega^2)}$ gehoben werden.

II. Wenn sich das Wasser in der Röhre gleich über G etwa theilte, das vordere geschwinder forteilte, als das hintere dessen Stelle er setzte, so wollte ich wohl glauben, daß die Luft das Wasser in die verticale Röhre treiben könnte. B. nimmt aber an, das Wasser in der horizontalen Röhre theile sich nicht.

III. Unter Daniel Bernoullis Versuchen (643; III.) finden sich zweene, die hieher gehören. Bey seinem fünften Experimente, war die horizontale Röhre am äuserstenEnde weiter, als

wo

(*) Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis terrae locis ac temporibus; §. 4. Comm. Petrop. T. XI.
(**) ibid. §. 19.

wo sie aus Gefäß gesetzt war. In diese kegelförmige Röhre, ward ein zweymahl gekrümmtes gläsernes Rohr gesetzt, so daß dessen einer Schenkel von der Stelle, wo er in die horizontale Röhre gesetzt war, vertical aufwärts, denn einer vertical hinunterwärts, und wieder einer vertical aufwärts ging. In dem letzten stand das Wasser so hoch, als im Gefässe, wenn alles ruhig war (643; II.) als aber Wasser durch die weite Oeffnung der horizontalen Röhre auslief, sank das Wasser in dem nur erwähnten verticalen Schenkel selbst, bis unter den Horizont, in welchem sich seine Oberfläche in der horizontalen Röhre befand, zum Zeichen, daß die kegelförmige Röhre zusammengedruckt ward, sagt Daniel Bernoulli. Er erinnert aber, daß wegen allerley Hindernisse der Bewegung, die Geschwindigkeit des Wassers an der äußersten Mündung viel geringer sey, als die, welche der Wasserhöhe zugehörte, und daher sey das Wasser in dem verticalen Schenkel nicht so tief unter den Horizont dessen in der Röhre gesunken, als sonst geschehen wäre.

IV. Ein anderer Versuch aber, der vor der Akademie in Gegenwart des portugiesischen Prinzen Emanuel angestellt ward, und Bernoullis sechster ist, zeigte das, was hier in I. gesagt wird, offenbahr. Ein Cylinder von 3 Zoll 10 L. hoch, ADB Fig. 57. dessen Axe vertical stund, hatte in seinem horizontalen Boden ein Loch D, von demselben Loche ging eine Röhre hinab, die

sich

sich wie ein Kegelstück nach unten bis G zu erweiterte; die Axe dieses Kegelstücks war vertical. In die Seite dieser Röhre, nicht tief unter des Cylinders Boden bey l, war ein gebogenes gläsernes Rohr eingesetzt, so daß sein kurzer horizontaler Theil lm daselbst in die Röhre gesetzt war, ein langer verticaler Schenkel unten seine Oeffnung in einem Gefässe M hatte, das Wasser enthielt.

Man verschloß die unterste Oeffnung der kegelförmigen Röhre G, mit dem Finger, und füllte den Cylinder mit Wasser, das, wie leicht zu erachten ist, auch durch das gebogene gläserne Rohr in das unterste Gefäß M hinablief. Wenn man nun die unterste Oeffnung der kegelförmigen Röhre frey ließ, daß das Wasser da hinauslief, so trat das Wasser aus dem untersten Gefässe, von sich selbst (sponte sagt B.) durch das Rohr herauf, und lief mit dem, welches aus dem Cylinder herabfloß, zur Oeffnung G der kegelförmigen Röhre heraus, daß endlich alles Wasser aus dem tiefen Gefässe durch das Glasrohr heraufstieg, und so auslief, daß das Gefäß ganz leer ward.

V. Dieser Versuch scheint B. desto merkwürdiger, weil das Gefäß M viel tiefer war, als die Oeffnung G der kegelförmigen Röhre, wo das Wasser herauslief.

VI. Die Weiten der kegelförmigen Röhre bey l, wo das Rohr in sie gesetzt war, und bey G verhielten sich nach B. Angabe wie 10 : 16 = 5 : 8

und

und die Oeffnung des Rohres im Gefässe M, war 5 Zoll 6 Linien tiefer, als die Stelle l. Vom Boden des Cylinders bis l waren 4 Linien, von l bis an die Oeffnung bey G; 2 Zoll 9, 5 Lin.

VII. Ich erkläre mir diese Begebenheit so: der Cylinder wird in Vergleichung mit beyden Oeffnungen bey D und bey G, weit angenommen, und so gehört die Geschwindigkeit des Wassers in jeder Stelle der kegelförmigen Röhre, der Wasserhöhe über dieser Stelle (529). Diese Wasserhöhe sey k über der Stelle l, $k + x$ über der Stelle G; so sind die Geschwindigkeiten des Wassers an diesen beyden Stellen $2\sqrt{gk}$; und $2\sqrt{g}$

$$(k+x) = 2\left(\sqrt{gk} + \frac{gx}{2\sqrt{gk}}\right) = 2\sqrt{gk} + x\sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Man setze, die Querschnitte der kegelförmigen Röhre bey l und G, heissen p und q, so fliesst in der Zeit dt durch die Oeffnung bey G, die Wassermenge $(2\sqrt{gk} + x\sqrt{\frac{g}{k}}).qdt$ aber in eben der Zeit, fliesst durch den Querschnitt bey l, die Wassermenge $2\sqrt{gk}.pdt$; Sie ist aus zweyerley Ursachen geringer, als die, welche unten ausfliesst, weil ihre Geschwindigkeit geringer ist, und weil der Querschnitt kleiner ist. Der Ueberschuß der, die unten ausfliesst, beträgt $2\sqrt{(gk)}.(q-p) + xq\sqrt{\frac{q}{k}}$ Es fliesst also bey l nicht so viel Wasser nach, als nöthig wäre, die Stelle

des ausfliessenden immer zu ersetzen. So entsteht in der Röhre ein Zwischenraum, den das Wasser, das aus dem Cylinder herabfliesst, nicht so gleich ausfüllen kann, und da wird das Wasser aus dem Gefässe M, durch das Rohr, vermöge der Luft hinaufgetrieben, die auf dasselbe Wasser druckt.

In B. Experimente war $p = \frac{5}{8}q$ und der Ueberschuß des unten ausfliessenden Wassers ist $2\sqrt{gk.\frac{5}{8}q} + xq\sqrt{\frac{q}{k}}$ wo sich k und x auch leicht berechnen liessen.

VIII. So stelle ich mir also bey diesem Versuche eine Art von Heber vor, der das Sonderbare hat, daß das Wasser durch seine höhere Oeffnung G ausfliesst, durch die niedrige bey M hineintritt. Eben das ist B merkwürdig vorgekommen (V). Es läßt sich aber leicht erklären, wenn man die Beschaffenheit des gemeinen Hebers überlegt (Hydraul. 4). Bey demselben fliesst das Wasser zur niedrigen Oeffnung heraus, weil der Druck der Atmosphäre gegen diese Oeffnung, durch eine höhere Wassersäule stärker vermindert wird, als der gleiche Druck der Atmosphäre gegen die höhere Oeffnung.

Hier aber druckt die Atmosphäre das Wasser bey G hinaufwärts, bey AB hinunterwärts, und diese beyden Drückungen heben einander auf. Das Wasser also im Gefässe M wird in die dasige Oeffnung des Rohrs mit dem Drucke der Atmosphä-

mosphäre hineingetrieben, der so viel beträgt, so viel als von der völligen Gewalt der Atmosphäre übrig bleibt, nachdem man das abrechnet, was die Wassersäule von M bis m zu erhalten nöthig ist. Es ist also kein Wunder, daß das Wasser aus dem Gefässe M durch das Rohr aufwärts steigt, und darnach durch G ausläuft.

IX. Wenn man also diese ganze Vorrichtung unter die Glocke einer Luftpumpe brächte, und nachdem man die Luft weggenommen hätte, das Wasser bey G auslaufen liesse, so würde das aus M nicht steigen.

X. Der seel. Prof. Hausen zu Leipzig, liess einmahl blecherne Röhren machen, den Versuch anzustellen, wie hoch Wasser durch den Druck der Atmosphäre erhalten wird (Aer. 31), weil diese Röhren nicht genau durchaus gleich weit waren, so fiel das Wasser unten schneller heraus, als es oben nachfolgen konnte. An den Zwischenräumen, waren die Röhren einwärts gedruckt, daß ihre äusere Fläche da Gruben bekommen hatte. Hausen brauchte dieserwegen nachgehendes messingene Röhren. Ich habe die blechernen, auf ihrer äusern Fläche einwärts gebogenen, bey ihm gesehen; Damahls aber (etwa 1737.) dachte ich nicht daran, daß Wasser, das in einer Röhre hinablief, die Seitenwand dieser Röhre einwärts beugen könnte. Hausen sagte uns auch nichts davon, sondern leitete es ohngefähr auf die vorhin erklärte Art von dem Drucke

der Atmosphäre auf die Stellen der Röhren her, wo das Wasser Zwischenräume gelassen hatte.

XI. Wenn man in eines Camins Seitenwand Oeffnungen macht, so geht der Rauch nicht nur dadurch nicht hinaus, sondern die äusere Luft dringt durch diese Oeffnungen mit Gewalt in den Camin hinein. Das begreife ich leicht daraus, daß die Luft im Camine durch die Wärme verdünnt ist.

Hr. Dan. B. der sich so ausdruckt: Der aufsteigende Rauch ziehe die Luft durch diese Oeffnungen mit grosser Gewalt nach sich, stellt sich den Camin wie eine Röhre vor, die sich hinaufwärts erweiterte, und den Rauch wie ein flüssiges Wesen, das seiner Natur nach in die Höhe geht. Ich glaube, die leßte Redensart zeigt, daß er eigentlich hierüber so denkt wie ich, und sich nur anders ausdrückt. Denn im Ernste wird doch niemand jeßo Materien annehmen, die ihrer Natur nach in die Höhe gehen, wie die Alten annahmen; aber daß der Rauch, den Stoß, den er durch die innere Bewegungen der brennenden Materie bekam, beyseite geseßt, von der Luft in die Höhe getrieben wird, wie Holz von Wasser, darinnen werden wir wohl eins seyn.

649, Wäre die Röhre bey K sogar weiter, als das Gefäß bey AD; $\omega > h$ und auch $> m$, so würden in der Formel (642) Zähler und Nenner verneint, also der Druck bejaht.

In diesem Falle wächst die Geschwindigkeit immer fort, ohne sich einer beständigen Gränze

zu

zu nähern, denn in (638) würde alsdenn $z = \frac{h^2 a}{\omega^2 - h^2}, (e^{(\omega^2 - h^2)x : Mh^2\omega^2} - 1)$.
welches für ein unendliches x auch unendlich wird.

650. Man sieht hieraus, daß wenn eine beständige Geschwindigkeit in den bisherigen Untersuchungen genannt wird, die Meynung nicht seyn kann: Die Geschwindigkeit werde allemahl beständig, oder nähere sich bald einer beständigen Gränze. Schon (466) zeigt, daß dieses nicht allemahl erfolgen werde, und wie die Geschwindigkeit in der dortigen Untersuchung für $m = h$ nie beständig wird, so lässt sich gleich daraus übersehen, daß sie sehr spät beständig wird, oder sich ihrer beständigen Gränze sehr langsam nähert, wenn m beynahe so groß als h, die Oeffnung in Vergleichung mit der Weite des Gefässes sehr beträchtlich ist.

Sind am Gefässe lange Röhren, die sich weit horizontal erstrecken, wie bey Springbrunnen vorkommen kann, so verstreicht, wie selbst die Erfahrung lehrt, eine ganz wohl merkliche Zeit, ehe das Wasser, wo es herausspringt, seine beständige Geschwindigkeit erreicht.

Was also von einer beständigen Geschwindigkeit gesagt wird, gilt nur unter der Voraussetzung, daß die veränderliche Geschwindigkeit einer beständigen Gränze nahe genug gekommen ist.

Ueber Herrn d'Alembert Erinnerungen gegen Johann Bernoullis Theorie.

651. Diese Erinnerungen finden sich in Hrn. d'Alembert Traité de l'equilibre & du mouvement des fluides, 187 und f. Art. Ich will zeigen, wie ich ihnen durch meinen Vortrag, und die Erläuterungen, da ich in allem viel umständlicher gewesen bin, als Bernoulli, auszuweichen gesucht habe.

652. Die erste Erinnerung ist: daß B. zu Anfange gleich angenommen, die Geschwindigkeit v bleibe einmahl beständig bey einer gewissen Grösse, welches er doch erst in der Folge gewiesen. Diese Kleinigkeit ist hier gehoben (470; 471; 650). Ueberhaupt ist freylich Bernoullis Hydraulik nicht in der besten Ordnung geschrieben. Der Erfinder war vermuthlich von dem Neuen seiner Theorie, die ihn, wie er gesteht, viel Nachdenken gekostet hat, zu sehr eingenommen, als daß er sorgfältig auf Methode und Vortrag sehen konnte.

653. "Daß bey einem beständigen v die bewegende Kraft durch den Strudel, dem Gewicht des Wassers gleich gesetzt wird (457), erfodert einen Beweis. Denn 1) sagt Hr. d'A. (*) wäre es sehr natürlich zu denken: das Wasser, wenn es genöthigt ist, in einen engern Raum zu gehen, um den Wirbel zu bilden, würde sich in diesem Raume, ohne daß seine Schwere was dazu beytrüge,

(*) art. 188.

trüge, beschleunigen, aus der einzigen Ursache, weil der Raum, in den es gehen soll, enger ist; und so liesse sich das Gewicht der flüssigen Materie nicht als die einzige Kraft ansehen, die das Wasser im Wirbel beschleuniget, und wäre also der Kraft durch den Wirbel nicht gleich".

Es ist richtig, daß Bernoulli gar keinen Grund angegeben hat, warum er diese Kraft dem Gewichte gleich setzt.

Bey Hr. d'Al. Erinnerung aber, sehe ich nicht, wie sich Wasser ohne eine andere Ursache beschleunigen soll, nur weil es in einen engen Raum gehen muß. Nach den ersten Gesetzen der Bewegung ändert kein Körper seine Geschwindigkeit selbst; daß das Wasser, wenn es nach dem engern Raume zu geht, dem nachfolgenden nicht schnell genug ausweicht, von demselben getrieben, und so beschleuniget wird, das begreife ich sehr wohl: Sich selbst, ohne einen solchen Trieb, zu beschleunigen, müsste das Wasser etwa so denken: Jetzo hast du einen engen Raum vor dir, da musst du geschwinder durchgehen, daß dich das Wasser, das dir nachkömmt, nicht einhohlt. Hr. d'Al. mißbilligt den Ausdruck einer immateriellen Kraft, den Bernoulli in der Hydraulik braucht: Wasser, das es weiß, wie es sich verhalten muß, durch einen engern Raum in gehöriger Zeit durchzukommen, das hat wohl eine immaterielle Kraft, wenigstens nach dem Lehrbegriffe derer, bey denen die Materie nicht denken kann. Ja wenn die Wassertheilchen so vorsich-

tig wären, als manche Krieger! die nach einer verlohrnen Schlacht immer weiter fortlaufen, wenn gleich der Feind nicht nachsetzt.

654. Die zweyte Einwendung Hr. d'Al ist: Warum diese Kraft eben dem Gewichte des Wassers gleich seyn müsse? könnte man nicht glauben, das Gefäß trage einen Theil des Gewichts des Wassers, so daß nicht das ganze Gewicht den Strudel mache?

Wie man dieses nach der Vorstellung, die ich der 46 Fig. gemäß davon gemacht habe, glauben könne, sehe ich nicht Die verticalen Wände des Gefässes bey AH, El, hindern hoffentlich nichts von der ganzen Last des Wassers, lothrecht hinab zu drücken; Und so drückt diese ganze Last auf die Fläche bey HI, die oberste Gränze des Wirbels. Ruht ein Theil davon vermittelst des Stücks DIK auf dem Boden DK, so verursacht es selbst dadurch in dem Wasser DIK Druck gegen den Wirbel, der ihn in seinen Gränzen hält.

655. "Diese Schwürigkeit (654), ist desto natürlicher, fährt Hr d'Al. fort weil Hr. Bernoulli ist genöthigt gewesen im 27 u. f. Art. seiner Hydraulik, eine ziemlich verwickelte Methode zu brauchen, um den Druck des Wassers gegen den Boden des Gefässes zu bestimmen. Auch scheint mir der Werth des Druckes, den er im 30 Art. findet, nicht richtig, denn bey einer kleinen Oeffnung, müsste diese Kraft nach Hr. B. Formel noch einmahl so stark seyn, als das Gewicht

wicht der flüssigen Materie, statt dessen, daß ich glanbe (art. 250) bewiesen zu haben, daß diese Kraft alsdenn nur dem Gewichte des Wassers gleicht".

In (544) habe ich diese Untersuchung vorgetragen. Man wird daraus sehen, ob Bernoulli zu seinem verwickelten Verfahren genöthigt war, daß es verwickelt ist, gestehe ich Hr. d'Al. zu (546). Mir aber scheint eben der Druck, den B. herausbringt, auf eine ganz leichte Art zu folgen, die eben durch seine Vorstellung des Strudels sehr sinnlich gemacht wird. Bey der kleinen Oeffnung, bringt B. deßwegen das doppelte Gewicht heraus, weil er zum Drucke aus der Bewegung, noch das Gewicht des Wassers, als wenn es ruhete, setzt (547). Seine Theorie zwingt ihn so wenig dazu, daß er, deucht mich, gar nicht dazu berechtigt ist (s. a. O.). Und wenn man dieses weglässt, so stimmt seine Formel mit Hr. d'Al. überein.

656. "Eine ziemlich starke Ursache zu zweifeln, ob B. Theorie leicht und direct genug sey, ist nach Hr. d'Al. (Art. 189): daß B. bey einer verticalen Röhre am Gefässe (473) wenn die Geschwindigkeit gleichförmig geworden ist, die Kraft, die den Strudel verursacht, dadurch erhält, daß er auf die Oberfläche des Wassers im Gefässe, das Gewicht dieses Wassers im Gefässe, und das ins Gefäß übergetragene Gewicht des Wassers in der Röhre bringt. Wie soll man sich

aber vorstellen, daß das Gewicht des Wassers in der Röhre, unter dem Strudel, zugleich mit dem Gewichte des Wassers in dem Gefässe, etwas zur Beschleunigung des Wassers im Strudel beyträgt? Denn da man hier das Zusammenhängen der Wassertheilchen nicht in Betrachtung zieht, so kann das Gewicht des untern Wassers nicht auf das obere wirken".

Sollte man wohl, ich will nicht sagen, einem Bernoulli, sondern einem vernünftigen Manne, zutrauen? daß er annähme, das Wasser in der Röhre, wirke durch seine Schwere, oben hinauf in einen Strudel über ihm? Das wäre noch schlimmer, als das Wasser bergan laufen zu lassen. Ist es nicht eine kleine Bosheit von Hr. d'Al.? daß er sich so gutherzig anstellt, als wollte er dem armen Bernoulli gern mit dem Zusammenhängen der Wassertheilchen aushelfen, wenn es sich nur thun liesse.

657. Aus (480) erhellt, was eigentlich von B. angenommen wird. Wenn Gefäß und Röhre voll schweres ruhendes Wasser sind, so druckt solches die untere Fläche der Röhre mit einer gewissen Gewalt; Man sucht, was auf der Oberfläche blos trägen ruhenden Wassers für eine Kraft wirken müsste, damit die untere Fläche der Röhre eben so stark gedruckt würde; und nun nimmt man an, das schwere Wasser, und das träge fliesse mit einerley Geschwindigkeit aus. Beym Uebergange des schweren Wassers aus dem Gefässe

fäſſe in die Röhre, entſteht vielleicht nicht wirklich der Strudel, den man beym Uebergange des blos trägen Waſſers in die Röhre annimmt, man nimmt den leztern an, um die Geſchwindigkeit in allen Stellen die Röhre gleichförmig zu haben, die vielleicht bey ſchwerem Waſſer nicht gleichförmig iſt; man befriedigt ſich damit, daß das Waſſer unten, wo es aus der Röhre flieſſt, einerley leidet, es mag das, was es leidet, von den Wirkungen der Schwere in alle Waſſertheilchen oder von einer einzigen auf die Oberfläche angebrachten bewegenden Kraft herrühren (590).

Von dieſen Säzen kann man vielleicht noch einen recht ſcharfen Beweis verlangen: Sie ſind aber doch gewiß ſo beſchaffen, daß man ſie als ſehr wahrſcheinlich zugeben kann. Am wenigſten ſind ſie mit dem einerley: das Gewicht des untern Waſſers, verurſachte eine Beſchleunigung in dem über ihm befindlichen.

Die Vorſtellung des Strudels nebſt dem Uebertragen der bewegenden Kräfte, aus unterſchiedenen Waſſerſchichten auf die obere, bringt bewegende Kräfte an einen Ort zuſammen, die, wenn ſie eigentlich von den Wirkungen der Schwere herrühren, durch weitläuftige Maſſen verbreitet ſind. Sie iſt bey den flüſſigen Materien ſo etwas, wie bey feſten Körpern, die Vorſtellung des Schwerpuncts, wo man das Gewicht des ganzen Körpers vereinigt annimmt.

658. "Eine Gleichung wie (468) oder die, welche Bernoulli ſtatt ihrer giebt (471) iſt nach

Hr.

Hr d'Al. Ausspruche nur beynahe wahr. Man zieht bey ihr einen Theil der Kraft, welche im Strudel beschleunigt, nicht in Betrachtung, den man in Vergleichung mit den übrigen als nichts betrachtet. Hr. d'Al. beruft sich dieserwegen auf seinen 112 Art".

Hr d'Al. fängt nähmlich bey seiner Methode, von einem Gefässe an, das sich in eine Oeffnung endigt, gegen die es sich nach und nach zusammenzieht, wie die Röhre (50 Fig.). Bekömmt nun dieses Gefäß einen Boden, durch dessen Oeffnung erstlich das Wasser ausfliesst (wie wenn der Querschnitt der Röhre bey Cc durch eine ebene Fläche mit einem Loche verschlossen wäre) so überlegt Hr. d'Al. daß die Wassertheilchen ein wenig zuvor, ehe sie an dieses Loch kommen, ihre Bewegungen so krümmen müssen, daß sie durch dieses Loch durchgehen können (156; 173; I.). Diese Krümmungen nimmt Hr. d'Al. sehr kurz an, daß das Wasser in dem Raume zwischen der Stelle, wo sie sich anfangen, und dem Loche nichts merkliches beträgt, und so stellt er sich vor, als ob sich das Gefäß selbst, nach der Figur dieser Krümmungen, bis ans Loch zusammen zöge; So bringt er seine Formel für eine nach dem Gesetze der Stetigkeit gekrümmte Röhre auf diesen Fall an, und macht in den Grössen, die er als gegeben dabey annahm, keine Aenderung.

Man sieht leicht, wie ähnlich dieses Verfahren dem in 455; V. ist. Nun ist die Kraft, die nach Hr. d'Al. Erinnerung weggelassen wird,

ver-

muthlich, (denn er erklärt sich nicht deutlicher) die, vermöge welcher die Wassertheilchen ihre Bewegungen auf die erwähnte Art ändern und krümmen müssen. Hr. d'Al. unternimmt gar nicht, diese Kraft, oder worinnen sonst die Gleichung für die Geschwindigkeit von der allerschärfsten Wahrheit abweicht, anzugeben. Bisher kennen wir auch noch nichts, woraus sich dieses angeben liesse (482), also liesse sich Hr. d'Al. Erinnerung etwa so paraphrasiren:

Bernoullis Gleichung ist nur beynahe wahr; Mit dieser Einschränkung nehme ich sie auch an; Aber, anzugeben: worinnen das ungemein wenige besteht, darinnen sie von der strengsten Wahrheit abweicht, oder wie man sich der Wahrheit etwas mehr nähern könne, dazu sehe weder ich noch irgend ein anderer Mensch jetzo einen Weg.

659. Folgendes setzt endlich Hr. d. Al. (*) dem Verfahren B. bey einer gekrümmten Röhre (558) entgegen: "Wenn die bewegende Kraft jedes Querschnitts, nicht seinem Gewichte gleich ist, warum ist die Summe der bewegenden Kräfte, auf die oberste Fläche getragen, so groß, als das Gewicht auf diese Fläche getragen? Wie es mir scheinet, lässt sich nach Hr. B. Grundsätzen, auf keine andere Art dieserwegen Rechenschaft geben, als wenn man sich einbildet, das Gewicht aller Schichten sey gleichsam in der obersten vereinigt, und bringe von dar, so zu reden, die Beschleunigung der unterschiedenen Schichten hervor.

Aber

(*) art. 190.

Aber 1. könnte man nicht glauben, die Gestalt des Gefässes trage etwas mit zu Beschleunigung der Schichten des Wassers bey, wie wir schon bemerkt haben? 2. Der hydrostatische Satz: Wenn die Oberfläche einer flüssigen Materie in allen ihren Theilen gleich stark gedruckt wird, so vertheilt sich dieser Druck unter die andern Schichten nach der Verhältniß ihrer Weite, darf er ohne Beweis angebracht werden, wenn die Rede von einer bewegten flüssigen Materie ist, deren untere Theile, sich dem Bestreben der obern zu entziehen scheinen. 3. Diesen Satz, und seinen hiesigen Gebrauch zugestanden, so scheint es, die beschleunigende Kraft müsste in allen Schichten einerley seyn, weil der Druck auf die Oberfläche, sich auf alle Puncte dieser Schichten gleich eintheilt. 4. Warum wird die bewegende Kraft, genau dem Gewichte gleich angenommen? Wäre es nicht natürlich zu denken, daß die Wände des Gefässes einen Theil des Bestrebens trügen? In der That wird man sagen, wenn das völlige Gewicht des Wassers zur Beschleunigung angewandt wird, wie kann das Wasser zu gleicher Zeit eine Wirkung auf das Gefäß ausüben, die sich nicht läugnen lässt, weil man das Gefäß mit einer gewissen Kraft halten müsste, wenn es nicht unbeweglich wäre. 5. Wenn man sich alle Schwere des Wassers auf der Oberfläche vereint einbildet, so ist natürlich zu denken, daß sie eine Beschleunigung in der Geschwindigkeit aller Schichten verursacht. Es ist indessen nicht nothwendig, daß

sich

sich die Geschwindigkeit aller Schichten beschleunigt, es ist genug, daß die Bewegung im untern Theile des Wassers zunimmt, und die Gestalt des Gefässes kann so beschaffen seyn, daß der obere Theil langsamer geht, anstatt beschleunigt zu werden, wie wirklich geschehen muß, wenn das Wasser ohne Schwere angenommen wird. 6. Wenn man die Schwere des Wassers beyseite sezt, sehe ich wohl, daß man die Bewegung nach der Methode des Hr. Bernoulli finden kann, wenn wan in seinen Formeln sein g = o sezt, aber es scheint mir ziemlich schwer, seine Grundsäze darauf anzubringen".

660. Ich weiß nicht recht, wie ich diese Einwendungen beantworten soll, denn von vielen sehe ich nicht, wie sie den Gedanken 558. u. f. entgegen stehn.

Gleich der Anfang sagt etwas, das B. nicht thut. Wo trägt er denn bey den krummen Canale das Gewicht auf die obere Fläche? In der Gleichung (594) ist nichts, das diese Beschuldigung veranlassen könnte, als das Glied ah, und das ist nicht das Gewicht des Wassers im Canale auf die obere Fläche getragen, sonden eine Kraft auf der obern Fläche, vermöge der der unterste Querschnitt des Canals, bey blos trägem, ruhendem Wasser, soviel Druck leidet, als er von schwerem stehendem Wasser leidet (583). Dieser Druck ist mit dem Gewichte des Wassers im Canale eben deßwegen nicht einerley, weil der Canal

nal kein senkrechtes Prisma seyn soll, da dergleichen schon vorhin im Anfange ist besonders betrachtet worden, konnte Hrn. d'Al. ein so bekannter Satz, als (Hydrost. 24) ist, hiebey nicht einfallen, daß er Druck und Gewicht verwechselte?

Hr. d'Al. übernimmt also eine sehr unnöthige Mühe, zu zeigen, wie sich nach B. Grundsätzen von etwas Rechenschaft geben läßt, das B. nicht thut; und man wird schon hieraus vermuthen, wie treffend diese Erinnerungen zum Theil seyn mögen.

Wegen 1; berufe ich mich auf (653).

2. Trifft meine Vorstellungen, in so weit es mit auf die Voraussetzungen (480) und (585) geht. Man wird aus diesen Stellen, aus (590) und (657) sehen, was ich hierüber denke.

3. Das Verfahren 569.. 572 u.d.g. zweifelhaft zu machen, müsste man zeigen, wo darinnen die durchgängig angenommenen Lehren von der beschleunigenden und bewegenden Kraft, nicht recht gebraucht wären, man müsste das Uebertragen der bewegenden Kraft aus jeder Schicht in die obere bestreiten, welches doch auf den bekanntesten hydrostatischen Sätzen beruhet. Einen wahren Satz, den man damit nicht vergleichen kann, bringt man vielleicht nicht gehörig hier an, oder man versteht das Verfahren nicht.

4. Ich denke, diese Frage wird niemand thun, der die Sache nach (583...593) betrachtet.

5. Die-

5. Diese Einwendung nur erst verständlich zu machen, müsste mehr aus Hrn d' Al. Werke beygebracht werden, als der Platz hie zulässt. Man begreift aber auserdem, aus den oft angeführten Stellen auch aus (474; 475;) daß die Meynung gar nicht ist, die Beschleunigung erfolge von den Kräften, die man sich auf der Oberfläche vorstellt, in jeder Schicht so wie sie in eben der Schicht von den Wirkungen der Schwere erfolgt, sondern daß es genug ist, wenn nur das Wasser in der Oeffnung der Röhre, von den Kräften auf der Oberfläche eben das leidet, was es von den Wirkungen der Schwere, die sich durch das ganze Wasser erstrecken, leidet.

6. Bernoulli macht den Anfang seiner Theorie von einer Aufgabe wie (455), nur legt er das Prisma mit seiner Seitenwand horizontal, und stellt sich darinnen blos träges Wasser vor, das etwa mit einem Kolben fortgetrieben werde. Die Kraft, die diesen Kolben treibt, nennt er p, und setzt $p = \frac{h^2 - m^2}{2h} v^2$. Wenn nun das Gefäß aufgerichtet gestellt und voll schweren Wassers ist, braucht er das Gewicht dieses Wassers statt p.

B. Grundsätze, nach denen er zu allererst blos träges Wasser betrachtet, lassen sich doch also wohl auf blos träges Wasser anbringen?

661. "Hr. d' Al. gesteht, daß alle diese Schwürigkeiten nicht den Grund von B. Sätzen angreifen, man kann auch nicht zweifeln, daß

diese Sätze nicht wahr sind, weil sie ihn zur wahren Auflösung der Aufgabe geführt haben, die er suchte. Uebrigens glaubt Hr. d'Al. bey seiner eignen Methode finden diese Schwürigkeiten nicht statt, und sie gebe dem Geiste mehr Licht".

Ich setze an Hr. d'Al. Theorie hier nichts aus. Aber es ist sehr leicht, so viel Schwürigkeiten gegen sie zu machen, als er gegen B. Theorie macht. Man dürfte sich nur eben so wenig Mühe geben, sie recht zu verstehen.

Träfen Hr. d'Al. Einwendungen B. Theorie, so wäre es einem Wunderwerke ähnlich, daß ein solches Gewebe von Ungereimtheiten, Wahrheit lehrte. Ein paar Irrthümer, können wohl einander aufheben, daß jemand, der sie beyde zusammen annimmt, was wahres heraus bringt, aber so viel solche Sätze, von denen Hr. d'Al. sich mit einer Höflichkeit ausdruckt, die seine Gedanken doch durchscheinen lässt, sollten die alle zusammen etwas geben, das unter sich und mit andren Wahrheiten übereinstimmt?

662. Die Nahmen der hydrostatischen und hydraulischen Kraft gefallen Hr. d'Al auch nicht, und er rechtfertiget sein Mißfallen dadurch: "Es scheine, als dürfte man nach B. Grundsätzen den Druck auf die Seitenwände, nur der hydrostatischen Kraft gleich setzen, aber so würde derselbe falsch bestimmt, daher nehme Bernoulli auser dieser hydrostatischen Kraft noch eine immaterielle an, die zwischen jeder Schicht wirkte, eine vorwärts, die andere rückwärts zu treiben, und

nun

nun setze er die Summe der hydraulischen und hydrostatischen Kräfte für eine Schicht so groß, als das Gewicht des untern Wassers auf diese Schicht übergetragen, plus dieser immateriellen Kraft, und durch dieses Mittel komme er endlich dahin, den Druck zu bestimmen".

663. Der Nahme der immateriellen Kraft findet sich in meinem Vortrage 609. u. f. nicht. In der That braucht ihn Bernoulli Hydraul. P. II. art. 9. 10; und erklärt sich darüber so:

Wenn feste Körper mit einander verbunden sind, z E. zweene Körper an einem Hebel (Höh. Mech. III. Abschn.) und jeder dieser Körper, seine eigne beschleunigende Kraft hat, so entsteht, indem diese Körper in einander zu wirken anfangen, zwischen ihnen eine immaterielle Kraft, die zu beyden mit gleichem Rechte gehört, und jedes eigne beschleunigende Kraft, dergestalt mässiget, indem sie eine vermindert, die andere vermehrt, daß in der Masse, welche aus beyden Körpern zusammengesetzt wird, eine einzige gemeinschaftliche beschleunigende Kraft entsteht.

Was also B bey einer solchen immateriellen Kraft in festen Körpern denkt, wird aus dem angeführten Orte der höh. Mech. erhellen. Ich habe daselbst eben der Stelle aus B. Werken gefolgt, auf die er sich hier beruft, und weil ich dort auch nicht nöthig gehabt habe, eine immaterielle Kraft zu nennen, so sieht man, daß sich dieses Wort leicht vermeiden lässt, wenn es jemanden anstössig ist.

664. Bey festen Materien nun stellt sich B. die Wirkung seiner immateriellen Kraft so vor, wie einer zwischen zween Körpern zusammengedrückten Feder, die in beyde wirkt, indem sie sich ausbreiten will, aber bey flüssigen wie eine elastische Luft, die sich nicht nur nach zwo entgegengesetzten Seiten, sondern nach allen Seiten ringsherum ausbreitet. B. immaterielle Kraft ist bey flüssigen Materien nichts weiter, als die bekannte Eigenschaft flüssiger Materien, daß sie den Druck nicht nur nach der unmittelbaren eigentlichen Richtung der drückenden Kraft, wie feste Körper, sondern nach allen Seiten und Richtungen fortpflanzen.

665. Hieraus wird man nun urtheilen, ob man B. immaterielle Kraft annehmen, oder, wie die Gelehrten sonst wohl nach dem Beyspiele von Gellerts Nachtwächtern thun, über ein Wort streiten will.

Man kann auch in der Gleichung (624) welche die Bernoullische ist, nachsehen, obda die immaterielle Kraft, mit einem + vor ihr vorkömmt, wie man aus Hr. d'Al. Ausdrückung schliessen sollte. Der Ausdruck: von dem Gewichte des untern Wassers auf eine obere Schicht hinauf getragen, ist wieder so was, wie (656).

Hr. d'Al. erzählt übrigens B. Verfahren zu Bestimmung des Druckes so, daß man denken sollte, wunder wie sich B. wände, und Erdichtungen auf Erdichtungen häufte, um doch endlich was Wahres herauszubringen. B. wird doch

wohl

wohl besser gewusst haben, wie er seine Grundsätze brauchen musste, um den Druck zu bestimmen, als es ihm Hr. d'Alembert sagen kann. Freylich würde der Druck falsch bestimmt werden, wenn man ihn nur der hydrostatischen Kraft allein gleich setzte. Aber nicht die immaterielle Kraft kömmt besonders noch dazu, sondern die Grösse yq auf der einen Seite, und wenn sich v ändert, die hydraulische Kraft auf der andern.

666. "Aber nach allen den Schwierigkeiten, die ich wider die allgemeine Methode gemacht habe, kann man über die Bestimmung des Drucks nicht etwas directers und leichters verlangen"? So endigt Hr. d'Al. seine Erinnerungen.

Freylich, wenn Bernoullis Theorie so wäre, wie Hr. d'Al. sie vorstellt, so müsste man nicht nur was geraders und hellers wünschen, sondern man würde auf einem solchen höckrichten, krummen und ganz und gar dunkeln Wege, alle Augenblicke Kopfstösse bekommen.

667. Ein Erfinder ist eben nicht verbunden, alle andere Schriften von dem Gegenstande, über den er nachdenken will, sorgfältig zu lesen; Was man aber tadeln will, das sollte man doch recht kennen, wenn es auch gleich nicht eines Johann Bernoullis Nahmen für sich hätte.

Pro Io. Bernoullii Hydraulica, contra dom. d'Alembert objectiones ist eine Vorlesung von mir in der göttingischen K. Soc. d. W. Noui commentarii S. R. Sc. Gott. Tomus I. ad ann. 1769 et 1770. p. 45.

Eulers Theorie der Druckwerke (*).

668. ACDB 55 F. sey ein cylindrisches Gefäß, ein Stiefel zu einem Druckwerke, (Hydraul. 16) in dem sich ein Kolben auf und nieder treiben lasse. An ihm befinde sich bey DE eine aufwärts steigende Röhre DEZHGY, in die das Wasser aus dem Stiefel getrieben wird, daß es sich bey GH in ein Behältniß I, oder wie man sonst will, ausgiesst. Von der Röhre wird nur das angenommen, daß jeder Querschnitt, der auf ihre Länge senkrecht steht, ein Kreis ist, die Durchmesser dieser Kreise aber mögen sich, nach was für einem Gesetze man will, ändern. Weil die Röhre nicht cylindrisch angenommen wird, so kann man nicht sagen, daß diese kreisförmigen Querschnitte, auf die Seiten der Röhren senkrecht stünden, man müsste sich eigentlich die Linie vorstellen, in der sich alle Mittelpuncte dieser Kreise befinden, sie hiesse mit Rechte die centrische Linie und jeder Kreis stünde auf dieser Linie senkrecht. Die Figur nicht zu verwirrt zu machen, bedeute DYG diese centrische Linie, auf welche DE, YZ, yz, GH, allemahl senkrecht sind, und zugleich die Durchmesser der Röhre an jeder dieser Stellen angeben.

669. Der Kolben könne um die Höhe EB auf und nieder bewegt werden, so daß er von E bis AB steigt, indem sich der Stiefel füllt, und, wenn er das Wasser austreibt, von AB bis E nieders

(*) Sur le mouvement des eaux pardes tuyau de conduite; Mem. de l'Ac. R. de Prusse 1752. p. 111.

vergeht. Man weiß aus angef. Orte der Hydraulick, wie die Anfüllung und Ausleerung des Stiefels durch Klappen wechselsweise bewerkstelliget wird. Wenn man einmahl annimmt, daß Stiefel und Röhre voll sind, so erhellt, daß bey jedem Niedergehen des Kolbens, soviel Wasser als der Stiefel halten kann, in die Röhre getrieben wird, und dagegen eben soviel aus der Röhre sich in das Behältniß ergiesst.

670. Die Grössen, mit denen man in der Rechnung zu thun hat, werden so benennet.

Der Durchmesser des Stiefels sowohl, als des Kolbens, AB = a.

Die Höhe BE = b.

Der Durchmesser der Röhre, wo sie vom Stiefel ausgeht DE = c;

Die Gestalt der Röhre zu bestimmen, ziehe man eine Horizontallinie DF als Abscissenlinie. Auf ihr sey die Abscisse DX = x

Die Höhe des zugehörigen Puncts Y, = y

Der zugehörige Bogen DY in der centrischen Linie DY = s.

Man begreift, daß y eine Function von x, und $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist.

Beym Puncte Y, sey der Röhre Durchmesser YZ = z.

Beym Ende aber GH = h; Imgleichen
die verticale Höhe GF = g (*)
die horizontale Entfernung DF = f.

671. Aufg. Der Kolben wird mit einer gegebenen Kraft, niederwärts getrieben; Man sucht für jeden Augenblick, die Bewegung des Wassers, und den Druck, den es auf jeden Punct der Röhre ausübt.

Aufl. I. Die Kraft betrage so viel, als das Gewicht einer Wassersäule, die des Kolbens Fläche zur Grundfläche, und die Höhe k, habe; Diese Wassersäule ist also $\frac{\pi a^2 k}{4}$, der Stiefel sey anfangs bis AB, und die Röhre bis GH voll gewesen, das Wasser sey auch damahls überall ruhig gewesen. Man begreift, daß dieses alles der Wahrheit gemäß angenommen werden kann; denn wenn bey Erhebung des Kolbens das Wasser den Stiefel angefüllt hat, so muß der Kolben um einen Augenblick ruhen, ehe man ihn wieder niederwärts treiben, und dadurch das Wasser in Bewegung bringen kann.

II. Innerhalb der Zeit t, sey der Kolben um die Höhe AM = BN = r herunter gekommen. Innerhalb dieser Zeit, ist die Menge Wasser $\frac{\pi a^2 r}{4}$ bey GH herausgegangen. Die Geschwindigkeit des Kolbens in diesem Augenblicke, gehö-

re

(*) Ich behalte diesen Buchstaben, damit sich diese Rechnungen mit Hr. Eulers Formeln vergleichen lassen. Er bedeutet also hier nicht, wie bisher durchgängig, den Fall in einer Secunde.

re der Höhe v; so geht er in der Zeit dt, durch den Raum $Mm = Nn = dr = dt. 2\sqrt{g}v$.

III. Sieht man die Geschwindigkeit des Wassers in MN als bekannt an, so läßt sich seine Geschwindigkeit überall, im Stiefel und in der Röhre angeben. Im Stiefel, der bis an E überall einerley Weite hat, gehört sie durchgehends der Höhe v; In einer unbestimmten Stelle der Röhre bey YZ, der Höhe $\frac{a^4 v}{z^4}$, und bey GH die Geschwindigkeit des Ausflusses, der Höhe $\frac{a^4 v}{h^4}$ aus dem bekannten Satze, daß sich die Geschwindigkeiten verkehrt wie die Weiten der Querschnitte verhalten müssen.

IV. Mit der Geschwindigkeit, die das Wasser bey Y hat, durchläuft es in der Zeit dt, den Raum $YY, = \frac{2a^2\sqrt{gv}}{z^2}. dt = \frac{a^2 dr}{z^2}$ (II.) und indem also der Kolben um den Raum Mm niedergeht, kömmt das Wasser aus dem Querschnitte ZY in den Z, Y.

V. Wenn aber der Kolben in mn gekommen ist, so gehört da seine Geschwindigkeit der Höhe $v + dv$ oder sie selbst verhält sich wie $\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$. Um alsdenn die Geschwindigkeit des Wassers zu finden, das im Querschnitte Y, Z, ist, muß man desselben Weite wis-

sen, und diese wird durch den Theil der Länge der Röhre DY = s bestimmt.

VI. Weil man nähmlich z als eine Function von s ansehen kann, so seße man, $dz = Sds$, so verwandelt sich von Y bis Y, des Querschnitts Durchmesser, aus z in $z + Sds$; und weil der durchlaufene Raum, oder $ds = \frac{a^2 dr}{z^2}$, so ist in Y, Z, der Durchmesser $= z + \frac{a^2 S.dr}{z^2}$ die Geschwindigkeit in Y, Z, verhält sich also wie $\frac{a^2 . \sqrt{(v + dv)}}{(z + \frac{a^2 . S . dr}{z^2})^2}$ und gehört der Höhe $\frac{a^2 . (v + dv)}{(z + \frac{a^2 . S . dr}{z^4})^4}$ Nun ist $\frac{1}{(z + \frac{a^2 . Sdr}{z^2})^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{4a^2 . Sdr}{z^7}$, also ist diese Höhe $= \left(\frac{a^4}{z^4} - \frac{4a^6 . S . dr}{z^7}\right) . (v + dv)$ und übertrifft also die Höhe, welche der Geschwindigkeit in YZ zugehört (III.) um $\frac{a^4 dv}{z^4} - \frac{4a^6 . v . Sdr}{z^7}$.

VII. Man sucht nun die beschleunigende Kraft, welche zu dieser Aenderung der Geschwindigkeit nöthig ist (wie 455; XV; u. anderswo). Die

nur

nur gefundene Aenderung der Höhe ist, was in höh. Mech. (I. Abschn. 76) dv heisst, und das dortige dx, ist hier $\frac{a^2 dr}{z^2}$ (IV) folglich ist die gesuchte beschleunigende Kraft $= \frac{a^2 dv}{z^2 dr} - \frac{4a^4 S.v}{z^5}$.

VIII. Ferner fragt sich also, ob man aus andern Gründen auch die beschleunigende Kraft bestimmen kann, die sich im Querschnitte YZ befindet, oder eigentlich in einer unendlich dünnen Wasserschicht YyzZ, wo sich aus 670; folgende Benennungen geben:

Die Linien	Xx	xy	Yy
heissen	dx	y + dy	ds

Diese Wasserschicht ist also $= \frac{\pi z^2 ds}{4}$.

IX. Diese Kräfte nun, welche auf diese Wasserschicht wirken, sind folgende.

Ihr eigen Gewicht, das durch die nur gefundene Masse ausgedruckt wird, und nach der Verticallinie YX wirkt. Daraus folgt nach der Richtung yY ihr respectives Gewicht $\frac{\pi z^2 dy}{4}$, welches der Bewegung nach Yy entgegen wirkt.

X. Auserdem wird diese Schicht auf der Seite YZ von dem ihr folgenden Wasser, und auf der Seite yz von dem vorhergehenden gedruckt. Wären diese beyden Drückungen gleich, so würde eine die andere aufheben, und es erfolgte aus beyden

den zusammen keine Aenderung der Geschwindigkeit

XI. Man stelle sich vor, der Druck, den die Fläche YZ. betrage soviel, als das Gewicht einer Wassersäule, die diese Fläche zur Grundfläche, und die Höhe p hätte. Für den Druck, den die Fläche yz leidet, bedeutet $p + dp$ eben so was. Es erhellt, daß p eine Function von x oder s seyn wird.

XII. Setzte man in die Seitenwand, bey Z eine verticale Röhre, so würde in derselben Wasser ruhend auf die Höhe p erhalten werden; so bestimmt sich hier zugleich der Druck auf die Seitenwände (wie in 609).

XIII. Man kann sich also vorstellen, als würde die Fläche bey ZY mit einem Gewichte nach der Richtung Yy gedruckt, das der Wassersäule $\frac{\pi z^2 p}{4}$ gliche.

XIV. Eben so wird die Fläche bey zy, nach einer Richtung, die von Y nach y, zu geht, so stark gedruckt werden, als ob auf ihr eine Wassersäule von der Höhe $p + dp$ stünde

XV. Und, statt diesen Druck unmittelbar auf sie anzunehmen, kann man setzen, auf die Fläche bey YZ drucke eine Wassersäule von der Höhe $p + dp$ nach der Richtung Yy, daraus entsteht auf yz eben der Druck wie in XIV. Dieß wäre, nach Joh. Bernoullis Redensart, der Druck von der Fläche bey zy auf die bey ZY übergetragen.

XVI.

XVI. Der Druck, den die Fläche bey zy auf die beschriebene Art leidet, wird angewandt, die Bewegung in dem Wasser, das sich von zy nach GH befindet, zu unterhalten, und wo nöthig zu ändern, das ist die Wirkung, die er ausübt, und weil keine Wirkung ist, wo sich nichts widersetzt, so wird sich das erwähnte Wasser, seiner Trägheit und seines Gewichts wegen, dieser Wirkung widersetzen. Man kann sich also diese Widersetzung so vorstellen, als wenn die in XV angegebene Wassersäule nach der Richtung yY rückwärts druckte, und sich so die Wasserschicht Yz zwischen zweenen Drucken befände, deren einer sie vorwärts nach der Richtung Yy, der andere rückwärts nach der Richtung yY triebe, die Höhen der Wassersäulen, wären für jenen p, für diesen, $p + dp$.

XVII. Diesen Druck der Wassersäule, deren Höhe $p + dp$ ist, nach yY gerichtet annehmen, ist weiter nichts, als was man bey festen Körpern als Gegenwirkung anzusehen gewohnt ist. (Höh. Mech. III. Abschn. 125 u. f.) Bey flüssigen hat er noch den eignen Erfolg, sich auf die Seitenwände fortzupflanzen. So, glaube ich, läßt sich wegen dessen Rechenschaft geben, was am Ende von XVI; steht, Hr Euler nimmt es ohne einige Erläuterung als bekannt an.

XVIII. Aus (XVI.) wird also die Wasserschicht Yz nach der Richtung yY so stark getrieben wer-

werden, als der Druck einer Wassersäule $\frac{\pi z^2 dp}{4}$ beträgt; Setzt man hiezu das respective Gewicht dieser Wasserschicht (IX.) so hat man in ihr eine bewegende Kraft $\frac{\pi z^2 (dp + dy)}{4}$ nach der Richtung yY, und diese, mit der Masse dividirt (VIII.), giebt die beschleunigende Kraft nach dieser Richtung $= \frac{dp + dy}{ds}$.

XIX. Die beschleunigende Kraft (VII.) war nach Yy gerichtet. Man muß also das Entgegengesetzte von ihr der jetzo gefundenen gleich setzen, so erhält man

$$dp + dy = -\frac{a^2 ds . dv}{z^2 dr} + \frac{4a^4 . S ds}{z^5} . v$$

XX. Aus dieser Gleichung durch die Integration p für einen gegebenen Augenblick zu finden, muß man für diesen Augenblick v; dv, r, dr, als gegeben ansehn, und so integriren, daß nur das als veränderlich betrachtet wird, was die Stelle des Punctes Y in der Röhre betrift, und also durch x, y, s; gegeben ist.

672. Diese Integration wird folgendergestalt bewerkstelligt: Aus (671; VI.) verwandelt sich die nur gefundene Gleichung in

$$dp = -dy - \frac{a^2 dv ds}{z^2 dr} + \frac{4 . a^4 v dz}{z^5} .$$

Nach

Nach der nur gemachten Erinnerung, ist die Integralgleichung hievon

$$p = Const - y - \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2} - \frac{a^4 v}{z^4}.$$

673. Man kann hieraus zuerst den Druck an jeder unbestimmten Stelle des Stiefels P, 55 F. suchen. Hier ist $MP = s$; $z = a$; also $\frac{ds}{z^2} = \frac{MP}{a^2}$ welches Integral also dergestalt genommen ist, daß es für $MP = o$ verschwindet. Ferner wäre $y = CP = b - r - s$, der Druck auf jede Stelle des Stiefels wäre also

$$Const - b + r + MP - \frac{a^2 dv}{dr} \cdot \frac{MP}{a^2} - v$$

Wenn man nun $MP = o$ setzt, so erhält man den Druck auf M. Dieser Druck aber ist $= k$. Also ist $k = Const - b + r - v$ und

$$Const = k + b - r + v$$

674. Für den Stiefel von M bis D ist $\frac{MP}{a^2} = \frac{b-r}{a^2}$, aber $y = o$; und daher der Druck auf DE; wo $z = c$;

$$k + b - r + v - \frac{(b-r) dv}{dr} - \frac{a^4 v}{c^4}$$

675. Man lasse nun in $\frac{ds}{z^2}$; z allemahl einen Durchmesser der Röhre, und ds das zugehörige Element der centrischen Linie bedeuten, daß s

ein

ein Bogen der centrischen Linie in der Röhre ist, der sich von D anfängt. Man integrire $\frac{ds}{z^2}$ so, daß es für $s = o.$ und $z = o$ verschwindet. In diesem Integrale setze man nun $s = DY$, und so sey der Werth des Integrals $= Q$; In dieser Bedeutung nun ist der Druck bey Y;

$$p = k + b - r + v - y - \frac{(b-r).dv}{dr} - \frac{a^2 dv}{dr}.Q - \frac{a^4 v}{z^4}$$

$$= k - y + (b-r).(1 - \frac{dv}{pr}) - \frac{a^2 dv}{dr}.Q + v.(1 - \frac{a^4}{z^4}.)$$

676. Für die ganze Röhre, DG, werde $Q = H$, die andern dahin gehörigen Bezeichnungen aus (670) gebraucht, ist der Druck daselbst

$$k - g + (b - r).(1 - \frac{dv}{dr}) - \frac{Ha^2 dv}{dr} + v.(1 - \frac{a^4}{h^4})$$

677. Weil aber das Wasser daselbst ausläuft, so giebt es, sagt Hr. Euler, da keinen Druck mehr, und also ist dieser Werth $= o$; und das giebt folgende Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Kolbens

$$(b - r + Ha^2)dv - (1 - \frac{a^4}{h^4}).vdr = (k - g + b - r)dr.$$

678. Wenn man diese Gleichung integriren wollte, so wäre

An. Un.	y	a	x	a	n	b	q
412.							
hier	v	$b - r + Ha^2$	r	$1 - \frac{a^4}{h^4}$	o	1	$k + g + b - r$

679.

679. Es verlohnt sich aber nicht der Mühe, dieses Integral zu berechnen, weil es einen so verwickelten Ausdruck giebt, daß man, ohne es auf einen bestimmten Fall anzuwenden, keinen Gebrauch davon machen kann; die Sätze, die man daraus herleiten wollte, bekommen durch alle die Umstände, welche in die Rechnung müssen gebracht werden, zuviel Einschränkungen als daß sie in der Ausübung sehr brauchbar wären. Man wird sich hievon leicht einen Begriff machen, wenn man das (511) gefundene Integral betrachtet, dessen Differential (502) mit dem gegenwärtigen soviel Aehnliches hat.

680. Hr. Euler wendet daher diese Rechnung nur auf den Fall an, wo die Höhe, auf welcher das Wasser soll ausgegossen werden, in Vergleichung mit der Höhe des Stiefels sehr groß ist.

681. Hier sind g. und die Grösse H, die dadurch bestimmt wird, in Vergleichung mit b und r sehr groß. Man könnte also in den Gleichungen (675; 677) b und r in Vergleichung mit den übrigen Grössen als geringe ansehn, und die letzte nach dieser Voraussetzung integriren. Es wird aber eben so bequem, und zu Erhaltung der verlangten Schärfe dienlicher seyn, wenn man in (677) v durch eine Reihe ausdruckt, und in dieser Reihe die angegebene Bedingung anbringt. Das würde so geschehen.

682. Man setze $\frac{a^2}{h^2} = n$ so erhält man in (677)

$$\left.\begin{matrix} Ha^2 \\ +b \end{matrix}\right| dv - rdv + vdr.(n^2 - 1) - (k - g) \left.\begin{matrix} | \\ - b \end{matrix}\right| dr + rdr = 0$$

Hier sey $v = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 \ldots$ so ist

$$\frac{dv}{dr} = A + 2Br + 3Cr^2 + 4Dr^3 \ldots$$

Wenn man in der Differentialgleichung jedes Glied mit dr dividirt, und darauf diese Reihen in sie setzt, so erhält man $o =$

$$\left.\begin{matrix} (Ha^2 + b).A \\ -k+g-b \end{matrix}\right| + 2(Ha^2 + b)B \left.\begin{matrix} | \\ -A \end{matrix}\right| r$$
$$+(n^2 - 1)A$$
$$+1$$
$$\left.\begin{matrix} +3(Ha^2 + b)C \\ -2B \\ +(n^2-1)B \end{matrix}\right| r^2 \left.\begin{matrix} | \\ -3C \\ +(n^2-1).C \end{matrix}\right| + 4(Ha^2 + b).D \left.\begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix}\right| r^3 \ldots$$

683. Daraus erhält man

$$A = \frac{k - g + b}{Ha^2 + b}; \quad B = -\frac{(1 + (n^2 - 2).A)}{2(Ha^2 + b)}$$

$$C = -\frac{(n^2 - 3).B}{3.(Ha^2 + b)}; \quad D = -\frac{(n^2 - 4).C}{4.(Ha^2 + b)}$$

Es würde leicht fallen, das Gesetz des Fortganges dieser Reihe anzugeben.

684. Die Coefficienten, lassen sich selbst noch durch Näherung unter der (681) angenommenen Bedingung ausdrucken. Aus (676) erhellt, daß Ha^2 eine Grösse von einer Abmessung ist, und hier wird sie in Vergleichung mit b; sehr groß angenommen. Man kann daher das weglassen,

wo

wo der kleine Bruch $\frac{b}{Ha^2}$ von höhern Potenzen als von der zweyten vorkäme; Ein Quotient aber, den irgend andere der gegebenen Linien und deren Producte, mit einer Potenz von Ha^2 dividirt geben, kann als unbeträchtlich angesehen werden, wenn diese Potenz den dritten Grad übersteigt. Nach diesen Bemerkungen wird sich folgendes geben:

Man drücke zuerst $\frac{1}{Ha^2+b}$ selbst durch eine Reihe aus. Sie ist $\frac{1}{Ha^2} - \frac{b}{Ha^2\,a^4} + \frac{b^2}{H3\,a^6}$

Ihr Quadrat $= \frac{1}{H^2\,a^4} - \frac{2}{H^3\,a^6} \ldots$

Ihr Würfel $= \frac{1}{H^3\,a^6} \ldots$

685. Daraus giebt sich, beynahe

$$A = \frac{k-g}{Ha^2} - \frac{(k-g)b}{H^2\,a^4} + \frac{(k-g)\,b^2}{H^3 a^6} \ldots$$

$$\frac{+b}{Ha^2} \qquad \frac{-b^2}{H^2\,a^4} \ldots$$

$$B = -\frac{1}{2.(Ha^2+b)} - \frac{(n^2-2).A}{2.(Ha^2+b)}$$; der zweyte Theil ist $-\frac{(n^2-2).(k-g+b)}{2.(Ha^2+b)^2}$ also

$$B = -\frac{1}{2Ha^2} + \frac{b}{2\,H^2\,a^4} - \frac{b^2}{2\,H^3\,a^6}$$

$$-\frac{(n^2-2).(k-g)}{2.H^2a^4}+\frac{(n^2-2).(k-g).b}{H^3a^6}-\frac{(n^2-2).b}{2H^2a^4}$$
$$=-\frac{1}{2Ha^2}-\frac{(n^2-2).(k-g)}{2H^2a^4}-\frac{(n^2-3).b}{2H^2a^4}$$
$$+\frac{(n^2-2).(k-g).b}{H^3a^6}-\frac{b^2}{2H^3a^6}$$

Den letzten Theil dieses Coefficienten, kann man schon seiner Kleinigkeit wegen weglassen.

Ferner ist, den Werth von B, wie er jetzo in zween Theilen ausgedruckt ward, gebraucht

$$C=-\frac{(n^2-3)}{3.(Ha^2+b)}.\left(\frac{-1}{2(Ha^2+b)}-\frac{(n^2-2).(k-g+b)}{2.(Ha+b)^2}\right)=+\frac{(n^2-3)}{3.2}.$$
$$\left(\frac{1}{(Ha^2+b)^2}+\frac{(n^2-2).(k-g+b)}{(Ha^2+b)^3}\right)$$

Der letzte Factor ist

$$\frac{1}{H^2a^4}-\frac{2b}{H^3a^6}$$
$$+\frac{(n^2-2).(k-g)}{H^3a^6}$$
$$+\frac{(n^2-2)b}{H^3a^6}$$

Wo man wieder die Theile, die b im Zähler enthalten, ihrer Kleinigkeit wegen, weglassen kann, also ist

$$C=\frac{n^2-3}{6}.\left(\frac{1}{H^2a^4}+\frac{(n^2-2).(k-g)}{H^3a^6}\right)$$

686. Durch die jetzt gefundenen drey Coefficienten giebt sich in (682) v beynahe, und nachdem die Stelle, wo der Ausguß geschieht, hoch erhoben ist, kann man sich mit den ersten beyden, oder mit dem ersten allein begnügen.

Der Werth von v, den man so findet, stimmt mit Hr. Eulers seinem im XV. Artikel der angef. Abhandlung überein, Hr. Euler aber hat in seinem Ausdrucke die Potenzen von v nicht so ordentlich abgesondert, auch gar nicht gewiesen, wie man diesen der Wahrheit nahe kommenden Ausdruck findet.

687. Durch eben diese Coefficienten drückt man beynahe $\frac{dv}{dr}$ aus (682) und hat also auch beynahe den unbestimmten Werth des Drucks (675).

688. Wenn man nur den ersten Coefficienten behält (686) und auch darinnen, was mit b multiplicirt ist, weglässt, weil man $\frac{b}{Ha}$ unge-mein klein annimmt, so kömmt

$$v = \frac{k - g}{Ha^2} \cdot r \text{ also } \frac{dv}{dr} = \frac{k - g}{Ha^2};$$

In dem Werthe des Drucks (675) bleibt hier der Kleinigkeit wegen weg, was mit b - r und mit v multiplicirt ist, so wird er: $k - y - \frac{(k - g)}{H} \cdot Q$.

689. Im Anfange wenigstens, wenn r noch ganz klein ist, wird der jetzt gefundene Werth für v der Wahrheit nahe genug seyn, und der Kol-

ben also ohngefähr mit einer Geschwindigkeit niederwärts gehen, deren Höhe sich wie r verhält, das ist mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, wie ein Körper fiele, den eine viel schwächere Schwere als die unsrige niederwärts triebe, denn v ist viel kleiner als r; und indem der Kolben also durch die Höhe r niederwärts gegangen ist, hat er bey weiten nicht die Geschwindigkeit, die ein Körper, in den unsere Schwere wirkte, bey einem Falle durch diese Höhe erlangt hätte.

Man sieht dieses leicht daraus: Wenn auch die Kraft k, die den Kolben niederwärts treibt, wirklich ein Gewicht wäre, das auf den Kolben läge, und in das also unsere Schwere wirkte, so sänke doch dieses Gewicht viel langsamer, als es frey sinken würde, weil es das Wasser in der Röhre zu erheben hat. Es befände sich ohngefähr in Umständen, wie die sind, in denen sich höh. Mech. I. Abschn. §1. das Gewicht A befand, das nicht sinken kann, ohne ein anderes zu erheben.

690. Für die Geschwindigkeit des Kolbens in E, kann man die beyden ersten Glieder der Reihe für v (681) gebrauchen, so daß man darinnen $r = b$ setzt, dieses giebt aus (685)

$$A.b = \frac{(k-g).b}{Ha^2} - \frac{(k-g).b^2}{H^2a^4} \cdots + \frac{b^2}{Ha^2} \cdots$$

$$Bb^2 = \frac{-b^2}{2Ha^2} - \frac{(n^2-2).(k-g)b^2}{2.H^2a^4}$$

Die übrigen Theile dieser Coefficienten, gäben Grössen, in den b auf höhere Potenzen stiege, als auf das Quadrat, und bleiben also weg. So gehört diese Geschwindigkeit der Höhe

$$\frac{k-g}{Ha^2}.b + \left(\frac{1}{2Ha^2} - \frac{n^2.(k-g)}{2H^2a^4}\right)b^2$$

Und das wird die grösste Geschwindigkeit seyn, die der Kolben haben kann, wenn er mit beschleunigter Bewegung (689) niedergeht.

Diese Geschwindigkeit ist desto kleiner, je grösser H ist, oder: je länger die Röhre und je enger sie ist, wie aus der Bedeutung von H erhellt (676).

Daß die Höhe dieser Geschwindigkeit nicht verneint werden kann, ist aus der Natur der Sache klar. Man sieht auch, daß in dem Gliede des Werthes dieser Höhe, wo sich bb als ein Factor befindet, des andern Factors zweyter Theil, der das Zeichen — vor sich hat, allemahl kleiner seyn wird, als der erste, weil er das Quadrat von Ha zum Divisor hat.

Indessen wird dieser zweyter Theil desto grösser seyn, und folglich den ersten desto mehr vermindern, je grösser n, oder je kleiner die Oeffnung bey GH, in Vergleichung mit der Weite des Stiefels ist (682).

Je kleiner also diese Oeffnung ist, desto geringer ist die Geschwindigkeit des Kolbens.

691. Im Anfange der Bewegung, für $r = o$ ist $v = o$; und $\frac{dv}{dr} = A$ (682) der Druck (675) ist alsdenn $k - y + b.(1 - A) - a^2.A.Q.$ Läßt man im Werthe von A (684) diejenigen Theile weg, die das Quadrat von b enthalten, so bekömmt man diesen Druck

$$k - y + b - \frac{b.(k - g)}{Ha^2} - \frac{Q}{H}.(k - g + b - \frac{(k - g)b}{Ha^2}$$

692. Wenn der Kolben am tiefsten ist, oder $r = b$; wird in (682); $v = A.b$; $\frac{dv}{dr} = A + 2B.b$ und der Druck in (675)

$$k - y - a^2 Q.(A + 2Bb) + Ab.(1 - \frac{a^4}{z^4})$$

Nimmt man von den beyden Coefficienten in (685) wieder nur soviel, daß hier weggelassen wird, was höhere Potenzen als die erste von b enthält, so ist dieser Druck

$$k - y + \frac{b.(k - g)}{Ha^2} - \frac{a^2 b.(k - g)}{Hz^4} - \frac{Q}{H}.$$
$$(k - g - \frac{(n^2 - 1)(k - g).b}{Ha^2})$$

693. Auf die Stelle DE also, wo $y = o$ $z = c$; $Q = o$; ist der Druck

Im Anfange (691) $k + b - \frac{b.(k - g)}{Ha^2}$

Am Ende (692) $k + \frac{q(k - g)}{Ha^2} - \frac{2b.(k - g)}{Hc^4}$

Für jede unbestimmte Stelle des Kolbens, ist der Druck auf DE; (675)

$$k + (b - r).(1 - \frac{dv}{dr}) + v.(-\frac{a^4}{c^4})$$

also aus (682) dieser Druck

$$k + (b - r).(1 - A) + Ar.(1 - \frac{a^4}{c^4})$$

Oder, wenn man aus (685) den ersten Theil von A allein braucht

$$k + b - r - \frac{(k - g)}{Ha^2}.(b - 2r + \frac{a^4}{c^4} r)$$

Wenn man diesen allgemeinen Werth des Drucks auf DE, differentiirt, so ist sein Differential

$$-dr - \frac{(k - g)}{Ha^2}.(-2dr + \frac{a^4}{c^4} dr) \text{ oder}$$

$$(\frac{k - g}{Ha^2}.(2 - \frac{a^4}{c^4}) - 1)\, dr$$

Dieses ist bejaht, wenn $\frac{k - g}{Ha^2}.(2 - \frac{a^4}{c^4}) > 1$ oder

$$Ha^2 < (k - g).(2 - \frac{a^4}{c^4})$$

In diesem Falle wächst der Druck, indem der Kolben niedergeht, und das kann sich also nie ereignen, wenn nicht $a^4 < 2c^4$ ist, oder eigentlich muß $\frac{a^4}{c^4} < 2 - \frac{Ha^2}{k - g}$ seyn. Ist es grösser, so nimmt dieser Druck ab, indem der Kolben niedergeht.

Je grösser aber c in Vergleichung mit a, je weiter also die Oeffnung in die Röhre bey DE ist, desto geringer ist im allgemeinen Werthe dieses Drucks der Theil, der abgezogen wird, desto grösser ist also der Druck.

Sind aber b u. r in Vergleichung mit den andern Grössen sehr geringe, so ist dieser Druck immer ohngefähr $= k$.

694. Unter eben den (680) angenommenen Bedingungen, die Zeit zu finden, in welcher der Kolben, durch die beständig auf ihn wirkende Kraft (671. I.) von AB bis fast an E getrieben wird.

Aufl. I. Aus $v = Ar + Br^2$ findet man $v^{-\frac{1}{2}}$

$= A^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} . A. {}^{-\frac{3}{2}} r. {}^{-\frac{3}{2}} Br^2 = \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{A}} -$

$\frac{Br^{\frac{1}{2}}}{2A\sqrt{A}}$ Heisst nun e die Höhe des Falls in einer Secunde, so ist $2\sqrt{e}. dt = \frac{dr}{\sqrt{v}}$ also

$2\sqrt{e}.dt = \frac{r^{-\frac{1}{2}} dr}{\sqrt{A}} - \frac{Br^{\frac{1}{2}} dr}{2A\sqrt{A}}$, daher

$2\sqrt{e}. t = \frac{2r^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A}} - \frac{Br^{\frac{3}{2}}}{3A\sqrt{A}}$

II. Für den völligen Niedergang des Kolbens ist $2\sqrt{e}. t = \sqrt{\frac{b}{A}} . \left(1 - \frac{Bb}{3A}\right)$

III.

III. Nun ist aus (685)

$$A^{-\frac{1}{2}} = \frac{(k-g)^{-\frac{1}{2}}}{a^{-1} H^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(k-g)^{-\frac{3}{2}}}{a^{-3} \cdot H^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{1}{Ha^2} - \frac{(k-g)}{H^2 a^4} \right) \cdot b$$

oder, nach gehöriger Berechnung

$$= a. \sqrt{\frac{H}{k-g}} \cdot \left(1 - \frac{b}{2(k-g)} + \frac{b}{2Ha^2} \right)$$

IV. Dieß also mit $\sqrt{b}$ multiplicirt,

giebt $\sqrt{\frac{b}{A}}$.

V. Ferner ist aus (685)

$$Bb = -\frac{b}{2Ha^2} \cdot \left(1 + \frac{(n^2-2).(k-g)}{Ha^2} \right)$$

$$3A = \frac{3}{Ha^2} \cdot \left(k - g + b - \frac{(k-g)b}{Ha^2} \right)$$

$$\text{also } \frac{Bb}{3A} = \frac{b}{6} \cdot \frac{\left(1 + (n^2-2).(k-g.Ha^2) \right)}{k-g}$$

VI. Und $2 - \frac{Bb}{3A} = 2 + \frac{b}{6.(k-g)} + \frac{(n^2-2)b}{6.Ha^2}$

VII. Also VI.; mit IV, und III; multiplicirt, giebt $2\sqrt{}$ e. t.

VIII. Es ist aber in III; der letzte Factor

$$1 - \left(\frac{1}{k-g} - \frac{1}{Ha^2} \right) \cdot \frac{b}{2}$$

mult. mit VI; $= 2 + \left(\frac{1}{k-g} + \frac{(n^2-2)}{Ha^2} \right) \cdot \frac{b}{6}$

gibt

giebt $2-\left(\frac{1}{k-g}-\frac{1}{Ha^2}\right).b$

$+\left(\frac{1}{k-g}+\frac{n^2-2}{Ha^2}\right).\frac{b}{6}$

oder dieses Product ist:

$$2-\frac{5.b}{6.(k-g)}+\frac{(n^2+4)b}{6.Ha^2}.$$

IX. Also wird aus II, IV; VIII;

$$t.2\sqrt{e}=a.\sqrt{\frac{H.b}{k-g}}.\left(2-\frac{5b}{6.(k-g)}+\frac{(n^2+4).b}{6.Ha^2}\right)$$

Druckt man nun die Längen in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses aus, (Höh. Mech. I. Abschn. 36), so ist in nachstehender Gleichung, die Zeit, durch eine Menge von Secunden ausgedruckt:

$$t=\frac{a}{250}.\sqrt{\frac{H.b}{k-g}}.\left(2-\frac{5.b}{6.(k-g)}+\frac{(n^2+4)b}{6.Ha^2}\right)$$

695. Wenn b in Vergleichung mit $k-g$ und Ha^2 sehr gering ist, so wird diese Zeit, der Wahrheit ziemlich nahe $\frac{a.}{125}\sqrt{\frac{H.b}{k-g}}$.

696. Die Wassermenge, welche durch GH in der Zeit ausfliesst, in welcher der Kolben von oben bis zu unterst ganz niedergeht, beträgt soviel, als auf einmahl im Kolben Raum hat, und ist also, wie man auch diese Zeit ausdrücken will, allemahl $\frac{\pi a^2 b}{4}$.

697. Aufg. An einem Druckwerke, wie Hydraul. 16; sind zweene gleiche und ähnliche Stiefel, die das Wasser in eine und dieselbe Röhre treiben. Man sucht die Zeit des Auf- und Niedergehens ihrer Kolben, und die Menge Wasser, die innerhalb einer Stunde ausgegossen wird. Alles in der Voraussetzung (680).

Aufl. I. Die bisher gebrauchten Benennungen, bleiben alle. Die, welche den Stiefel angehn, gelten für einen Stiefel, wie für den andern, und die Röhre ist für beyde einerley.

II. Weil beständig ein Stiefel sich in die Röhre ausleeret, indem der andere sich füllt, so ist es soviel, als wenn ein einziger Stiefel, unabläßig Wasser in die Röhre triebe.

III. Die Zeit, in welcher des einen Stiefels Kolben, einmahl hierauf, und alsdenn wieder hinab geht, ist noch einmahl so groß, als die in (694; X.) gefundene Zeit eines Niederganges, oder sie ist

$$\frac{a}{125}\cdot\sqrt{\frac{H.b}{k-g}}\cdot\left(2-\frac{5.b}{6.(k-g)}+\frac{(n^2+4).b}{6.Ha^2}\right).$$

IV. In dieser Zeit, leeren sich beyde Stiefel zusammen aus (II.), oder es fliesst durch GH die Wassermenge $\frac{\pi a^2 b}{2}$ in 2t Secunden. Folglich

$\frac{1800.\pi a^2 b}{2t}$ in 3600 Secunden oder in einer Stunde.

V.

V. Wenn man statt 2 t seinen Werth aus (694) setzt, so wird diese Wassermenge

$$1800.\pi a^2 b.\frac{125}{a}.\sqrt{\frac{k-g}{H.b}}$$

$$2-\frac{5b}{6.(k-g)}+\frac{(n^2+4)b}{6.Ha^2}.$$

VI. Oder $$\frac{900.125.\pi a^2 b\sqrt{(k-g)}}{(1-\frac{5b}{12(k-g)}+\frac{(n^2+4).b}{6.Ha^2})\sqrt{Ha^2 b}}$$

698. Der Druck ist für jede Stelle des niedergehenden Kolbens, beynahe so groß, wie er (688) angegeben worden.

Bey einem Stiefel, litte die Röhre nur Druck, indem sein Kolben niederginge, während seines Hinaufgehens litte sie, wenigstens von wegen des Kolbens, keinen Druck (denn wenn während dieser Zeit, etwa Wasser in ihr stehn bleibt, so druckt dieses freylich.) Bey zween Stiefeln, wird unablässig Druck von dem einen oder von dem andern Kolben verursacht.

699. Damit man sich die Mühe erspart, die Längen in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses auszudrucken, so darf man nur die beständige Zahl 900. 125 mit $\sqrt{}$ 1000 dividiren, und den herauskommenden Quotienten 3557 statt ihrer gebrauchen, alsdenn aber die Länge in rheinländischen Fussen, wie gewöhnlich ausdrucken.

Der Grund von diesem Verfahren, wird sich folgendergestalt einsehen lassen: Man ist deßwegen

gen genöthigt, die Längen in Tausendtheilchen auszudrucken, weil man $\sqrt{e} = 125$ gesetzt hat. Aus $e = 15,625$ lässt sich die Quadratwurzel nicht anders angeben, als daß man statt dieser Zahl 15, 62 oder 15, 6250 nähme, und so hätte man die Quadratwurzel bis auf Zehntheilchen oder bis auf Hunderttheilchen des rheinl. Fusses. Will man aber sich des Vortheils bedienen, daß 15625 eine Quadratzahl ist, so muß man sie als eine ganze Zahl ansehn, und folglich ein Tausendtheilchen zur Einheit nehmen.

Indessen ist auch $e = \frac{15625}{1000}$ und alsdenn

$\sqrt{e} = \frac{125}{\sqrt{1000}}$. Man darf also nur diesen letzten Ausdruck für $\sqrt{e}$ brauchen, wenn man den ganzen rheinl. Fuß zur Einheit annehmen will.

Wenn man also der Zahl 125 von (694) an, wo sie zuerst in die Rechnung kömmt, folgt, und überall statt ihrer $\frac{125}{\sqrt{1000}}$ schreibt, so erhellt, daß hier $\frac{900.125}{\sqrt{1000}}$ statt 900. 125 kommen muß.

Diese Zahl findet sich am bequemsten so:

$$\frac{900.125}{\sqrt{1000}} = \frac{900.125}{10\sqrt{10}} = \frac{900.125.\sqrt{10}}{10.10}$$

$= 9.125.\sqrt{10} = 1125.\sqrt{10}$;

Aus Ludolfs Tetragonometria ist $\sqrt{10} = 3,1622$;

1622; also 1125. $\sqrt{10} = 3557,4750$; statt dessen Hr. E. nur die Ganzen angiebt.

700. Also ist die Menge vom rheinländischen Cubikfuß Wasser, die durch GH in einer Stunde ausgegossen werden, aus (697; VI.)

$$\frac{3557.\pi.\sqrt{(a^2 b.(k-g))}}{(1-\frac{5b}{12.(k-g)}+\frac{(n^2+4)b}{12.Ha^2}).\sqrt{H}}$$

701. Läßt man im Nenner weg, was b enthält, so kömmt diese Wassermenge

$$3557.\pi.\sqrt{\frac{a^2 b.(k-g)}{H}}.$$

702. Man wird finden, daß $3557.\pi = 11176$.

703. Wollte man diese Formeln so einrichten, daß sie bey jedem Maasse können gebraucht werden, so muß man für e seinen allgemeinen Ausdruck, durch den Buchstaben behalten, und bey jeder Anwendung diese Grösse in demjenigen Maasse ansdrucken, das man hier brauchen will, wozu im Vorhergehenden ist Anleitung gegeben worden (153, 163, 173).

704 Das Verfahren würde folgendes seyn: Man setze in (694; X.) $t.2\sqrt{e} = S$, es erhellt, was S bedeutet; so ist $t = \frac{S}{2\sqrt{e}}$, also die Zeit in (697; III.) $= \frac{S}{\sqrt{e}}$ und weil in soviel Se-

cunden

gunden die Wassermenge $\frac{\pi a^2 b}{2}$ ausgegossen wird, so ist die Wassermenge, die in einer Stunde ausgegossen wird $\frac{1800\,\pi a^2 b \sqrt{e}}{S} = 1800.\,\pi\sqrt{e}.\frac{a^2 b}{S}$.

Nun ist $\frac{a^2 b}{S}$, das, was in (700) mit 3557. π multiplicirt ist, wie die Rechnung leicht geben wird. Man schreibe also in (700) nur 1800. $\pi.\sqrt{e}$ statt 3557. π, so kann man sich, was für Maasses man will, bedienen, wenn man nur, wie sich leicht versteht, e und die übrigen Längen, in einerley Maasse ausdruckt.

Hat man ein gewisses Maaß, das man beständig brauchen will, z. E. Pariser, festgesetzt, so läßt sich, wie vorhin in häufigen Exempeln gezeigt worden ist, die beständige Zahl 1800. $\pi\sqrt{e}$ einmahl für allemahl berechnen, die bey allen Exempeln einerley bleibt.

705. Bey einer Röhre, die durchaus von einerley Weite ist, braucht man Hr. Eulers Formeln so:

Hier ist $z = c = h$; also Q. oder $\int\frac{ds}{z^2} = \frac{s}{c^2}$.

Man nenne der Röhre ganze Länge $DG = l$; so ist $H = \frac{l}{c^2}$ und $n = \frac{a^2}{c^2}$ Also $\frac{Q}{H} = \frac{s}{l}$ und in

(688) der Druck $= k - y - \frac{(k-g).s}{l}$

Die Wassermenge in einer Stunde (700) ist

$$3557.\pi.a.c.\sqrt{\frac{b.(k-g)}{l}} \Big/ 1-\frac{5b}{12(k-g)}+\frac{(n^2+4).b}{12.nl}$$

oder (701; 702) $11176.ac\sqrt{\frac{b.(k-g)}{l}}$

706. Bedeutet K die Menge von Cubikfuß Wasser, deren Gewichte die Kraft gleicht, die auf jeden Kolben wirkt, daß also

$K=\frac{\pi a^2 k}{4}$ oder $k=\frac{4K}{\pi a^2}$, so ist

$$k-g=\frac{4K-\pi a^2 g}{\pi a^2}$$

707. Alsdenn ist in 705, der Druck

$\frac{4K}{\pi a_2}-y-\frac{(4K-\pi a^2 g).s}{\pi a^2 l}$ und die Wassermenge

$$3557.c.\sqrt{\frac{\pi b.(4K-\pi a^2 g)}{l}} \Big/ 1+\frac{5\pi a^2 b}{12.(4K-\pi a^2 g)}+\frac{(n^2+4)b}{12nl}$$

oder die beyden letzten Glieder des Nenners weggelassen

$$12611.c.\sqrt{\frac{b.(4K-\pi a^2 g)}{4l}}.$$

Die Zeit (697; III.) in der sich $\frac{\pi a^2 b}{2}$ Cubikfuß ausgiessen, findet sich also durch folgende Pro-

Proportion: Wie die Wassermenge in einer Stunde zu $\frac{\pi a^2 b}{2}$, so 3600 Secunden zu der gesuchten Zeit in Secunden ausgedruckt.

Das gibt diese Zeit $\frac{1800 \pi a^2 b}{12611.c.\sqrt{(\frac{b}{l}.(K-\frac{1}{4}\pi a^2 g))}}$,

oder $\frac{0,4484.\ a^2\sqrt{bl}}{c\sqrt{(K-\frac{1}{4}\pi a^2 g)}}$.

708. In diesen Formeln muß $K > \frac{\pi a^2 g}{4}$ seyn, oder die Kraft, die den Kolben treibt, mehr betragen, als das Gewicht einer Wassersäule, so weit als der Stiefel, und so hoch als die Röhre ist.

Man begreift dieses leicht ohne Rechnung aus der Hydrostatik. Wäre die Kraft nur so groß, so könnte sie nur das Wasser in der Röhre stehend erhalten (und daher würde die Zeit (707) unendlich, das ist, es erfolgte nie eine Bewegung), wäre sie kleiner, so müsste sie dem Drucke nachgeben, den das Wasser in der Röhre auf den Kolben ausübt.

709. Wenn sich nichts ändert, als diese Kraft, so verhält sich in (707) die Wassermenge, wie die Quadratwurzel aus dem Ueberschusse der Kraft, über die (708) angezeigte Wassersäule. Je grösser also dieser Ueberschuß ist, desto mehr Wasser wird ausgegossen werden.

Auch das übersieht man so überhaupt wohl ohne Rechnung. Aber was man ohne Rechnung nicht übersehen würde, ist, daß wenn die Kraft verstärkt wird, die Wassermenge nur wie die Quadratwurzel aus diesem Ueberschusse zunimmt, woraus folgt, daß die Wassermenge nur wenig zunimmt, wenn gleich die Kraft beträchtlich verstärkt wird.

710. Die Wassermenge (707) verhält sich, wenn alles übrige einerley ist, wie der Durchmesser der Röhre.

711. Wenn aber c, b, a, g, K, für zwey Druckwerke einerley sind, so verhält sich diese Wassermenge verkehrt, wie die Quadratwurzel aus der Länge der Röhre.

Hieraus leitet Hr. Euler folgende Regeln her:

712. Erste Regel. Man mache die Röhre so weit, als sich thun läßt (710).

Der doppelte Durchmesser der Röhre giebt noch einmahl soviel Wasser u. s. w.

713. Hr E. räth daher, in der Ausübung dahin zu sehn, wie man die Röhren weit genug machen könne. Metallne Röhren möchten sich nicht allzuweit machen lassen, vielleicht könnte man irrdene, oder gar gemauerte in der Forme von Schornsteinen brauchen.

714. Den stärksten Druck steht die Röhre zu unterst aus, wo sie in den Stiefel gesetzt ist, und da springt sie auch am leichtesten.

Zu

Zu unterst ist der Druck $\frac{4K}{\pi a^2}$ (707) und weiter hinauf nimmt er immer ab, weil von dieser Grösse zwo abgezogen werden, die weiter hinauf immer grösser sind.

Weil nun der Druck zu unterst einerley bleibt, was auch die Röhre für eine Weite hat, so folgt, daß man der Wand der Röhre desto mehr Dicke geben muß, je weiter die Röhre ist; denn Hr. E. nimmt als eine Erfahrung an, daß, wenn zwo Röhren gleichen Druck aushalten sollen, die Dicken ihrer Wände sich wie die Durchmesser der Röhren verhalten müssen (Man s. hievon 45 u. f.). So würde man durch eine Röhre vom doppelten Durchmesser, noch einmahl soviel Wasser ausgiessen, aber ihre Wand müsste auch noch einmahl so dicke seyn.

715. Die Zeit eines Auf- und Niedergangs des Kolbens, verhält sich verkehrt, wie der Durchmesser der Röhre, wenn alles übrige einerley ist (707). Je weiter also die Röhre ist (712), desto schneller müssen sich die Kolben bewegen. Wenn man also gleich die Kraft auf den Kolben für eine weite Röhre nicht grösser annimmt, als für eine enge, so muß sie doch geschwinder arbeiten, und man kann also eigentlich nicht sagen, daß es eben dieselbe Kraft ist, die in eben der Zeit mehr Wasser ausgiesst.

Hier kömmt es nun auf die Art an, wie man die Bewegung in den Kolben erregen will, und

jede Maschine, die man dazu braucht, erfodert eine eigne Untersuchung.

Wenn z. E. ein Mensch einen Kolben treiben soll, so vermag er auf den Kolben mit aller Kraft, die er anwenden kann, nicht soviel, wenn der Kolben schon in Bewegung ist, und sich gleichsam seiner Wirkung entzieht, als wenn der Kolben aus der Ruhe in Bewegung gebracht wird. Es könnte etwas, das ein Mensch stossen sollte, so geschwinde gehn, daß der Mensch ihm nicht folgen, und also nicht darauf wirken könnte.

Wasser oder Wind wirken wiederum auf unterschiedene Art, nachdem die Sachen, auf die sie wirken, unterschiedene Geschwindigkeit haben, wie aus dem erhellt, was im zweyten Abschnitte von Wasserrädern ist gesagt worden.

716. Zweyte Regel. Die Röhre muß so kurz als möglich seyn (711). Also soviel sich thun lässt, gerade, und vom Stiefel bis dahin, wo sie ausgiessen soll, lothrecht in die Höhe geführt.

717. Die geringste Länge, welche man der Röhre geben kann, ist g; zu welcher Absicht der Stiefel bey F stehn müsste. Geht dieses nicht an, so muß die Röhre wenigstens ohne Krümmungen, nach einer schiefen geraden Linie geführt werden.

718. Wenn sich das Wasser, das man in I bringen wollte, nicht bey F, sondern davon entfernt bey D befände, so könnte man es erstlich durch einen Canal nach F leiten, und von da durch das Druckwerk erheben. Vielleicht wäre dieses vor-

vortheilhaft, wenn den Canal zu führen, nicht soviel kostete, als längere Röhren für das Druckwerk von D bis I zu führen, und man gewönne noch dabey an der Wassermenge.

719. Folgendermaassen wird man sich einen Begriff machen, wie viel man an der Wassermenge verliehrt, wenn man die Röhre von D nach I schief, aber doch gerade führen kann, so daß ihre Länge $= \sqrt{(DF^2 + g^2)}$.

Es sey $l = m.g$, wo der kleinste Werth $m = 1$ ist (717) für eine schiefe Röhre aber m jeden grössern Werth haben kann. Die Wassermenge in (707) für $l = g$; heisse T; und die für $l = m.g$ heisse W; so ist $T : W = \sqrt{m} : 1$.

Exempel. Es sey $DF = \frac{1}{2} FG$; also $l = g$. $\sqrt{\frac{5}{4}}$ so ist $T : W = \sqrt{4\frac{5}{4}} : 1 = 1,0574 : 1$ wie man leicht durch die Logarithmen findet.

So wäre also $W = \frac{T}{1,0574}$ und $T - W = \frac{1,0574 - 1}{1,0574} . T = \frac{0,0574}{1,0574} . T = 0,05 . T$ oder man verlöhre durch diese Schiefe etwa $\frac{5}{100}$ oder $\frac{1}{20}$ der Wassermenge, die eine senkrechte Röhre gäbe. Hr. E. setzt $\frac{1}{18}$.

Zweytes Exempel. Wäre $g = 130$, $l = 4500$ also $m = 34$, so ist $T : W = 5,83 : 1$ oder diese sehr schiefe Röhre giesst nur etwa den sechsten Theil Wasser aus, den eine lothrechte bey eben der Kraft ausgiessen würde.

Man sieht aus dem ersten Exempel, und auch schon aus der allgemeinen Formel, daß eine schon beträchtliche Schiefe, wenn sie nur nicht gar zu groß ist, die Wassermenge nicht eben sehr vermindert.

Diese Betrachtung ist also mit (718) zu verbinden, wenn man den dasigen Vorschlag beurtheilen will.

720. Wenn die Röhre kürzer ist, so ist auch die Zeit eines Auf- und Niederganges des Kolbens kürzer (707), und also müssen sich die Kolben geschwinder bewegen, wenn die zweyte Regel beobachtet wird. Es läßt sich also wegen dessen, was man eigentlich hier Kraft nennen will, eben die Erinnerung wiederholen, die (715) ist gemacht worden.

721. Ueberhaupt erhellt, daß man eigentlich hier den Effect betrachten müsste, der von einer gegebenen Kraft mit einer gegebenen Geschwindigkeit kann geleistet werden, wie so etwas bey den Wasserrädern betrachtet ward (351).

722. Aus (708) erhellt, daß man $K = \frac{\lambda . \pi a^2 g}{4}$ setzen kann, so daß $\lambda > 1$; Alsdenn ist $a = \sqrt{\frac{4K}{\lambda \pi g}}$ und in (707) die Wassermenge

$$12611.\ c.\sqrt{\left(\frac{(\lambda-1)\pi a^2 g}{4^1}.\ b\right)} = 12611.\ c.\sqrt{\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}.\frac{K.b}{1}\right)}.$$

und

und verhält sich also, wenn sich sonst nichts ändert, wie $\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$.

723. Die Zeit (707) ist $\frac{0,4484 \cdot a \sqrt{bl}}{c \sqrt{(\frac{\lambda - 1}{4} \cdot \pi g)}}$

oder statt a, seinen Werth gesetzt,

$$\frac{1,7936}{\pi c g} \cdot \sqrt{\frac{Kbl}{\lambda.(\lambda - 1)}} = \frac{0,5709}{c.g} \sqrt{\frac{Kbl}{\lambda.(\lambda - 1)}}$$

Diese Zeit verhält sich also wie $\sqrt{\frac{1}{\lambda\,(\lambda - 1)}}$.

724. Der Druck auf die Röhre, wo sie in den Stiefel gesetzt ist (707), beträgt λg.

725. Die Unterschiede, die aus unterschiedenen Werthen von λ entstehen können, deutlicher vor Augen zu stellen, sey

I. Der Durchmesser der Stiefel $a = \zeta \sqrt{\frac{K}{g}}$ (722).

II. Die Wassermenge in einer Stunde $= \eta c \sqrt{\frac{Kb}{l}}$ (722).

III. Die Zeit eines Auf- und Niedergangs $= \frac{\theta . \sqrt{Kbl}}{cg}$ (723).

IV. Der Druck $= \lambda . g$ (724).

Wo aus den angeführten Stellen

$$\zeta = \sqrt{\frac{4}{\lambda \pi}}; \eta = 12611 \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}, \theta = \frac{0,5709}{\sqrt{(\lambda . (\lambda - 1))}}$$

um ζ auszudrücken ist

$\log 4 = 0,6020600$
$\log \pi = 0,4971499$
$0,1049101$

halbirt $0,0524550 = \log \sqrt{\frac{4}{\pi}}$

giebt $\zeta = \frac{1,1283}{\sqrt{\lambda}}$.

726. Exempel. Es sey $\lambda = 3$ so ist $\zeta = \sqrt{\frac{4}{3.\pi}}$; dieses zu finden, verfahre ich so:

$8 + \log \frac{4}{\pi} = 8,1049101$
$\log 3 = 0,4771212$
$\log \frac{4}{\pi\lambda} = 7,6277899$; für $\frac{4}{\pi\lambda}$ in $\frac{1}{100000000}$

halbirt $3,8138949$

Dieser Logarithme gehört zu $\sqrt{\frac{4}{\pi\lambda}}$ in Zehntausendtheilchen. Er giebt $\zeta = 0,6515$.

Folglich ist der Durchmesser jedes Sties-

fels $= 0,6515.\sqrt{\frac{K}{g}}$.

II. Auch ist $\eta = 12611.\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\log 2 = 0,3010300$
$\log 3 = 0,4771212$
$\log \frac{2}{3} = -0,1760912$
halbirt $= -0,0880456 = \log \sqrt{\frac{2}{3}}$
$\log 12611 = +4,1007495$
$\log \eta = 4,0127039$
giebt $\eta = 10297$ also

also die Wassermenge in einer Stunde =

$$10297.\ c.\ \sqrt{\frac{K\,b}{l}}\ .$$

III. Ferner $\theta = \frac{0,5709}{\sqrt{6}}$ also,

$$\begin{array}{rl} 4 + \log\ 0,5709 & = 4,7565600 \\ \frac{1}{2}\log\ 6 & = 0,3890756 \\ \hline \log\ \theta & = 3,3674844 \end{array}$$

in Zehntausendtheilchen giebt $\theta = 0,2331$, und die Zeit eines Auf- und Niederganges $= 0,2331 . \frac{\sqrt{K\,b\,l}}{c\,g}$.

III. Endlich der Druck ist 3 g.

727. Hr. Euler hat eine Tafel berechnet, in welcher die vier Grössen (725) für unterschiedene Werthe von λ auf die Art angegeben sind, wie vorstehendes Exempel zeigt. Die Werthe von λ gehen von 1 bis 4 durch alle Ganze und Viertheile, und denn ist auch der Werth von $\lambda = 10$ in der Tafel.

In der Anwendung auf besondere Fälle, würde ich nicht die Wurzelgrössen z. E. $\sqrt{\frac{K}{g}}$ in I berechnen, und mit den gefundenen Decimalbrüchen multipliciren, sondern dieser Decimalbrüche zuvorgefundene Logarithmen, und die Logarithmen der Wurzelgrössen z. E. den von $\sqrt{\frac{K}{g}}$ brauchen. Es versteht sich, daß ich bey Wurzelgrössen, die sich be-

bequem ausdrücken und brauchen lassen, das gewöhnliche Verfahren beybehalten würde.

728. Den Gebrauch haben die Zahlen selbst, und das ist auch Hr. Eulers Absicht bey ihnen, daß man die Werthe jeder der vier Grössen (725) bequem mit einander vergleichen kann, die unterschiedenen Werthen von λ zugehören. Für $\lambda = 10$ ist z. E. $\eta = 11964$; Folglich verhalten sich, wenn alles übrige einerley ist, die Wassermengen für $\lambda = 3$ und $= 10$; wie 10297 : 11964 also ohngefähr wie 10 : 12 oder wie 5 : 6. Die Wassermenge wächst also sehr wenig, wenn λ von 3 bis 10 wächst. Gegentheils verhält sich der Druck bey diesen beyden Werthen wie 3 : 10, und ist also für den letzten viel stärker. Man müsste also für diesen letzten Werth, die Röhre viel stärker machen, als für den ersten, ohne daß man an der Wassermenge viel gewönne.

Aus diesem Grunde urtheilt Hr. E. es sey nicht rathsam, λ grösser als 4 zu nehmen.

729. Ein anderer Gebrauch dieser Berechnungen und der auf sie gegründeten Tafel ist: Den Durchmesser der Stiefel zu bestimmen, wenn die Stärke der Röhre gegeben ist.

Die Röhren lassen sich nähmlich nicht allemahl so stark machen, als man will, und man muß alsdenn die übrigen Theile der Maschine so einrichten, daß die Röhre den Druck aushalten kann.

730. Wäre z. E. die Röhre nur im Stande, den Druck einer Wassersäule, deren Höhe zg ist, auszu-

auszuhalten, so dürfte λ nicht grösser als 3 seyn, und aus 726; I; würde alsdenn der Durchmesser des Stiefels $0,6515 \sqrt{\frac{K}{g}}$.

Man setze g = 180 Fuß und K = 200 Pfund = 4 Cubikfuß Wasser, so wird dieser Durchmesser = 0,6515. $\sqrt{0,01}$ = 0, 13030.

Kleiner dürfte der Durchmesser nicht seyn, wäre er kleiner, so müsste (725; I.) ζ kleiner seyn, als 0,6515, folglich λ grösser als 3; also würde der Druck stärker als 3g, stärker als ihn die Röhre aushält.

731. Dieses Exempel völlig zu bestimmen, setze man die Röhre seyn lothrecht, also l = g = 100; ihr Durchmesser $c = \frac{1}{5}$; die Höhe, um welche der Kolben auf- und niedergeht, b = 1. So verhält sich der Innhalt der Röhre, zum Innhalte jedes Stiefels = $100.\frac{1}{25} : 1.0,13^2 =$ 4 : 1, 69.

Die Wassermenge in einer Stunde, wäre also $10297.0,2.\sqrt{0,04} = 10297.0,04 = 411,88$ also ohngefähr 412 Cubikfuß.

Die Zeit (726; III.) wäre

$$\frac{0,2331.\sqrt{400}}{\frac{1}{5}.100} = \frac{1,1655.20}{100} = 0,2331.$$

732. Aber in so kurzer Zeit, die noch nicht $\frac{1}{4}$ einer Secunde beträgt, ist es nicht möglich, daß der Kolben einmahl auf- und niedergehen kann. Es erhellt also, daß man solche Werthe für λ annehmen kann, die zu Bedingungen führen,

welche unmöglich zu erfüllen sind. Dieß veranlasst folgende Untersuchung.

733. Aufg. Die Zeit des Auf- und Niedergangges der Kolben ist gegeben, nebst allen Abmessungen der Maschine, man sucht die Kraft, die auf den Kolben wirken soll, und den Druck der Röhre zu unterst.

Aufl. I. Die gegebene Zeit heisse t Secunden, die übrigen Benennungen, bleiben wie bisher.

II. Diese Zeit ist, was in (697; IV.) 2 t hiesse, in ihr giesst sich die Wassermenge $\frac{\pi a^2 b}{2}$ aus, und die Proportion $t : 3600 = \frac{\pi a^2 b}{2} : \frac{1800.\ \pi a^2 b}{t}$ hat zum letzten Gliede die Wassermenge in einer Stunde. Es ist aber log $1800.\pi = 3,7524224$ giebt $1800.\pi = 5654,9$ — Hr. Euler setzt die Wassermenge in einer Stunde $\frac{5654.\ a^2 b}{t}$.

III. Aus dem Werthe der Zeit, welcher in (707) gefunden worden, erhält man hier die Gleichung $t = \frac{0,4484.\ a^2 \sqrt{b}}{c.\sqrt{(K - \frac{1}{4})\pi a^2 g}}$

also $K - \frac{1}{4}\pi a^2 g = \frac{0,4484^2.\ a^4.\ bl}{c^2 t^2}$

und $K = \frac{1}{4}\pi a^2 g + \frac{0,201106.\ a^4\ bl}{c^2 t^2}$..

IV. Hieraus folgt $\frac{4K}{\pi a^2} = g + \frac{4.0,20106.bla^2}{\pi.c^2 t^2}$

und $4K - \pi a^2 g = \frac{4.0,20106.a^4 bl}{c^2 t^2}$.

V. Also der Druck (707) auf jede Stelle der Röhre $g + \frac{4.0,20106.bla^2}{\pi.c^2.t^2} - y - \frac{4.0,20106.ba^2.s}{\pi.c^2 t^2}$

Es ist aber $4.0,20106 = 0,80424$ und

$5 + \log 0,80424 = 4,9053856$

$\log \pi = 0,4971499$

$4,4082357$

Dieser Logarithme gehört zu der Menge von Hunderttausendtheilchen, die auf $\frac{4.0,20106}{\pi}$ gehen, und giebt also diese Zahl $= 0,25649$. Ich behalte davon mit Hr. Eulern nur die ersten drey Zifern, so ist der Druck auf eine unbestimmte Stelle der Röhre $g + \frac{0,256.ba^2}{c^2 t^2}.(1-s) - y$.

VI. Und zu unterst an der Röhre, wo y und $s = 0$ sind, ist der Druck $g + \frac{0,256.lba^2}{c^2 t^2}$.

734. Dieser Druck (733; VI.) beträgt also allemahl mehr, als das Gewicht einer Wassersäule so hoch, als die Röhre ist, um wieviel er grösser ist, zeigt das zweyte Glied in seinem Werthe. Er wird grösser, wenn die Höhe und Weite des Stiefels, nebst der Länge der Röhre grösser werden, die Weite der Röhre und die Zeit

des

des Auf- und Niederganges der Kolben aber ungeändert bleiben. Bleiben aber jene drey Grössen ungeändert, wenn die Röhre weiter wird, und die Kolben langsamer gehen, so nimmt der Druck ab.

735. Bedeutet p diesen untersten Druck, der nach (707) auch $= \frac{4K}{\pi a^2}$ ist, so ist $K = \frac{\pi a^2 p}{4}$.

Heisst die Wassermenge (733; II.) $M = \frac{5654 \cdot a^2 b}{t}$ (733; II.) also $a^2 b = \frac{M.t}{5654}$ so ist aus (733; VI.) $p = g + \frac{0,256.M.l}{5654 c^2 t}$.

In mehr also Wasser ausgegossen wird, desto stärker wird dieser Druck.

736. Dieser Druck kann also gar vielmahl grösser werden, als der Druck einer ruhenden Wassersäule von der Höhe g, auf welche das Wasser soll gehoben werden; und da wird die Röhre bersten, wenn sie nur diese ruhende Wassersäule zu tragen, im Stande ist.

Man hat sich bisher in der Ausübung immer begnügt, den Druck der erwähnten ruhenden Wassersäule zu kennen. Gegenwärtiges zeigt, wie wenig diese Kenntniß zureicht, und wie wichtig in der Ausübung eine tiefere Theorie ist, die sich ohne Rechnung des Unendlichen nicht erlangen lässt.

Exem-

Exempel. Bey einer gegebenen Maschine, sey der Durchmesser der Stiefel $a = \frac{4}{5}$ Fuß.

Die Höhe, um welche die Kolben auf- und niedergehen $b = 4$

Der Durchmesser der Röhre $c = \frac{3}{4}$

Ihre Länge $l = 3000$

Ihre Höhe $g = 60$

Die Zeit des Auf- und Niedergehens $t = 6$ Secund.

also aus (733; VI.) $p = 60 + \frac{0{,}256 \cdot \frac{25}{9} \cdot 4 \cdot 3000}{\frac{9}{16} \cdot 36}$

$= 60 + 270 = 330$ Fuß.

Diese Röhre wird also bersten, wenn sie nicht 330 Fuß hoch Wasser tragen kann, an statt, daß sie ruhendes Wasser nur auf 60 Fuß, eine mehr als fünfmahl geringere Höhe zu halten brauchte.

Dieses zeigt, wie hier die Untersuchungen von der Festigkeit der Röhren 45 .... 79 brauchbar sind, weil es doch darauf ankömmt, wie hoch die Säule ruhenden Wassers seyn darf, die eine Röhre tragen kann.

Die Kraft, die auf jeden Kolben wirken muß (735) ist $K = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{9} \cdot 330 = 461$ Cubikfuß Wasser, und in einer Stunde wird die Wassermenge (736) von $5654 \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{6} = 6701$ Cubikfuß erhoben.

Vergleichung vorhergehender Theorie Hr. Eulers, Mit Joh. Bernoullis seiner.

737. Man begreift leicht, daß Hr. Euler hier eben so eine Frage beantwortet hat, wie vorhin Johann Bernoulli: Eine gegebene Kraft wirkt auf Wasser im Stiefel, man kann daraus die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre finden, wie Johann Bernoulli that, bey dem das ein Gefäß hieß, was hier der Stiefel genannt wird, und das Gewicht des Wassers statt der Kraft auf den Kolben war, weil er nur an den Ausfluß des Wassers, nicht an desselben Erhebung dachte.

738. Beyder Formeln bequemer mit einander zu vergleichen, gehöre in Hr. Eulers Theorie die Geschwindigkeit, damit das Wasser bey GH ausfliesst, der Höhe u; so ist (670) $h^2 : a^2 = \sqrt{v} : \sqrt{u}$ also $v = \frac{h^4 u}{a^4}$. So läßt sich die Gleichung (677) folgender Gestalt ausdrucken

$$(b - + Ha^2).\frac{h^4 du}{a^4} - (\frac{h^4}{a^4} - 1).udr = (k - g + b - r)dr$$

739. Man setze, die Geschwindigkeit des Wassers beym Ausflusse bliebe ungeändert, und es sey keine Röhre am Kolben, so sind $H = 0$; $g = 0$; $dn = 0$; und $u = (k + b - r).\frac{a^4}{a^4 - h^4}$.

Man sieht leicht, daß diese Gleichung, $k = 0$ gesetzt,

setzt, mit Johann Bernoullis seiner einerley ist, es sind nähmlich:

Bern.	a	h : m	
hier	b — r	$a^2 : h^2$	

740. Hieraus wird erhellen, daß, wenn sich eine Röhre am Gefässe befindet, die bernoullische Gleichung von der eulerischen sich hauptsächlich dadurch unterscheiden wird, daß Bernoulli blos das Gewicht des Wassers, und Hr. Euler noch eine andere Kraft auf dem Kolben = K betrachtet. Man sieht also leicht, wie sich Bernoullis Verfahren auf Druckwerke, dadurch Wasser soll gehoben werden, anbringen liesse, wenn man nähmlich einen Kolben mit einer solchen Kraft ebenfalls dabey zu den übrigen Kräften brächte, die B. auf die Oberfläche des Wassers trägt.

741. Gegentheils würden Hr. Eulers Formeln sich auf die bernoullischen bringen lassen, wean man Hr. Eulers k oder K, = o setzte, und g als eine verneinte Grösse ansähe, weil offenbahr GH 55 Fig. tiefer als DE seyn muß, wenn blos vermöge der Schwere, Wasser bey GH ausfliessen soll.

Die Röhre könnte dem ohngeachtet auf unterschiedene Art gekrümmt seyn (541).

Man sieht auch leicht, daß sich Hr. Eulers Verfahren leicht auf eine unbestimmtere Gestalt der Röhre, da nicht alle Querschnitte Kreise wären, anwenden liesse, wenn nur statt z, welches den Durchmesser des Kreises bey ZY bedeutet, et-

was angegeben würde, das jeden Querschnitt der Röhre daselbst anzeigen könnte, wenn er auch kein Kreis wäre (wie in 558 u. f.).

742. H. E. hat also seine Methode gleich allgemeiner vorgetragen, als Joh. B. die seinige, ob sich gleich Joh B Methode eben so allgemein anwenden liesse. Aus der Zeitordnung übrigens nach der beyde Methoden bekannt worden sind, wird wohl muthmaßlich, daß Joh. B. Verfahren Hr. Eulern Anlaß gegeben hat, auf das seinige zu kommen, wie sich denn auch vor Bernoullis Hydraulik ein Schreiben von Hr. Eulern befindet, daraus sich zeigt, daß Hr E. diese Hydraulik vor ihrer Bekanntmachung gesehen hat. Selbst die centrische Linie ist von Bernoulli schon gebraucht worden.

743. Indessen könnte jemanden, bey dem Satze, auf welchem alle Rechnungen Hr E. beruhen (677) der Zweifel entstehen, wie man sagen kann: bey GH gebe es keinen Druck mehr. Das ist offenbar, daß das Wasser bey GH nicht rückwärts gegen DE zu gedruckt wird, wie das bey ZY (671; XVII.) weil das bey GH keines vor sich hat, das sich ihm widersetzte; der Druck aber bleibt doch, der von der Seite her, wo sich DE befindet, auf dieses Wasser wirkt (671; XIII.).

744. Dieser Druck nähmlich, wird so beschaffen seyn, daß vermöge seiner, das Wasser bey GH mit einer Geschwindigkeit ausfliesst, die der Höhe n (738) zugehört, so daß sich diese

Höhe

Höhe um du ändert, indem der Kolben um dr niedergeht.

745. Ihn, so wie ich bey meinem Vortrage von Bernoullis Theorie gethan habe, zu bestimmen, (etwa wie in 590 u andern Stellen ähnlichen Inhalts geschehen ist), müsste man die bewegenden Kräfte, die das Wasser in der Röhre haben muß, in den Stiefel gehörig übertragen, und alsdenn suchen, was dazu, und zu den bewegenden Kräften, die das Wasser im Stiefel haben muß, und zu Aenderung der Geschwindigkeit beym Uebergange aus dem Stiefel in die Röhre für eine Kraft auf der Oberfläche MN erfodert würde. Man wird aus (739) leicht schliessen, daß dieses zu Hr. Eulers Gleichung führen würde.

746. Dieses hier umständlicher zu zeigen, hiesse nichts weiter, als die Rechnungen, die ich vorhin bey der bernoullischen Theorie gemacht habe, hier größtentheils wiederhohlen; Und dazu habe ich keine Lust, weil ich Hr. Eulers Theorie vortragen, nicht sie aus der bernoullischen herleiten wollte. Wenn man übrigens sieht, wie dp zuerst in die Rechnung kömmt (671; XVIII.) da es einem Drucke nach yY zugehört, wenn man sich erinnnert, was p bedeutet (671; XII.) so sieht man leicht, daß in (677) $p = o$ setzen, soviel heisst, als annehmen: das Wasser bey GH, werde nicht rückwärts gedruckt, und wenn man gleich da, wo es ausfliesst, in die Seitenwand der Röhre, ein verticales Rohr setzte, so würde

das Wasser in diesem Rohre nicht aufwärts steigen, so wenig, als das Wasser eines Flusses in einem verticalen Rohre (92).

747. Hr Euler hat in eben dem Bande der Abhandlungen der k. Pr. Ak untersucht, wie die Kräfte, welche die Kolben in Bewegung setzen sollen, am vortheilhaftesten anzubringen sind, und dieses auf Menschen, Thiere, Wasser, Wind angewandt (*).

Allgemeiner Begriff von des Hr. v. Segner hydraulischer Maschine.

748. Ein senkrechter Cylinder, oben offen, unten mit einem Boden versehen, stehe so, daß er sich um seine Axe, die vertical ist, drehen kann. Unten gleich am Boden, habe er horizontale Röhren, die folgendergestalt beschaffen sind.

Der Kreis 56 Fig. stellt den Boden des Cylinders vor. Bey A, B, C, D, E, F, sind die Röhren eingesetzt, sie sind vorne bey a, b, c, d, e, f, verschlossen, haben aber unweit ihren Enden, bey α, β, γ, δ, ε, φ, Oeffnungen.

Wenn nun oben in den Cylinder Wasser gegossen wird, das durch die Röhren endlich zu den Oeffnungen ihrer Seiten herausläuft, so wird sich der Cylinder drehen, nach einer Richtung, die

(*) Discussion particuliere de diverses manieres d'elever de l'eau par le moyen des pompes; pag. 149. Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à elever de l'ea par le moyen des pompes. pag. 185.

die der, nach welcher das Wasser herausläuft, entgegengesetzt ist, nach der Ordnung der Buchstaben ABC. - in der Figur.

749. So etwas zeigen die sogenannten cartesianischen Teufel, wenn sie in die Höhe steigen; indem die Luft das Wasser, das in ihre Höhlung hineingedrungen war, wieder heraustreibt, drehen sie sich nach einer Richtung, die der entgegengesetzt ist, nach der das Wasser herausschiesst. Es ist möglich, daß diese Begebenheit einem so scharfsinnigen und nachdenkenden Naturforscher, wie der K. Pr Hr Geh R. von Segner, Anlaß zu der vorhin beschriebenen Maschine gegeben hat, ob es historisch richtig ist wie ich in einer Schrift des Hr Prof. Kies in Tübingen gelesen habe, weiß ich nicht zu sagen.

Man macht auch gewundene Röhren von Glas, ohngefähr in der Gestalt der archimedischen Wasserschraube. Eine solche Röhre erweitert sich oben in eine Art von Gefässe, unten zieht sie sich in eine enge Oeffnung zusammen. Man henkt sie oben, wo das Gefäß ist, auf die Spitze einer vertical stehenden Stange, über der sie sich drehen kann, und giesst das Wasser hinein. So dreht sie sich, indem das Wasser unten herausschiesst, um die Stange herum, nach einer Richtung, der entgegengesetzt, nach welcher das Wasser herausschiesst.

750. Der Hr. v. Segner hat diese Maschine angegeben, als er hier in Göttingen lehrte. Hr.

Euler hat ihre Theorie und Anwendung gezeigt (*) und in der (343) angeführten Schrift (**) werden

(*) Recherches sur l'effet de une machine hydraulique proposée par Mr. Segner Prof. à Gottingue. Mem. de l'Ac. de Pr. 1750. p. 311. Application de la machine hydraulique de Mr. Segner à toutes sortes d'ouvrages; & de ses avantages sur les autres machines dont on se sert ordinairement. Mem. 1751. p. 272. auf dem Titel dieses VII. Tome der Memoires steht irrig 1752.

Versuche mit einem Modelle einer solchen Maschine erzählt: Nic. Calkoen diss. Phil. inaug. sistens observat. quasd. hydraulicas Utrecht 1771, p. 23... Auch Eckhards Wasserrad das. P. 54.

Hier dreht Wasser durch Ausfluß aus der Röhre, sie um eine verticale Axe. Ein entgegengesetztes Verfahren erhebt Wasser. Eine schiefe Röhre, an beyden Enden offen, sey so an eine lothrechte Linie als eine Axe befestigt, daß die Linie durch die Mittelpuncte der Querschnitte der Röhre niederwärts mit der Axe convergirt. Der Röhre unters Ende, stehe unter Wasser. Wenn man sie nun um die Axe dreht, steigt das Wasser in ihr vermöge der Schwungkraft. De Mour hat diese Maschine vorgeschlagen. Sie findet sich in Recueil des Machines approuvées par l'Ac. R. des Sc. d. P. pour 1732. n. 363. Euler hat sie berechnet Mem. de l'Ac. de Prusse 1751. p. 305.

(**) Sectio III. de machinis hydraulicis a reactione aquae agitandis. Hieher gehört auch Hr. Eulers Abh. de motu & reactione aquae per tubos mobiles transfluentis Comm. nou. Petrop. T. VI. p. 312. Auch schon bey Joh. Bern. Hydraulik

den nebst einer allgemeinen Theorie, noch verbesserte Einrichtungen von ihr vorgeschlagen. Man begreift leicht, wie sich Bewegungen vermöge dieser Maschine fortführen lassen. Man darf nur ein Kammrad, dessen Mittelpunct in der Axe der

draulik ganz am Ende, findet sich ein Epimetrum, de vi, per quam vas retrourgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali, welches sich hier leicht beybringen liesse, da es auf den vorhin angeführten Gründen beruht, wenn ich nicht für besser hielte, den Leser auf Hr. Eulers allgemeinere und umständlichere Untersuchuugen zu verweisen.

In den Transactions of the American Philosophical Society at Philadelphia, Vol. II. Philadelphia 1786. befinden sich N. 38; Maritime Observations von **Benjam. Franklin.** Da erwähnt Fr. 308 S. eines sonderbaren Vorschlags Hr. **Bernoulli** ein Boot in Bewegung zu setzen: Im Boote sey eine Röhre in Gestalt eines L der lothrechte Theil davon oben trichterförmig, daß sich Wasser einfüllen läßt, dieses läuft durch den untern horizontalen Theil aus, in der Mitte des Hintertheils vom Schiffe, unter des Flusses Oberfläche, und treibt so das Boot vorwärts.

Deutlich beruht dieses auf dem, was Joh. **Bernoullis** Epimetrum enthält, ob gleich diese Anwendung zum Forttreiben eines Bootes da nicht steht.

Ob Hr. Fr. diesen Joh. B. meynt, und wo ein Bernoulli das angegeben hat, weiß ich jetzo nicht.

Hr. Fr. schlägt a. a. O. Verbesserungen dieses Verfahrens vor.

der Maschine ist, so anbringen, daß es sich zugleich mit der Maschine drehen muß, dieses kann in ein Getriebe greifen, und dadurch Bewegungen, wie man will, erregen. Die Theorie zeigt, daß sich die Kraft des Wassers bey dieser Maschine mit mehr Vortheil brauchen lasse, als bey den gewöhnlichen Wasserrädern. Sie ist indessen, soviel ich weiß, nirgends zu einem beträchtlichen Gebrauche angewandt worden, und dieses würde mich schon entschuldigen, daß ich hier von ihr nicht umständlich rede, wenn ich mich auch sonst in Betrachtung einzelner Maschinen weitläuftig einlassen könnte. Indessen war es nöthig, hier eine Maschine zu erwähnen, die in Absicht auf dee Art, wie das Wasser sie in Bewegung setzt, eine eigne Gattung ausmacht.

751. Allgemeine Formeln, die das enthalten, was das Gleichgewicht und die Bewegung der flüssigen Materien betrifft, hat Hr. Euler in unterschiedenen Aufsätzen gegeben (*). Der Raum

(*) Principes generaux de l'etât de l'equilibre des fluides Mem. de l'Ac. de Pr. 1755. p. 217. Pr. Gen. du mouvement des fluides daſ. p. 274. Continuation des recherches ſur la theorie du mouvement des fluides daſ. p. 316 bis 361. Principia motus fluidorum Pars I. Comm. Nou. Petrop. T. VI. p. 271. Sur le mouvement des Rivieres. Mem. de l'Ac. de Pr. 1760. p. 101. Sectio I. de ſtatu aequilibrii fluidorum Noui Commentarii Petrop. T. XIII. Sectio II. de principiis motus fluidor. T. XIV. P. I. Sectio III. de motu fluidorum lineari, potiſſimum

Raum und meine jetzigen Absichten, verstatten nur dieselben zu erwähnen. Diese Formeln zeigen Bewegung und Druck für jedes Theilchen, einer flüssigen, auch elastischen Materie, und jede darin wirkende Kräfte, ohngefähr in eben der Allgemeinheit, wie die Untersuchungen Hr. Eulers von festen Körpern die Höh. Mech. III. Abschnitt 216 u. f. sind angeführt worden. Bisher hat man nähmlich, wie im Vorhergehenden zu sehen ist, sich immer Wasserschichten vorgestellt, in deren jeder alle Wassertheilchen, nach parallelen Richtungen, und mit einerley Geschwindigkeit fortgingen, welche durch die Weite der Schicht bestimmt wird. Hr. Euler betrachtet nicht eine ganze Schicht auf einmahl, sondern ein einzelnes Wassertheilchen, und sucht, was für Kräfte in dasselbe wirken müssen, um daraus die Veränderungen seiner Bewegung herzuleiten.

752. Hr. E. gesteht selbst, die Analysis sey noch nicht so vollkommen, daß die Gleichungen könnten aufgelöset werden, auf die er alles, was zur Bewegung der flüssigen Materien gehört, gebracht hat (*). Wenn nun Hr. Euler in der Schrift, wo er dieses sagt, noch erinnert, die Wirkung einer flüssigen Materie auf einen festen Körper, bey dem sie vorbey fliesst, sey deßwegen nicht völlig bekannt, weil wir nicht eigentlich wissen,

aquae T. XV. Sectio IV. de motu aeris in tubis T. XVI.

(*) Dilucidationes de resistentia fluidorum §. 6. Comm. Nou. Petrop. T. VIII. p. 201.

wissen, wie die Wassertheilchen Richtungen und Geschwindigkeiten ändern, indem sie bey dem Körper vorbeygehn, wenn ich überlege, warum unsere Kenntniß von dem Stosse des Wassers noch unsicher ist (330; 336), was, die Theorie vom Ausflusse des Wassers vollkommen deutlich zu machen, noch nöthig wäre (173; 658;) so kömmt es mir immer vor, als fehlte es uns hier nicht zuerst an analytischen Kunstgriffen, sondern an physikalischen Kenntnissen, die bey den Rechnungen sicher zum Grunde könnten gelegt werden.

753. Wenn wir aus der Erfahrung die Gesetze wissen, nach denen Bewegungen geschehn, so können wir die Kräfte berechnen, von denen solche Bewegungen entstehn, und umgekehrt, wenn wir die Kräfte als bekannt annehmen, so können wir untersuchen, was aus ihnen für Bewegungen folgen, und alsdenn, wenn wir die Erfahrung zu rathe ziehn, uns versichern, ob wir die Kräfte richtig angenommen haben. So berechnete Newton, was für Kräfte nöthig sind, wenn die Planeten in den elliptischen Wegen um die Sonne gehen sollen, die Kepler ihnen vorgezeichnet hatte: und nun, da man weiß, wie die Weltkörper einander anziehn, berechnet man daraus rückwärts Folgen in ihren Bewegungen, die immer durch Beobachtungen bestätiget werden. Eben so nahm Hr. Daniel Bernoulli, als eine Erfahrung an, wie das Wasser seine Bewegung ändert, wenn es stösst, und fand daraus die Kraft (329; IV).

Wenn

Wenn man aber die Bewegung des Wassers in der grösten Allgemeinheit betrachten will, so scheinen vielmahl die wirklichen Bewegungen, und die Kräfte, zugleich unbekannt zu seyn, und ganz allgemeine Formeln nicht eher einigen Gebrauch zu haben, als bis man etwa durch Erfahrungen, Dinge bestimmt hat, die in den Formeln für gegeben angenommen werden, aber es bisher noch nicht sind.

754. Auserdem enthalten freylich solche allgemeine Formeln, auch diejenigen unter sich, die man bisher unter engern Einschränkungen gefunden, und mit Nutzen gebraucht hat. In einer (751) angezeigten Abhandlung Hr. E. von der Bewegung der Flüsse, wird aus Formeln, zu deren Integration in der grösten Allgemeinheit keine Hoffnung ist, endlich durch engere Bestimmungen hergeleitet, daß Wasser in einer Parabel sprützt, und daß es einen horizontalen Canal geben kann, in dem sich alle Wassertheilchen horizontal und gleichförmig bewegen. Dieses und noch viel mehr dazu, hatte Gulielmini schon längst gelehrt, den Hr. Euler gar nicht erwähnt, sondern seinen Aufsatz mit den Worten anfängt: "Bisher sey noch wenig über die Bewegung der Flüsse geschrieben, und alles, was man davon gesagt habe, beruhe nur auf willkührlichen, und oft ganz falschen Voraussetzungen. = = = den Herrn Bernoulli und d'Alembert sey man alles schuldig, was bisher von der Bewegung des Wassers entdeckt worden".

Ich will noch einige Schriftsteller nennen, von denen die Theorie überhaupt ist abgehandelt worden.

756 Hermann ward zu seiner Phoronomie (*) wie aus der Vorrede erhellt, besonders dadurch veranlasst, daß er die bis dahin bekannten Entdeckungen vom Gleichgewichte und der Bewegung flüssiger Materien sammlen wollte, und dabey die Nothwendigkeit einsahe, zuvor von festen Körpern zu handeln; Sein Werk enthält, was bis dahin von unterschiedenen Gelehrten entdeckt war, es ist aber in einem Vortrage verfasst, der die Sachen manchmahl schwerer macht, als nöthig ist. Es soll synthetisch nach Art der Alten verfasst seyn, und dabey die Analysis der Alten angebracht werden, die sich der Betrachtung der Figuren vornehmlich bedient. Hermann war aber in der neuen Analysis mehr geübt, wo man die Rech-

(*) Phoronomia; siue de viribus & motibus corporum solidorum & fluidorum libri II. auct. Iac. Hermanno Basil. antehac in ill. Patauino Lyceo nunc vero in regio Viadrino Math. P. O. & R. S. S. quae Berolini est sodali Amstelod. 1716- 4to. Ich erinnere mich hiebey, daß einmahl ein Doctor der Arzneykunst dieses Buch in einer Auction um einen Preiß erstand, für den er es nachgehends gern wieder verlassen hätte, als er sahe, daß es nicht insbesondere von den solidis u. fluidis handelt, die er allein kannte.

Rechnung gebraucht, daher urtheilt Wolf (*) mit Recht von ihm, er habe die Methode, in der er schreiben wollen, nicht völlig in seiner Gewalt gehabt, ein Urtheil, welches selbst vom Newton in den principiis gilt.

757. Daniel Bernoullis Hydrodynamik (**) ist das erste Buch, worinnen umständlich von der Bewegung flüssiger Materien ist gehandelt worden.

(*) Elem. Math. T. V. ed. 1741. de script. math. cap. 6. §. 17. und de studio mathem. recte instituend §. 101.

(**) Danielis Bernoulli Io. Fil. Med. Prof. Basil. Ac. Sc. Imper. Petrop. prius Math. sublim. Prof. ord. nunc membri & Prof. honor. Hydrodynamica siue de viribus & motibus fluidor. commentarii; opus academicum, ab Auctore dum Petropoli ageret congestum. Argentorati 1738: 4to. In dem Catalogo Bibliothecae Car. Frid. Trier Lipſ. 1795, p. 82, n. 1044. findet sich der Titel dieses Buchs mit dem Orte Petropoli 1738. Wahrscheinlich sind Exemplare nach S. Petersb. gesandt worden, wo sie diese Anzeige bekommen haben. Ich wies das Buch einmahl einem Helvetier, den ich in der Mathematik unterrichtete, über die Worte: ab Auctore ... sagte er: Mais que nous fait cela? Man begreift, daß er zum Literator keine Anlage hatte.

Dan. Bern. war zu Gröningen 9 Febr. 1700 gebohren, wo sein Vater damahls Professor war. Er erhielt zu Basel 2 Sept. 1721 die medicinische Doctorwürde, seine Inauguraldisp. de respiratione. Starb zu Basel als Prof. der Physik 1782, 17 Mart. Eloge de Mr. Bernoulli in Hist. de l'Ac. des Sc. 1782, p. 82.

den. Es gründet sich auf die Erhaltung der lebendigen Kräfte, und eben, weil diese Lehre wenigstens sonst nicht allen, als ein zulänglich sicherer Grund schien, hat Johann Bernoulli gesucht, seine Hydraulik aus Sätzen, über die alle einig sind, herzuleiten. Des Sohnes Arbeit ist wegen der mannichfaltigen Untersuchungen und Anwendungen lehrreich. Sie zeigt selbst in vielen Versuchen, davon ich einen Theil angeführt habe, des Verfassers Geschicklichkeit und Eifer, die Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen.

In einer Abhandlung von der Bewegung des Wassers durch Canäle in den Schriften der Kais petersburgischen Akademie (*), hatte Dan. Bernoulli schon den Nutzen des Satzes von Erhaltung der lebendigen Kräfte gewiesen, und Johann Bernoulli hat auch die allgemeine Formel für den Ausfluß aus einem Canale, aus diesem Satze hergeleitet (**).

758. Der K. Pr. Geh. Rath v. Segner, hat zu Göttingen angefangen, die Theorie der Hydraulik in einigen Einladungsschriften abzuhandeln. In sechs Aufsätzen, die er hierüber herauszugeben Gelegenheit gehabt, sind nur die Gründe der Untersuchung gelegt worden, und ein siebenter enthält eine kurze Anwendung davon auf Wasser, das durch eine sehr enge Röhre fliesst

(*) Theoria Nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium. Comm. Petrop. T. II. ad ann. 1727; pag. 111.

(**) Hydraul. P. II. art. 29.

fliesst (*). Der Hr. v. S. erinnert im Eingange, daß seine Absicht vornehmlich sey, einiges, was die beyden Bernoull in analytisch entdeckt, in einem kurzen synthetischen Vortrage zu lehren.

759. Hr d'Alembert hat bey der Bewegung flüssiger Materien (**), eben die Methode gebraucht, deren er sich in seiner Dynamik bedienet hat. Sie besteht darinnen: Bey einem Systeme von Körpern, die auf einander wirken, sieht er die Geschwindigkeit, mit welcher jeder Körper sich zu bewegen strebt, als aus zween Theilen zusammengesetzt an, deren einer aufgehoben wird, der andere der Bewegung der übrigen Körper auf keine Art nachtheilig ist.

Die respective Schwere eines Körpers auf einer schiefen Fläche, ist ein Beyspiel aus der Statik, woraus man diesen Satz leicht verstehn wird, nur daß hier nicht vom Gleichgewichte, sondern von Bewegung die Rede ist.

760. Eben so bey flüssigen Körpern zu verfahren, nimmt d' Al. noch das dazu an, daß es verstattet ist, die flüssige Materie durch parallele Ebe-

(*) Io. Andr. Segneri D. Med. Phil. Nat. & Math. P. P. O. e Socc. Regg. Londin. & Boruss. exercitationum hydraulicarum fasciculus Gotting. 1747. 4o.

(**) Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides pour servir de suite au traité de dynamique, par Mr. d'Alembert, de l'Ac. Roy. des Sc. Paris 1744. 4to.

Ebenen in Schichten einzutheilen, da alle Wassertheilchen, die sich in einer Schicht befinden, gleiche Geschwindigkeit, und parallele Richtungen haben. Diese Geschwindigkeit heisse v für eine unbestimmte Wasserschicht, und verwandle sich in v — dv, indem das Wasser dieser Schicht die Stelle der nächst darunter befindlichen einnimmt. Wenn man nun annimmt, eben diese Schicht, bekomme zu gleicher Zeit, die Geschwindigkeit + dv; die unendlich kleine Geschwindigkeit nähmlich, um welche sich die vorige änderte, aber nach entgegengesetzter Richtung, so wird die flüssige Materie im Gleichgewichte bleiben (*).

761. Hr. d'Al. Beweis hiervon, besteht in folgenden: Weil v = v — dv + dv, und man annimmt, die Geschwindigkeit jeder Schicht, ändere ihre Richtung nicht, so kann man jede Schicht, indem Augenblicke, da sich ihre Geschwindigkeit v in v—dv verwandelt ansehn, als würde sie zugleich mit der Geschwindigkeit v — dv, und der Geschwindigkeit + dv getrieben. Weil sie aber von diesen beyden Geschwindigkeiten nur die erste behält, so muß die zweyte, + dv so beschaffen seyn, daß sie nichts in der ersten ändert, und folglich vernichtet wird. Also würde die flüssige Materie in Ruhe bleiben, wenn jede Schicht nur die Geschwindigkeit + dv hätte.

Dieses angenommen, besteht die übrige ganze Theorie blos in Rechnungen, deren Folgen, mit den Sätzen der Bernoullie meistens einstimmig sind,

(*) art. 84.

sind nur in einigen wenigen Fällen bemerkt d'Alembert, daß Daniel Bernoulli die Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht vollkommen richtig angebracht habe.

762. Ich läugne nicht, daß sich d'Alemberts Grundsatz überzeugend erläutern und rechtfertigen lasse. Dieses aber würde niemand besser bewerkstelligen, als der Verfasser der Dynamik, der als einer der grössten Geometern, als ein scharfsinniger Philosoph, und als ein reizender Schriftsteller gleich berühmt ist. Wegen der beyden letzten Vorzüge, wäre er besonders im Stande gewesen, diesen seinen Grundsatz auch denen begreiflich zu machen, die ihm in den daraus hergeleiteten Rechnungen nicht folgen könnten oder wollten. Mac Laurin (*) entschuldigt seine Weitläuftigkeit beym Vortrage der Gründe der Fluxionenrechnung damit, daß man auf die umständliche Erläuterung einer Methode mit Recht viel Zeit und Mühe wende, wenn uns diese Methode, bey unsern fernern Untersuchungen viel Zeit und Mühe erspart. Eben das liesse sich wohl von einem Satze sagen, vermöge dessen man, was zur Bewegung flüssiger Materien gehört, aus einer einzigen analytischen Formel herleitet.

763. Hr d'Al. hat übrigens sein Augenmerk fast nur auf die Theorie gerichtet, meistens die Anwendung des Lesers eigner Bemühung überlassen. So ist der Gegenstand seiner vornehm-

sten

(*) Treatise on Fluxions, Introduction p. 05.

sten Aufgabe (*) ein Gefäß ohne Boden, wie der Canal der 50 Fig. Was man am ersten betrachten wird, wenn man auf das Brauchbare sieht, ein Gefäß mit einem Boden, der eine Oeffnung hat; wovon Joh. Bern. den Anfang macht, das muß aus d'Al. Theorie auf die (658) angezoigte Art hergeleitet werden. Man würde d'Al. Werke sehr ungerecht den Vorwurf machen, daß es nur unbrauchbare Spitzfindigkeiten enthielte. Aber, diesem Vorwurfe vorzubauen, den Nutzen seiner Lehren selbst zu zeigen, wozu er so vorzüglich geschickt ist, zu dieser Herablassung gegen die Laien, hätte ihm doch vielleicht selbst die Ehre der Wissenschaft Bewegungsgründe an die Hand geben können.

764. Newtons Cataracte, habe ich schon (308; IV.) erwähnt. In jeder horizontalen Schicht derselben, hat das Wasser eine gewisse Geschwindigkeit, die dem Falle durch eine gewisse Höhe gehört; So fällt das Wasser durch sie, daß die Schichten ununterbrochen nach einander folgen, aber keine wirkt in die andere, die untere ist der obern nicht hinderlich, und wird von der obern nicht beschleunigt, so entsteht auch von diesem Wasser, das durch die Cataracte fällt, kein Druck auswärts auf die Fläche NP 25 Fig. wie der, welcher in (611) gefunden ward, und von den Wirkungen der Wasserschichten in einander herrühre. Bestünde also diese Fläche NP aus einer festen Materie, oder wäre, wie Newton zur Erläutes-

(*) art. 105.

länterung seiner Gedanken sagt: das Wasser im Gefässe um die Cataracte herum gefroren, so möchte freylich wohl durch die Cataracte Wasser fallen können. Da aber in der That, das Wasser, das um die Cataracte herum stehen bleibt (wie das in DIK 46 Fig.) flüssig ist, so wird es nach der Hydrostatik auf die Fläche NO drucken, und weil diesem Drucke keiner von dem Wasser, das durch die Cataracte fliesst, entgegen gesetzt ist, so wird das stehende Wasser die Fläche NO durchbrechen, in die Cataracte hineindringen, und solche zerstören. Dieses wendet Joh. Bernoulli gegen die Cataracte ein (*).

765. Mac Laurin (**) sucht Newtons Lehren vom Ausflusse aus einem Gefässe zu erläutern. Er bemerkt, daß die Schwere, die in die ganze Masse Wasser im Gefässe wirkt, dreyerley verursachen muß. Sie beschleunigt, wenigstens eine zeitlang, das Wasser, das im Gefässe hinabsinkt, sie verursacht, daß das Wasser, welches zur Oeffnung herausgeht, mehr Bewegung hat, als es mit dem übrigen Wasser gemeinschaftlich haben würde, und sie wirkt auch auf den Boden des Gefässes.

(*) Hydraul. P. II. art. 60.

(**) A Treatise on Fluxions in Two Books, by Colin Mac Laurin A. M. Prof. of Mathematics in the university of Edinburgh and Fellow of the R. S. Edinb. 1742. 2 Bände 4° Book I. art. 537.

Man sieht leicht, wie sich dieses in den Ausdrückungen wird sagen lassen, deren ich mich vorhin bedient habe. Die beyden ersten von Mac Laurin angegebenen Folgen der Schwere sind (455; XVIII.) genannt worden.

Aber das beydes setzte ich dorten dem Gewichte des Wassers gleich, und Mac Laurin giebt nebst diesen beyden Folgen, noch den Druck auf den Boden an, die Wirkungen der Schwere völlig zu erzählen?

Wir widersprechen einander nicht, denn eben deßwegen leidet der Boden Druck, weil er den Wirkungen der Schwere hinderlich ist, und das Gewicht der Wassermasse im Gefässe nöthigt, dem ausfliessenden Wasser diejenige Bewegung zu geben, die von der vorhandenen Oeffnung verstattet wird, da es andere Bewegungen bekommen würde, wenn kein Boden, oder ein Boden mit einer andern Oeffnung da wäre, das ist, wenn der Boden das Gewicht des Wassers gar nicht, oder auf andere Art hinderte. Diese Erläuterung wird durch das bestätigt werden, was ich (§44) vom Drucke auf den Boden gewiesen habe. Nun sucht Mac Laurin die Verhältnisse dieser Wirkungen der Schwere, worinnen ich ihm hier nicht folgen kann. d' Alembert hat diese Theorie auch vorgetragen, und Erinnerungen dagegen gemacht *), sie führt übrigens zu eben den Formeln, zu welchen d' Alemberts Theorie führt.

766.

(*) Traité des fluides art. 176. 182.

766. In dieser zweyten Ausgabe, erwähne ich nun noch neuere Schriften, die Bewegung flüssiger Materien betreffen.

677. Lehrbegriff der gesammten Mathematik, von Wencesl. Joh. Gustav Karsten .... der Mathem. Prof. zu Bützow .... Der fünfte Theil. Die Hydraulik, Greifsw. 1770; 784 Octavs. VIII Kupfert. Hr. Karsten erwähnt in der Vorrede, daß er meine Arbeit zu sehen bekommen, als er mit der seinigen ganz fertig war. Er hat sich viel mit Anwendungen auf die Maschinenlehre beschäfftiget, und ist dadurch Praktikern sehr nützlich geworden.

Das hydrostatische bey mir 1 .. 79 § wird man in den vorigen Bänden seines Lehrbuchs suchen müssen. Ueber die Bewegung des Wassers, stellt er gleich zu Anfange allgemeine Betrachtungen an, erwähnt zwar nachdem Erfahrungen, wie die, von denen ich anfange, aber nur kurz, sucht bald auf Bernoullis und Eulers Formeln zu kommen, und aus denen Alles herzuleiten.

768. Für Anfänger schien mir das nicht so gut, als wenn ihnen zuerst Erfahrungen und daraus gezogne Schlüsse vorgetragen werden; Dergleichen Erinnerungen machte ich in Recensionen genannten Lehrbuchs. Karsten war natürlich hierinn nicht meiner Meynung, ohne daß dieses unsre Freundschaft störte. Der: Abhandlung über die vortheilhafteste Anordnung der Feuer-

sprüßen, welche den von der K. Dän. Soc. d. W. in Kopenhagen auf das Jahr 1779 ausgesetzt gewesenen ersten Preis erhalten hat, von W. J. G. K..... Greifsw. 1773. fügte er noch eine Abhandlung bey, über die allgemeine Theorie von der Bewegung des Wassers in Gefässen und Röhren. Er erinnert: Die beyden Bernoullie, Mac Laurin über Newton, d'Alembert, Euler, Schriftsteller vom ersten Range in der Mathematik, kommen mit ihren Schlußsätzen in der Hauptsache überein, nur bey Anwendung der allgemeinen Theorie auf einige, auch für die Ausübung merkwürdige Fälle, sind die Resultate ihrer Untersuchungen zuweilen verschieden. Dieß hat ihn bewogen, mit aller Sorgfalt eine Vergleichung und Prüfung anzustellen, welche er da mittheilt, und Erläuterungen über diese Theorien giebt, wobey er auch gegen Einiges meiner Darstellung von Joh. Bernoullis Theorie Erinnerungen macht.

769. Er fängt so an: Es ist ein System mehrerer unter einander verbundener körperlicher Massen gegeben, und in jede einzelne Masse wirkt eine gegebne Kraft, welche diese Masse nach einer gegebenen Richtung zu beschleunigen strebt. Wegen der gemeinschaftlichen Verbindung aller Massen unter einander, können wenigstens einige derselben, ihre Bewegungen nicht frey fortsetzen, ohne daß andre ihnen hinderlich fallen; Das System ist übrigens so beschaffen, daß aus der schon bekannten Bewegung einer der einzelnen Massen, die Bewegung der übrigen gefunden werden kann.

Man

Man sucht das Gesetz, nach welchem sich die Bewegung des ganzen Systems ändert, und den Druck, welchem das System während der Bewegung an jeder gegebenen Stelle ausgesetzt ist.

770. Lambert schreibt wegen dieser Theorie der Bewegung des Wassers folgendes, an Pr. Röhl in Greifswalde (Joh. Heinr. Lamberts gelehrter Briefwechsel herausgeg. von Joh. Bernoulli II. Band, Berlin 1782; 8. 404 S.)

"Ich erwarte, was Hr. H. Kästner, der ohne Zweifel die Karstensche Hydraulik, sowohl in den göttingischen Anzeigen, als in der allgem. deutschen Bibliothek etwas scharf beurtheilt hat, über diesen neuen Versuch zu sagen haben wird. Meiner Vorstellung nach, und diese habe ich Hr. Pr. Karsten selbst geschrieben, könnte sein Vortrag ungleich besser aus einander gesetzt seyn. Es liegen mehrere Sätze darinnen grösstentheils versteckt, und nicht mit ausdrücklichen Worten angegeben, die nothwendig als Grundsätze und Lemmata vorangehen müssen, wenn man genau seyn will, worauf sich der Vortrag gründet, und wie fern man Alles einräumen kann. Diese Sätze habe ich herausgezogen, und sie Hr. Pr. Karsten zugeschickt. Ich meldete ihm auch, daß in der That doch weiter nichts daraus folge, als was ohne Rücksicht auf die Bewegung jeder einzelner Wassertheilchen daraus folgen kann, und daß, wenn alles vollständig erwiesen werden solle, man nothwendig die Elasticität der Wassertheil-

chen voraussetzen müsse, thut man aber dieses, so kann alles viel kürzer gefasst werden".

So weit Lambert, der gewiß hie für mich nicht partheyisch war, und als Philosoph und Mathematiker abstract zu denken wusste. Was er bey mir scharf nennt, betraf gar nicht Deutlichkeit, Richtigkeit, Vollständigkeit in Karstens Schlüssen an sich, sondern nur: ob der Vortrag da denen faßlich seyn würde, denen ein Lehrbuch bestimmt ist.

771. Karsten fügte diese Theorie einer Abhandlung von Feuerspritzen bey: Auch Eulers allgemeine Theorie (668) zeigt Druckwerke als Gegenstand an. Wasser dringt zu einer engen Röhre mit einer Geschwindigkeit heraus, so vielmahl grösser, als des Kolbens Geschwindigkeit, so vielmahl der Querschnitt des Stiefels grösser ist, als der Röhre ihrer, das sieht man leicht, die Frage ist nur: was für Kraft erfodert wird, den Kolben fortzutreiben. Also ist Theorie der Sprützen ziemlich gleichgültig mit Theorie des Ausflusses des Wassers aus Gefässen. Das wird mich entschuldigen, wenn ich bey dieser Veranlassung noch einige Schriften von Sprützen erwähne.

772. "Herrn Georg Simon Klügels, öffentl. Lehrers der Math. zu Helmstädt (damahls) Abhandlung von der besten Einrichtung der Feuersprützen zum Gebrauche des platten Landes, welche die eine Hälfte des vom K. Pr. General-

Ober-

Ober-Finanz-Kreis- und Domainen-Directorio auf das Jahr 1772 ausgesezten Preises gewonnen hat, nebst den, die andre Hälfte des Preises, und die nach vorläufig angestellten Versuchen wirklich geschehene Verfertigung einer der Preisfrage gemässen Feuersprütze betreffenden Anzeigen. Berlin 1774. Quart.

II. Abhandlung von Verbesserung der Feuersprützen, welche bey der Churmainz. A. d. W. zu Erfurt im Jahre 1777 den Preis erhalten hat, von J. Evangelisten Helfenzrieder d. Gottesgel. Doctor, S. Ch. D. in Baiern wirkl. Rath, und öffentl. Lehrer der Math zu Ingolstadt. München 1778. Oct.

III. Dr. Wilh. Gottlieb Hesse, Churf. Mainz. Raths . . . d. Math. ord. öffentl. Lehrers zu Erfurt, praktische Abhandlung zu Verbesserung der Feuersprützen, welche auf die aufgestellte Preisfrage von Ch. M. Ak. nützl. Wiss. zu Erfurt den Beyfall erhalten hat. Gotha 1778. Oct.

Die Absicht dieser Schriften erfoderte mehr den Bau der Maschinen umständlich darzustellen, als weitläuftige theoretische Rechnungen mitzutheilen.

773. I. Abhandlung vom Wasserbau an Strömen, Preisschrift, welche die in den ökonomischen Nachrichten darauf gesetzte Prämie erhalten. Leipz. 1756. Oct.

Der Freyh Pet. v. Hohenthal, nachdem Graf, Herausgeber der ökon. Nachrichten hatte den Preis aufgesetzt. Ihn erhielt J. E. Sil-

Silberschlag damahls Prediger zu Wollmersleben im Herz. Magdeb.

Eine Ausg. 1766. Abh. v. Wasserbau an Strömen, v. Joh. Esaias Silberschlag, Pastor an der H. Geistkirche zu Magdeb. stimmt völlig damit überein.

II. Ausführlichere Abhandlung der Hydrotechnik oder des Wasserbaus, von Joh. Esaias Silberschlag K. Pr. Oberconsistorialr. und Oberbaurath ... Zweene Theile; Zweyte mit Anmerkungen vermehrte Auflage. Oct. Wien beym Edlen v. Trattner 1786.

Dabey als Anhang: Anweisung, wie man in reissenden und tiefen Strömen haltbare Buhnen bauen soll, von Fidelis Poglayn vorm. Navigations-Ingenieur im Inn. Oesterreich, und nunm. Kreis-Ingen. in Gallizien. Beträgt 1 Bogen 7 Blätter, und ist wahrscheinlich dem Wiener Drucke eigen.

Daß übrigens dieser Druck nach einem andern gemacht ist, stellt man sich leicht vor. Von dem andern, kann ich wenigstens das Jahr angeben.

III. Aufgaben, grösstentheils aus der angewandten Mathematik, zur Uebung der Analysis, für angehende Feldmesser, Ingenieurs uud Baumeister. Entworfen von J. A. Eytelwein, K. Pr. Deichinspector des Ober-Oderbruchs... Berl. 1793. 8°. Da ist 27 §. eine Aufgabe aufgelöst, und wird 28 §. 40 S. erinnert, Brahm Deich-

und

und Wasserbauk. habe sie aufgelöst, und Hr. O. C. R. Silberschlag mit ihren Fehlern in den zweyten Theil seiner Hydrotechnik (1773) §. 489 aufgenommen.

Diese Stelle findet sich nun im Wiener Drucke. E. meldet, es finden sich in S. Werke mehr Fehler; bey dem Gebrauche desselben, sagt er, ist die grösste Behutsamkeit zu empfehlen, weil die theoretischen Sätze darin meist schwankend und fehlerhaft sind. Die praktischen Lehren bleiben freylich immer noch so etwas, das demjenigen gefallen muß, welcher noch keine Erfahrungen angestellt hat, allein wer Gelegenheit findet, selbst Beobachtungen anzustellen, dem wird es nicht fehlen, ein gleiches Urtheil darüber richtig zu finden.

Silberschlag, geb. zu Aschersleben 16. Nov. 1725, starb zu Berlin 22. Nov. 1791.

774. Blos praktisch beschreiben:

Vorrichtungen beym Wasserbaue:

Jobst Bösens, hochadel. Hardenberg. Verwalters zu Geismar ohnweit Göttingen, Anleitung zum Wasserbau, oder kurzer Unterricht für Landleute so an Wasserflüssen wohnen, und keine Anweisung von Wasserbauverständigen haben, wie sie ihre vom Wasser eingerissne Ufer selbst mit geringen Kosten, auch mehrentheils selbst habenden Materialien ausbessern, und vor fernern Ab-

bruch

bruch bewahren können. Zweyte vermehrte und verb. Aufl. Göttingen 1769. 8°.

Jobst Bösens .. fernere Anleitung zum Wasserbau, für die an Wasserflüssen wohnende Schlachtmeister, wie haltbare Packwerke anzulegen und zu verfertigen sind, Gött. 1775. 8°.

Praktisches Handbuch für Hydrotechniker von C. W Fuchs Churf. Mainz. Artillerie-Obristlieut. Leipz. 1791. 8°.

775. I. Reisen in die Marschländer an der Nordsee, zur Beobachtung des Deichbaues von Joh. Nic. Tetens Pr. d. Phil. und Math. auf der Un zu Kiel, Mitglied der k. Dän. Ges. d. W. zu Koppenhagen. Erster Band Leipz. 1788. 8°. Meines Wissens ist nichts weiter erschienen. Hr. Tetens, jetzo K. D Etatsrath, giebt bey andern unterhaltenden Nachrichten, von Beschaffenheit nnd Bewohnern dieser Länder auch viele Belehrungen vom Wasserbau, die mit Kupfern erläutert werden.

II. "Beyträge zur hydraulischen Architektur, von Reinhard Woltmann, Director der Ufer- und Wasserbauwerke im Hamburgischen Amte Ritzebüttel. ... Göttingen 8°. I. B. 1791. Seedeichswirthschaft, Uferbefestigung, literarische Beyträge. II. B. 1792; Theorie des Deichbaues, der Uferbefestigung, und des Stakbaues I. B. III. B. 1794. Hydraulisch-architektonische Reisebemerkungen. Druck der Erde gegen Futtermauern. I. B. An tiefen theoretischen Untersuchungen, und brauchbaren praktischen Nachrichten

richten sehr reich. Die literarischen Beyträge erzählen umständlich, und mit Beurtheilung und Zusätzen, den Innhalt von vielen zum Theil seltnen und kostbaren Schriften, die Wasserbau, und überhaupt Hydrodynamik betreffen.

776. I. Beyträge zum praktischen Wasserbau und zur Maschinenlehre von C. F. Wiebeking, Churpfälz. Wasserbaumeister. Düsseldorf 1792. 4°. Nebst 5 Kupfertafeln mit Stromcharten vom Rhein und Siegfluß. Hr. W. hat sich auserdem, durch viel vortreffliche Charten um Geographie und Hydrographie verdient gemacht.

II. Eine seiner neusten Arbeiten dieser Art ist: Hydrographisch-militairische Charte vom Niederrhein, von Linz bis unterhalb Arnheim. Sie besteht aus zehn Blättern, jedes 2 rheinl. Fuß lang, und fast 1 F. hoch. Auserdem was man auf einer Charte erwartet, zeigt sie Tiefen des Flusses, Gefälle, Geschwindigkeit in der Oberfläche, nach Messungen, die Hr. W. auf eigne Kosten angestellt, auch aus Hr. Brünings General-Inspectors der Wasserbauwerke in Holland seinen.

III. Hr. Wiebeking ist 1796. Hessendarmstädtischer Steuerrath und Ober-Rheinbauinspector. Mit erwähnter Charte erschienen von ihm Vorschläge zur Verbesserung des Wasserbaues 32 Octavs. er zeigt darinn, wieviel zu einem Wasserbaumeister erfodert wird, und wie nöthig dabey öffentliche Unterstützung ist. Eine allgemeine auf Geschichte und Erfahrung gegründete theoretisch-praktische Wasserbaukunst, wird zugleich

von ihm auf Pränumeration angekündigt, im November 1796.

Noch Lehrbücher von der Hydraulik.

777. Hrn. Bernhards, Condirectors der Kön. Sternwarte beym Seewesen zu Marseille... Neue Grundlehren der Hydraulik, mit ihrer Anwendung auf die wichtigsten Theile der Hydrotechnik, aus dem Franz. übersetzt, und mit Anmerk. herausgeg. von K. Chr. Langsdorf, Brandenb. Rath und Salineninspector zu Geraabronn. ... 1790 8°. Hr. L. hat sehr viel Veranlassung seinen Schriftsteller zu berichtigen.

778. Herrn Abt Bossuts... Examinator der Zöglinge des Kön. Ingenieurcorps und Generalinspector über die Maschinen und Werke der Kön. Gebäude Lehrbegriff der Hydrodynamik nach Theorie und Erfahrung, vorzüglich für solche, welche zur Ausübung dieser Wissenschaft bestimmt sind, aus dem Fr. üb. mit Anm. und Zus. von Karl Christian Langsdorf... 1792. 8°. 2 Bände. Hie hat Hr. L. nicht soviel Berichtigungen nöthig gehabt, giebt aber eine Menge Erläuterungen, Zusätze und Anwendungen.

779. Neue Architectura Hydraulica, von Herrn Prony, Ingenieur beym Brücken- und Strassenbau. Erster Theil, erster Band, welcher Statik, Dynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik enthält, aus dem Fr. von Karl Christian Langsdorf, K. Pr. Rath. Frf. am Mayn 1794. 4°. Zweyter Band, welcher die allgemeinen Lehren

ren von den Maschinen, und den dabey anwendbaren Kräften in Bezug auf die physischen Nebenumstände betrachtet, welche auf das Gleichgewicht und die Bewegung Einfluß haben. 1795.

Soviel ich weiß, ist von der Grundschrift noch nicht mehr heraus gekommen. Hr Langsdorf hat nur wenig Anmerkungen beygefügt.

778. Auser diesen Uebersetzungen, bey denen die Originale immer gewonnen haben, hat Hr Langsdorf sich durch viel eigne Schriften um die Hydraulik verdient gemacht.

Einige wenden die Lehren besonders auf die Salzwerke an.

Beytrag zur Aufnahme der Salzwerkskunde, 2 Proben. Frankfurt, Giessen 1778. 1779. 8°.

Untersuchung der Bewegungskräfte auf Salzwerken. Manheim 1781. 8°.

Anleitung zur Salzwerkskunde Altenb. 1784. 4.

Weitere Ausführung der Salzwerkskunde, oder derselben vierter Theil. Alt. 1792.

Ein Bruder des Hrn. Rath Langsdorf, hat herausgegeben

Kurze und gründliche Einleitung zur Kenntniß in Salzwerkssachen von Joh. Wilh. Langsdorf, hochf. Hessenhomb. Stadtconsulenten Frankf. 1771. 8°.

Joh. Wilh. Langsdorf, Ihro Hochf. Durch. zu Hessen-Darmstadt, wirkl. Kammerrath und Salinen-Director, ausführlichere Abhandl von Anlegung, Verbesserung und zweckmässiger Verwaltung der Salzwerke, nebst einem Anhang

von den Rechten und Befugnissen eines Landesherrn auf Salzquellen, und auf den Alleinhandel des Salzes II. Theile 4°. Giessen 1781.

779. Allgemeiner gehören zur Hydraulik: Mechanische und hydrodynamische Untersuchungen, nebst vollständiger Anwendung auf das Maschinenwesen bey Salzwerken, von Karl Christian Langsdorf, hochf. Hess. Landrichter zu Mühlheim an der Ruhr... Altenb. 1782. 4°.

Lehrbuch der Hydraulik mit beständiger Rücksicht auch die Erfharung, von K. Chr. Langsdorf, K. Preuss Rath. Altenburg 1794. Quart, Anzeige des Innhalts u. d. g. CX S. Text 656 S. 51 Kupfert.

Fortsetzung des Lehrb. der Hydraul. welche eine Theorie der Schwungräder und ihre Anwendung bey Maschinen enthält, von K. Chr. L. Alt. 1796. Innh. XX S. des Werkes Seiten fortgezählt 657... 816. auch die Kupferplatten, 52. 53; Noch des Verfassers Bild.

Hr. L. hat sich mit diesen Gegenständen so lange und so mannichfaltig beschäfftigt, gelesen, was darüber geschrieben ist, viel neue Werke davon selbst den Deutschen bekannt gemacht, Veranlassung gehabt, die Theorie bey seinen häufigen praktischen Verrichtungen anzuwenden, zu prüfen, zu berichtigen und zu ergänzen. Es ist leicht zu erachten, was nach solchen Vorbereitungen sein Lehrbuch werden musste.

780. Joh. Ge. Büsch, Prof. in Hamburg, Versuch einer Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, dritten Theils zwey-

zweyter Band, der Ueberſicht des geſammten Waſſerbaues erſter Band, (dieſen Titel hat das Buch auch beſonders) III. Thl. III. B. d. U. d. g. Wb. zweyter Band. Hamb. 1796. Enthält Theorie, mit ſehr viel Erfahrung erläutert, unterſtützt und angewandt. Eigentlich das Philoſophiſche der Waſſerbaukunſt, welches vor dem Rechnen muß überdacht werden... Freylich hat man beſonders über die Bewegung des Waſſers und was dahin gehört, Manches gerechnet, ehe man es gehörig überdacht hatte. Hr. Pr. Büſch giebt auch ſehr ausführliche Literatur, verweiſt dabey oft auf Hrn. Woltmann (775).

781. Des Herrn von Buat Grundlehren der Hydraulik, aus dem fr. überſetzt, mit Anm. und Zuſätzen, von Joh. Friedr. Lempe Pr. d. Math. und Phyſ. bey der Churf. Bergakad. Erſter Theil. Leipz. 1796. Woltmann und Langsdorf haben dieſen Schriftſteller empfohlen. Hr. Lempe hat brauchbare Zuſätze beygebracht, nur wenige, das Buch nicht zu vertheuern.

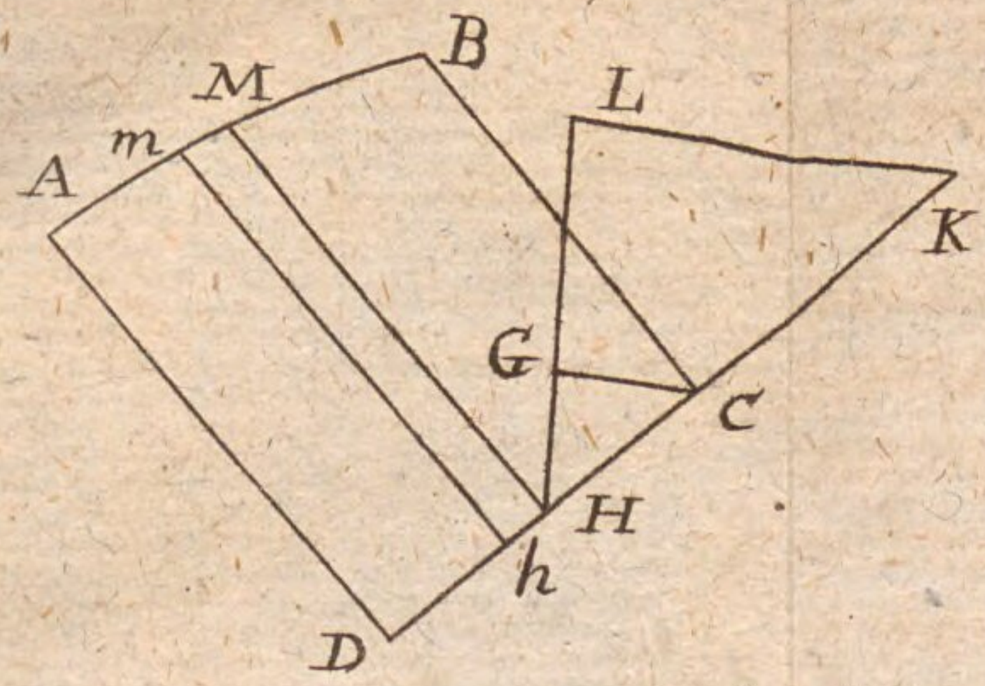
782. Ein Paar Abhandlungen über Waſſerräder, ſind mir erſt bekannt worden, als die Abſätze, wohin ſie eigentlich gehörten, nicht mehr in meinen Händen waren. Sie ſtehn in einer Sammlung, wo man ſie nicht vermuthen würde, und verdienen deßwegen hie erwähnt zu werden. Sammlung naturhiſtoriſcher und phyſikaliſcher Aufſätze, herausgeg. von Franz v. Paula Schrank, der Theol. und Phil. Dr. kurpfalzbair. wirkl. geiſtl. Rathe. Nürnb. 1796. enthält 415 S.

Herr Franz Zallinger, Prof. d. Math. zu Insbruck: Von der Anzahl der Schaufeln bey unterschlächtigen Wasserrädern. Theoretiker geben die Vorschrift: In dem Augenblicke, da eine Schaufel vertical steht, soll die, welche ihr zunächst ins Wasser kommen wird, die Oberfläche des Wassers nur berühren, damit sie kein Wasser auffängt, das auf die verticale stossen will. In der Ausübung werden gewöhnlich mehr Schaufeln gemacht. Dafür meynt Hr. Z. liesse sich auch etwas sagen. Es könnten aber auch Umstände vorkommen, die sich auf keine Theorie oder Berechnung bringen lassen, z E. daß mehr Schaufeln, Kosten und Gewicht des Rades vermehren, also auch Reiben. Es liessen sich wohl bey einem und demselben Rade, weniger oder mehr Schaufeln anbringen, und die Folgen vergleichen. So überlässt Hr. Z. bey dieser Frage noch Manches der Erfahrung.

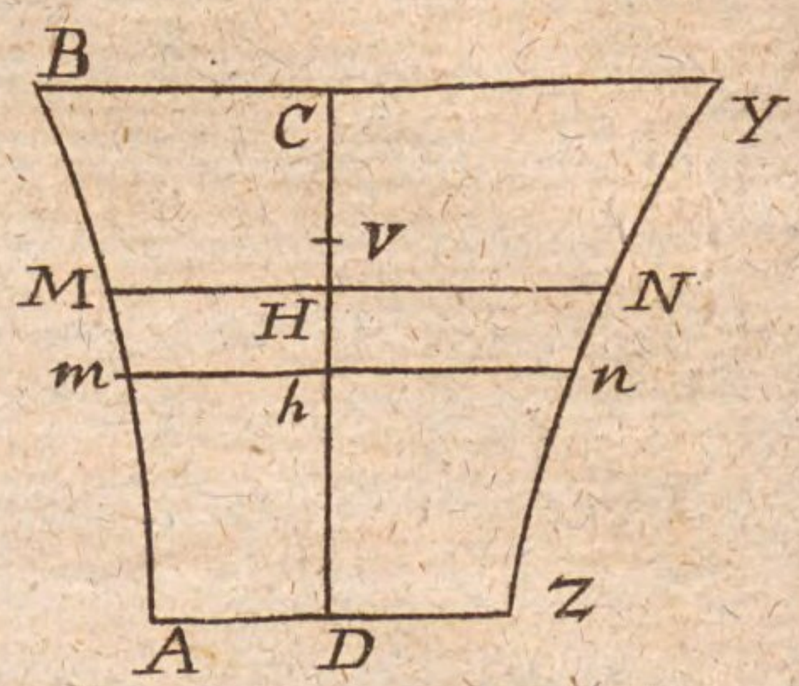
Ein andrer Aufsatz von ihm 431. S. prüft ein angegebenes Schöpfrad. Um des Rades horizontaler Welle, sind in der Fläche senkrecht auf sie, hohle Fächer, wie durch Halbmesser begränzt; Jedes hat am Rande eine Schaufel, die schöpft Wasser, und beym Umgehen des Rades, kömmt jedes Fach über die Horizontallinie, und giesst sein Wasser in eine Rinne aus. Hr Z. berechnet, die Maschine erfodere grössere Geschwindigkeit des Wassers, als Flüsse gewöhnlich haben, und schlägt Verbesserung vor.

Tab. I.

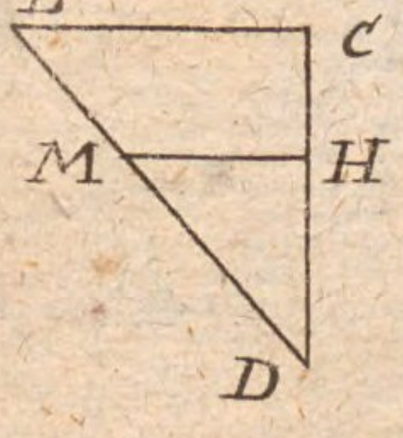
f. 1



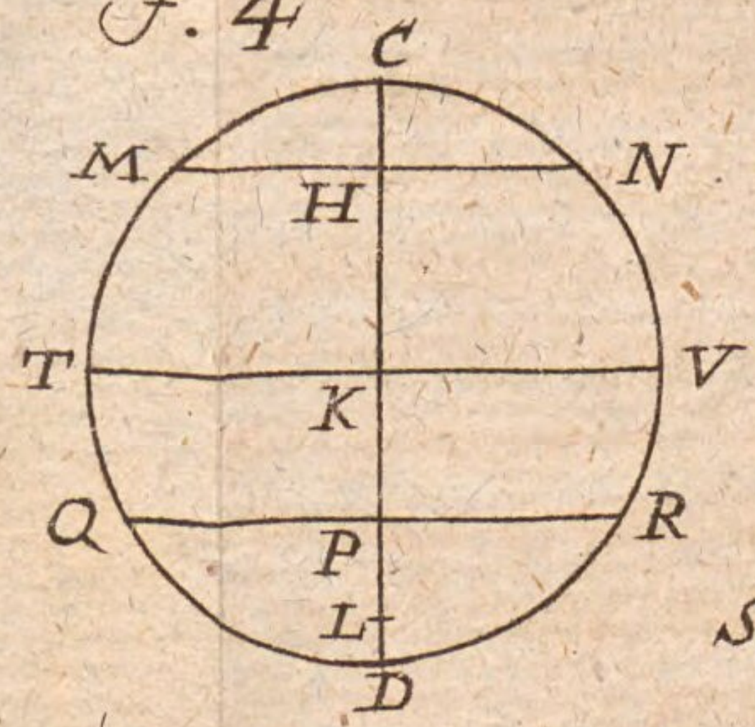
f. 2



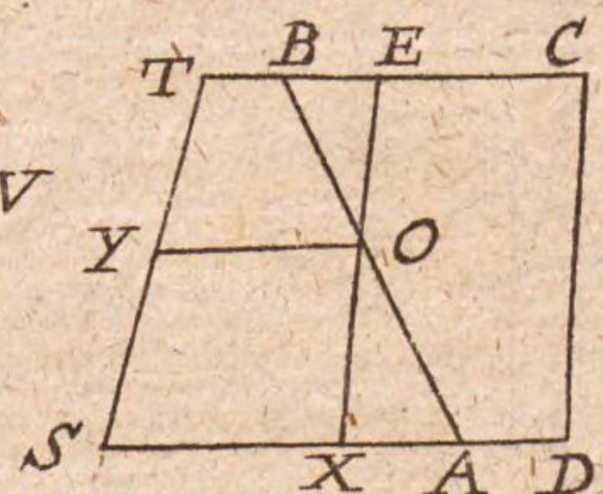
f. 3

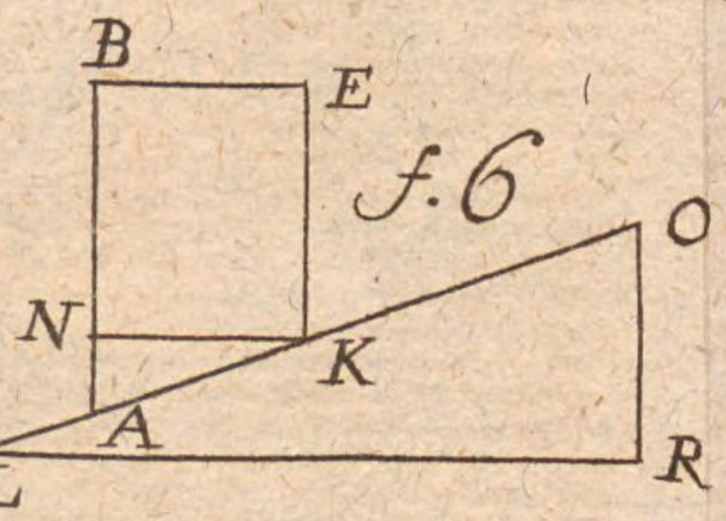


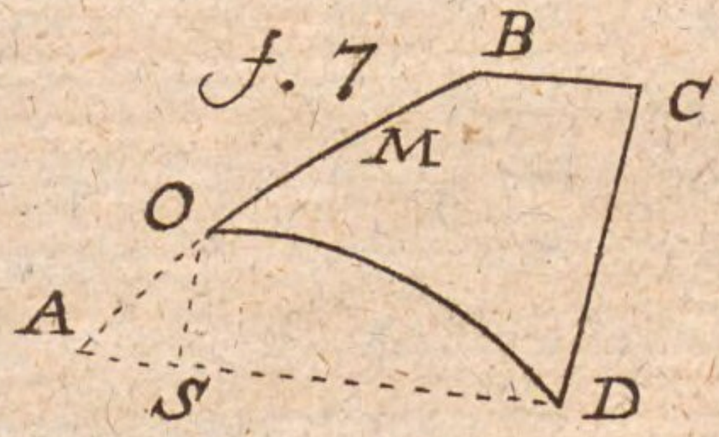
f. 4

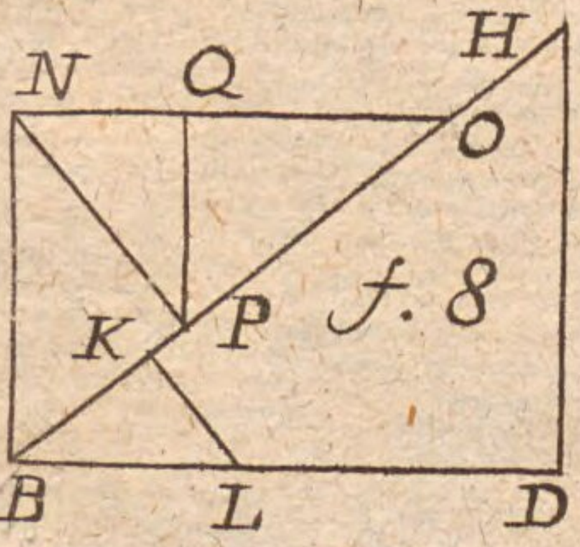


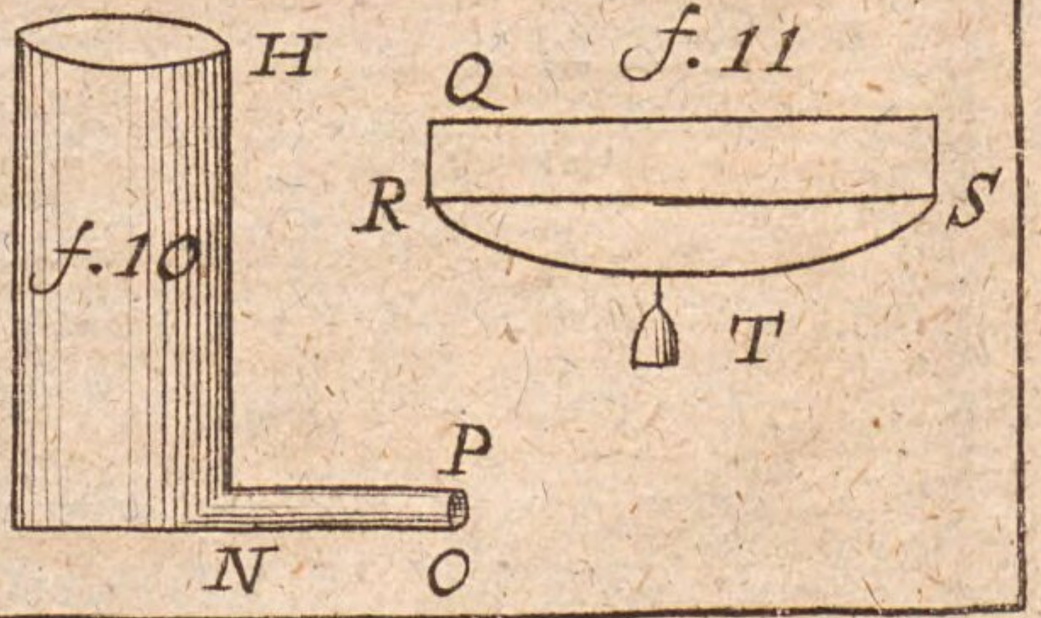
f. 5



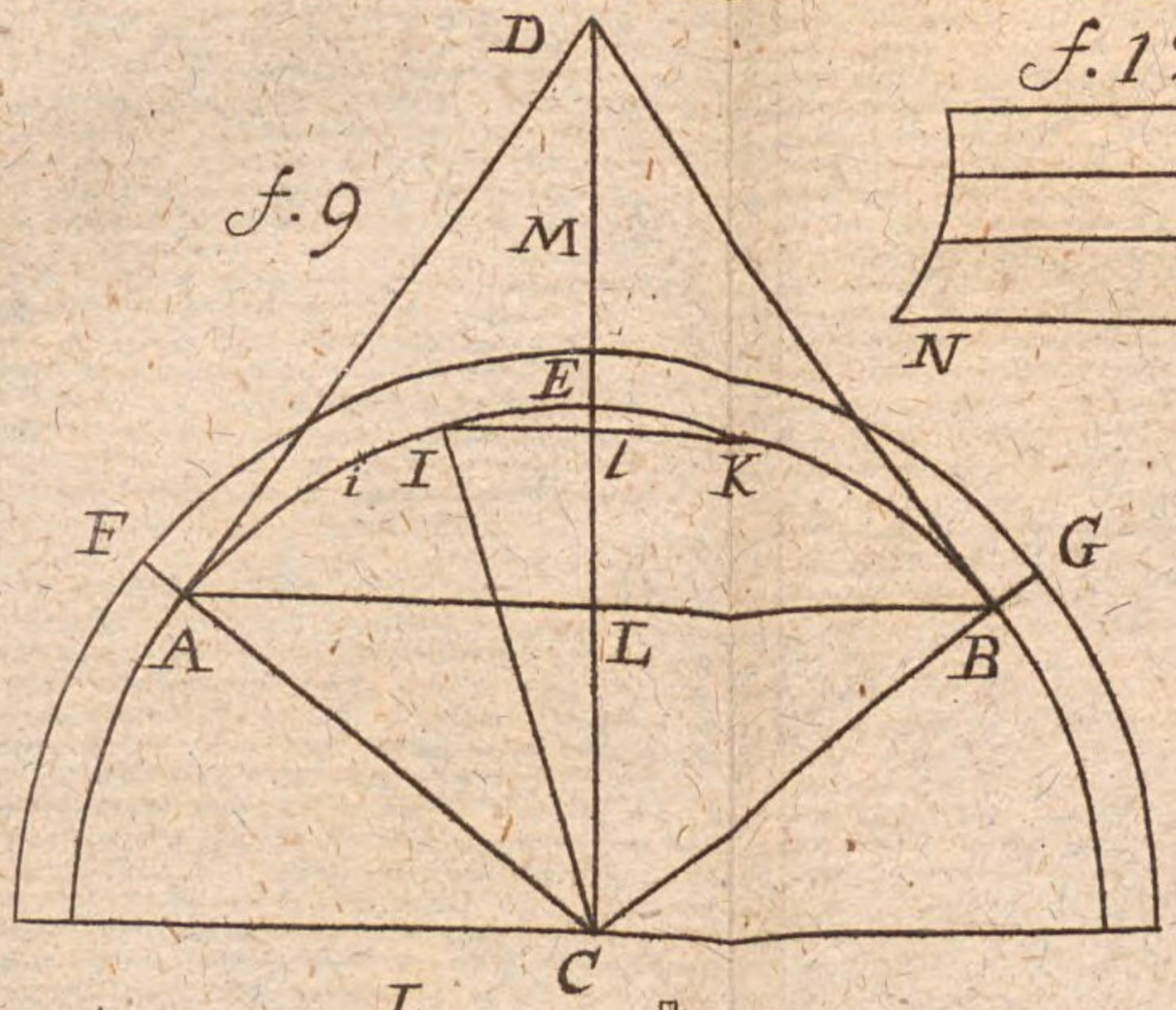




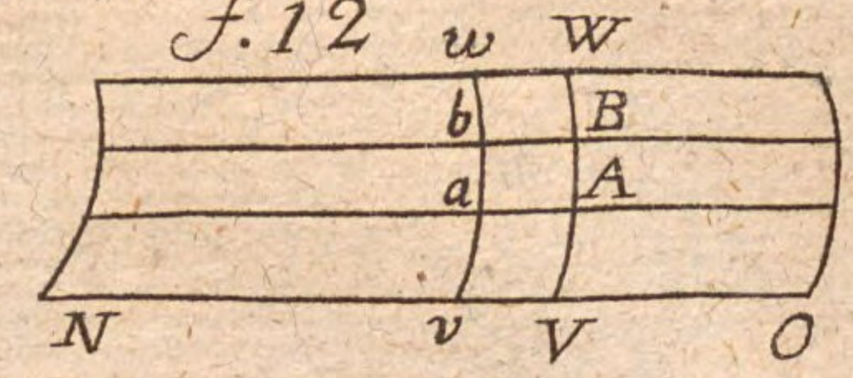




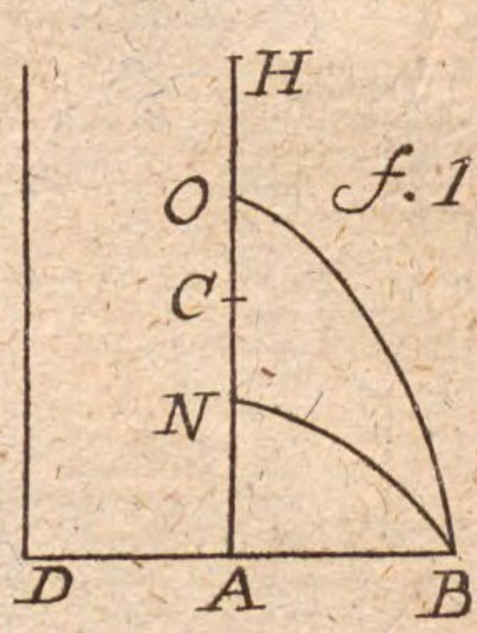
f. 9



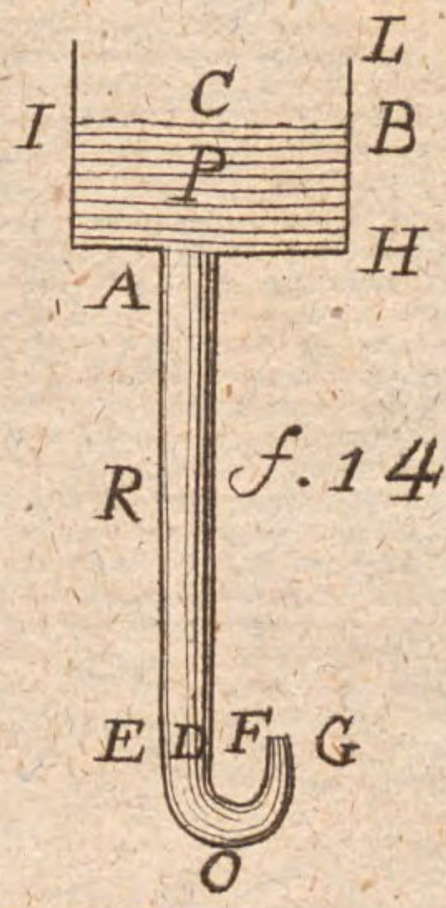
f. 12



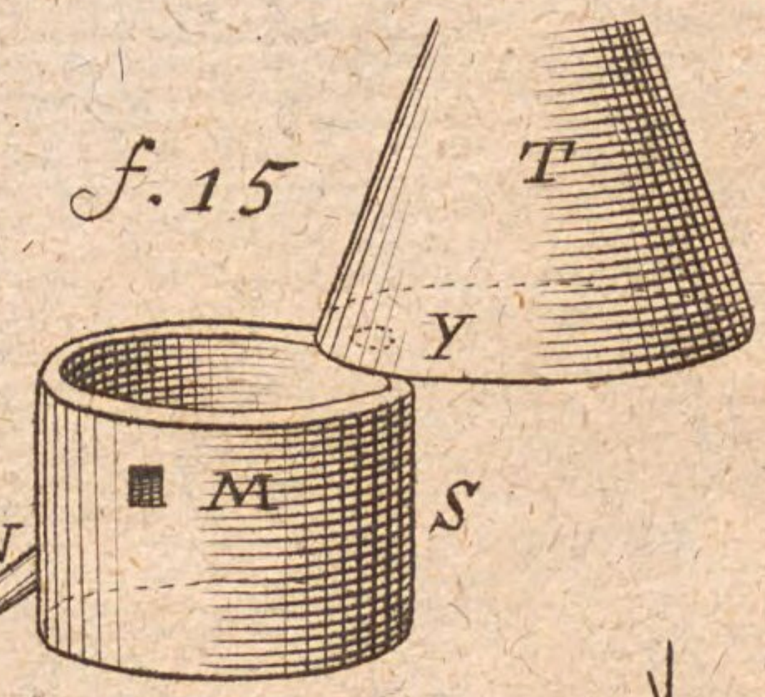
f. 13



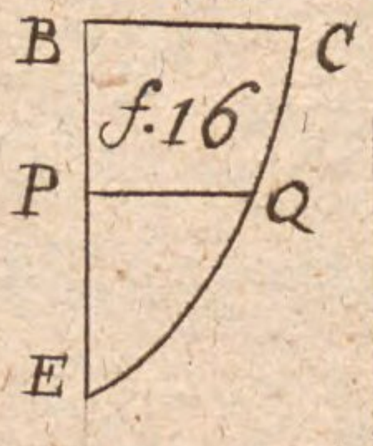
f. 14



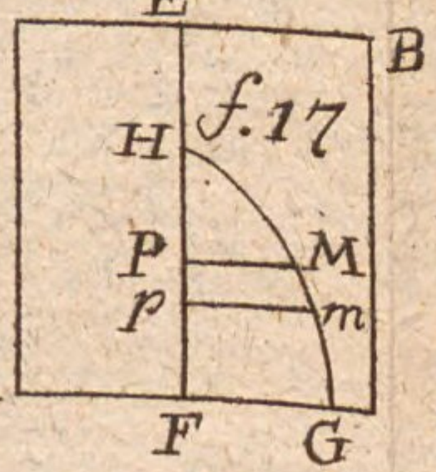
f. 15



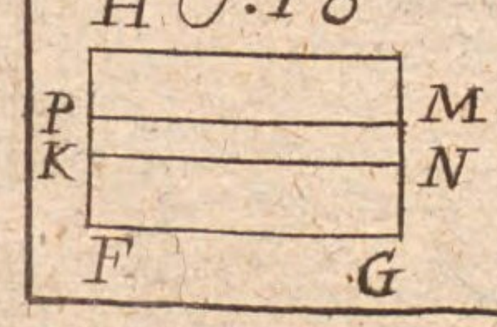
f. 16



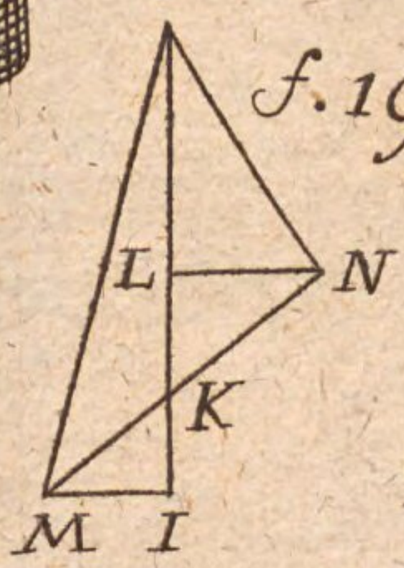
f. 17



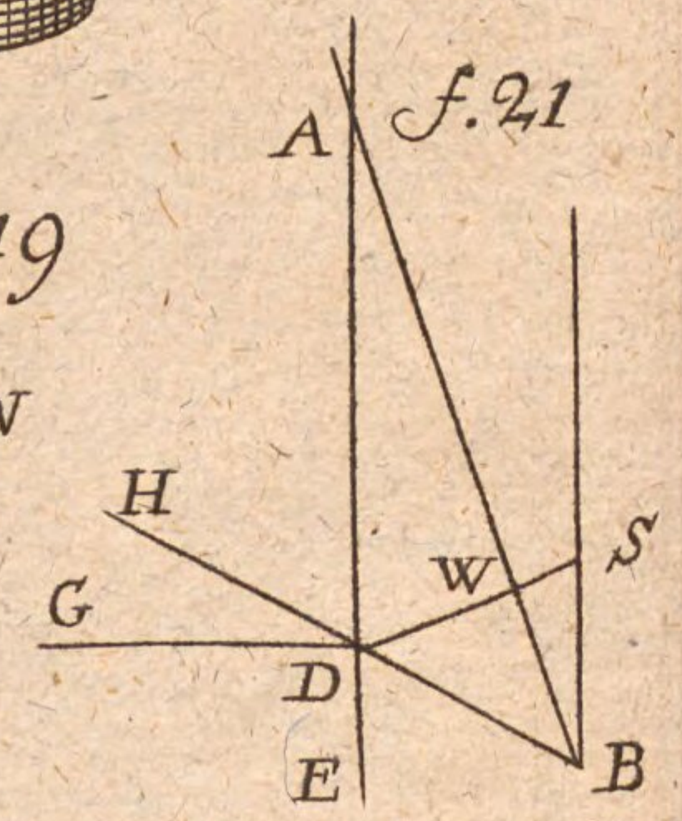
f. 18



f. 19



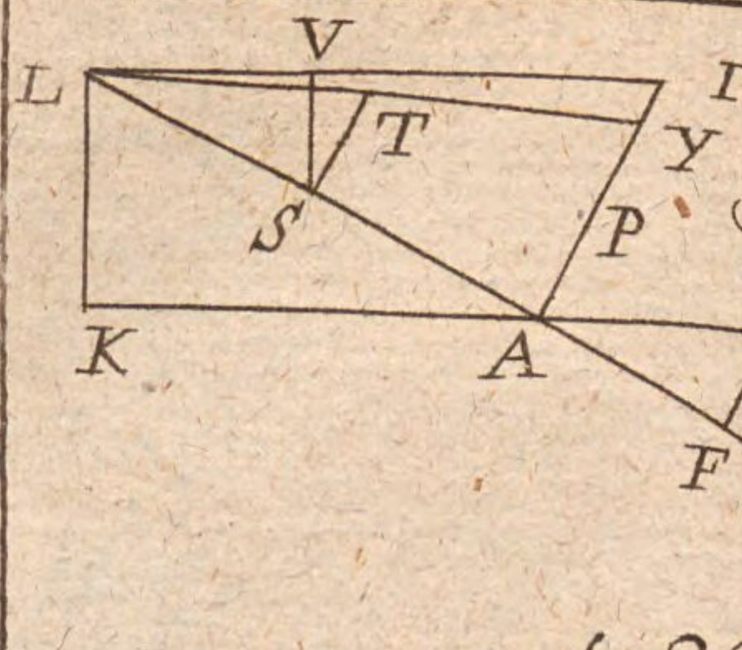
f. 21



4 Th. 2 Abth.

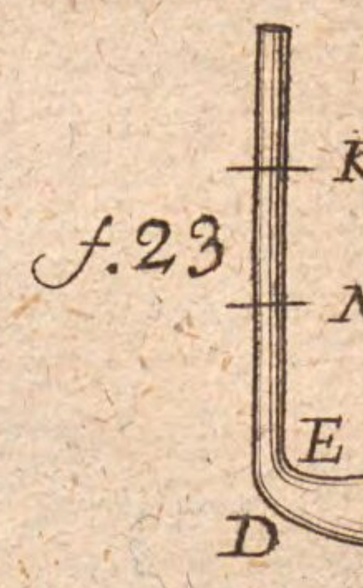
Tab. III.

f. 20

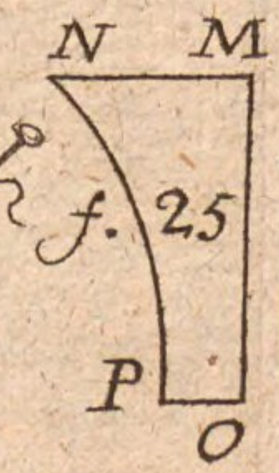


f. 22

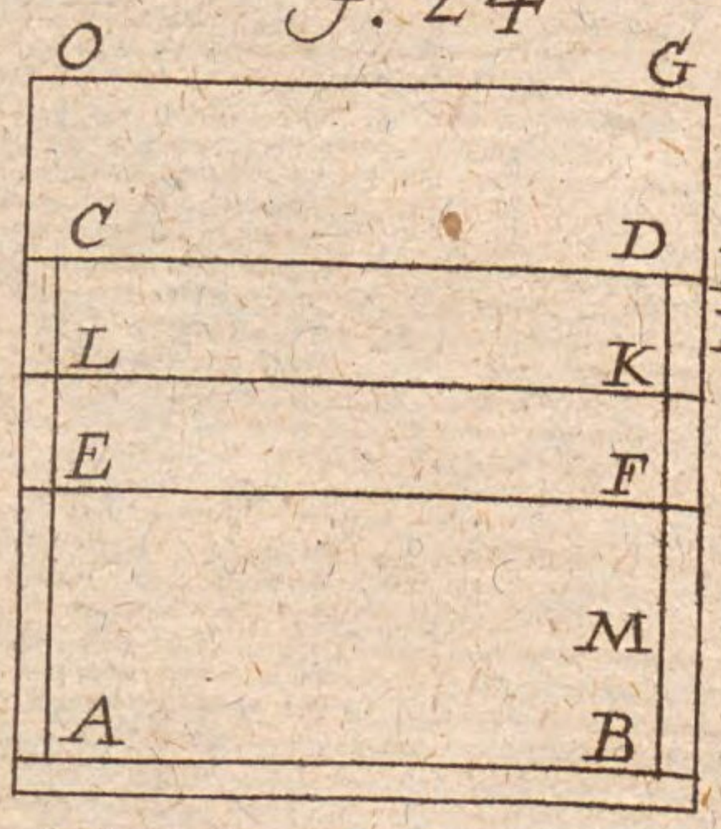
f. 23



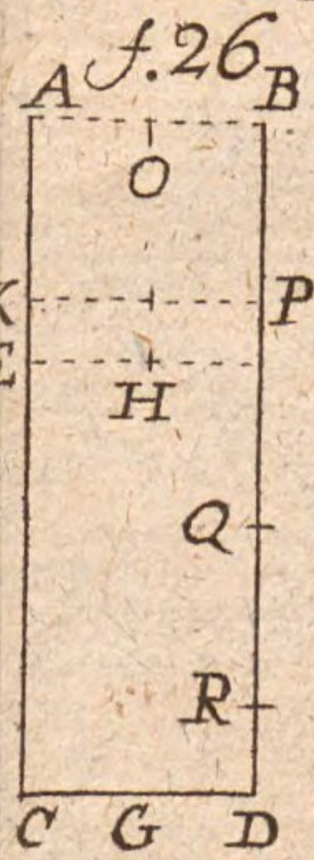
f. 25



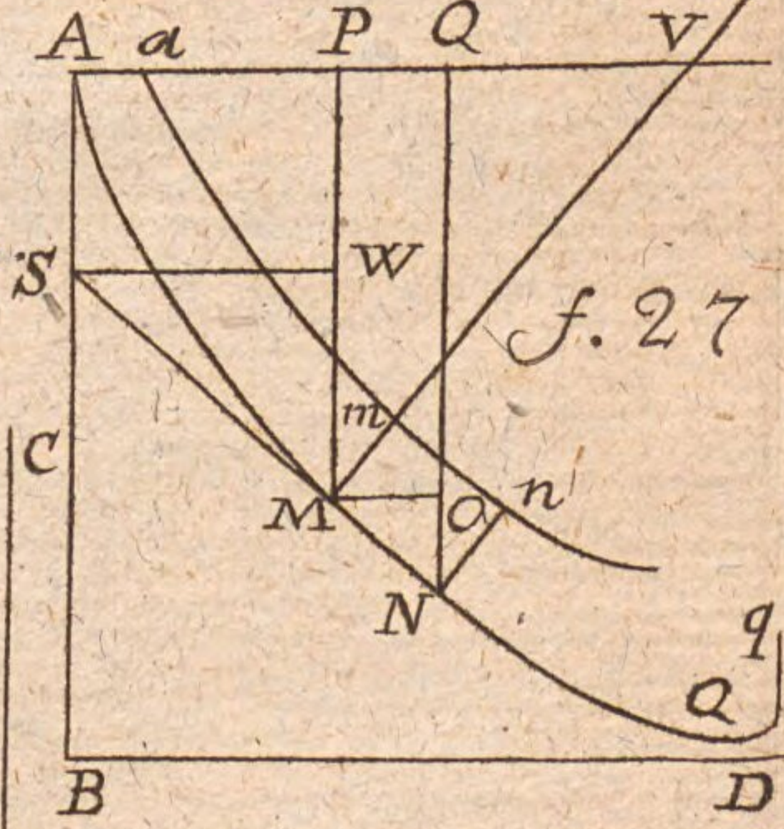
f. 24



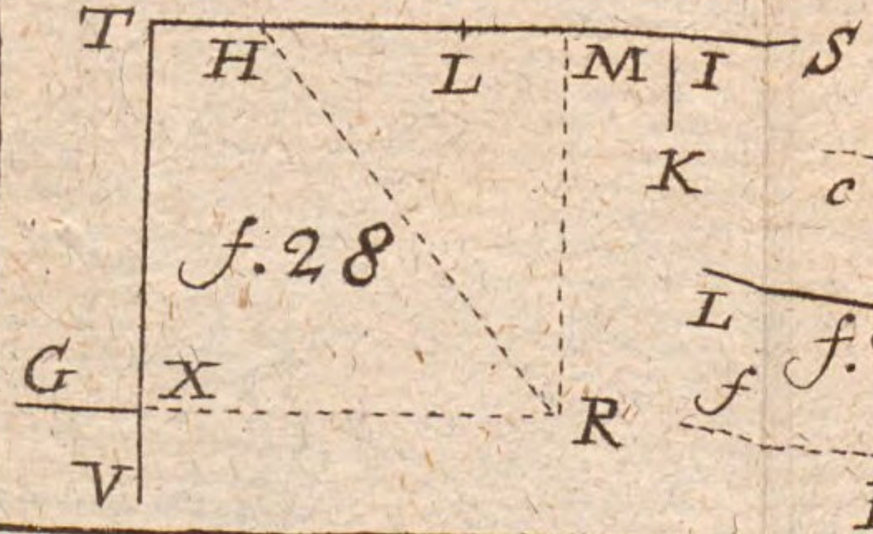
f. 26



f. 27



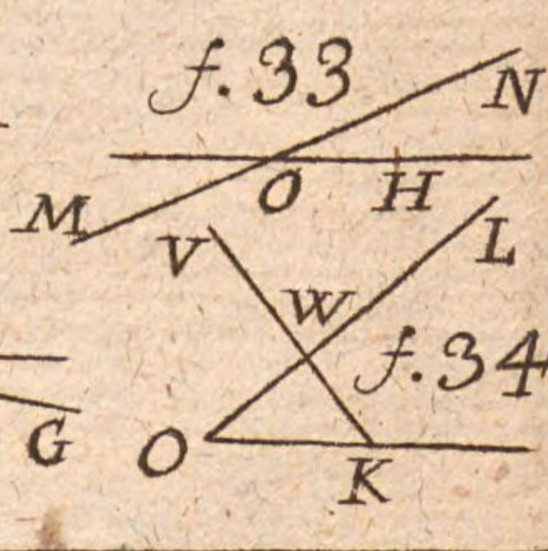
f. 28



f. 29

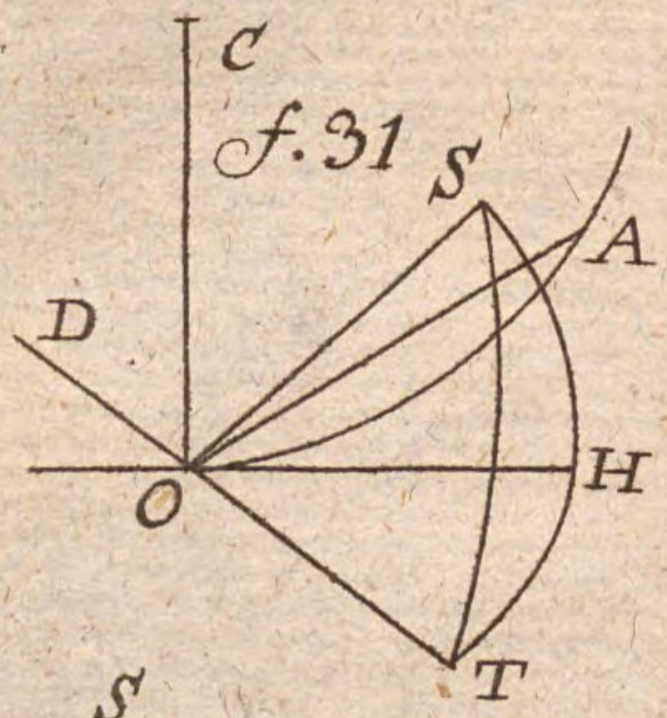
f. 30

f. 33

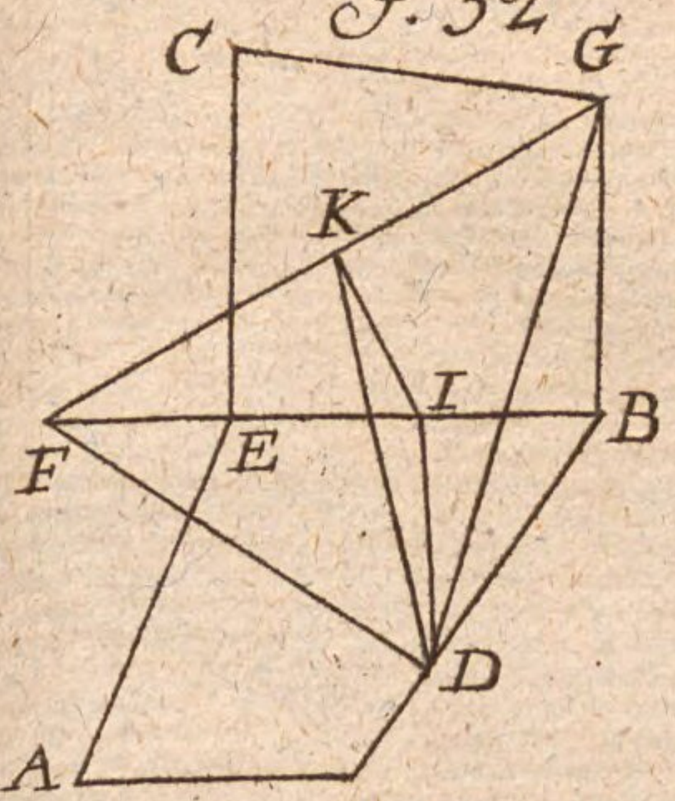


f. 34

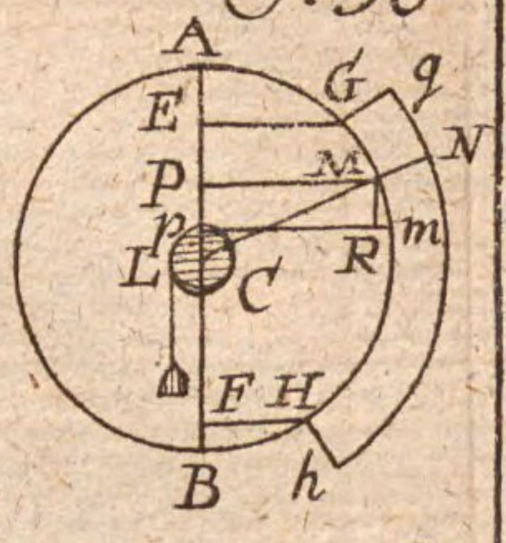
f. 31



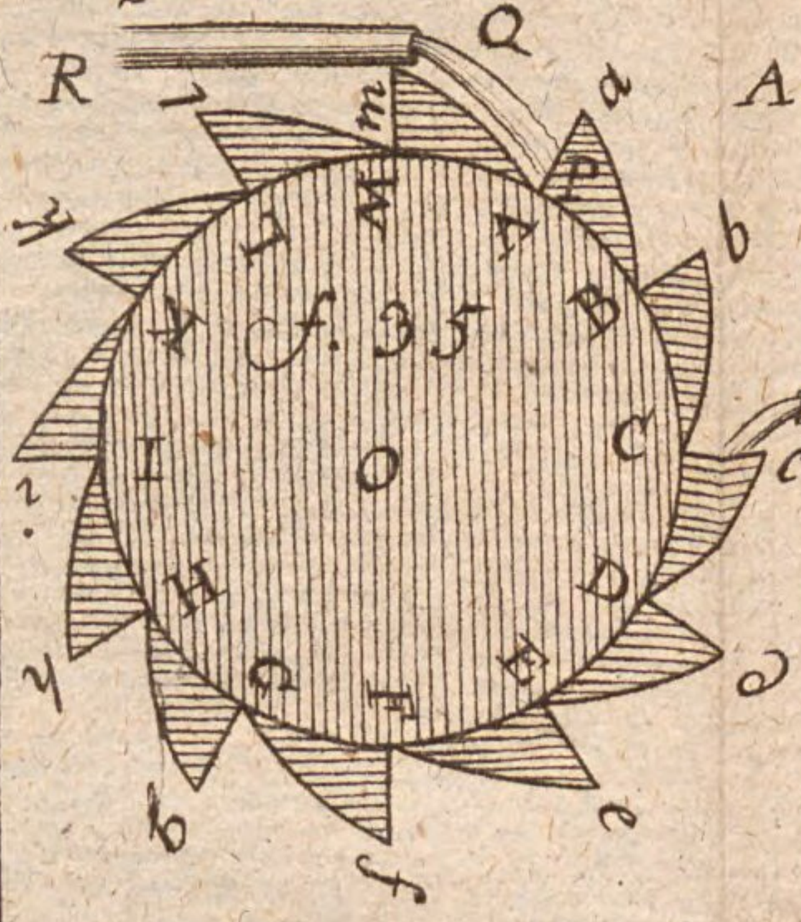
f. 32



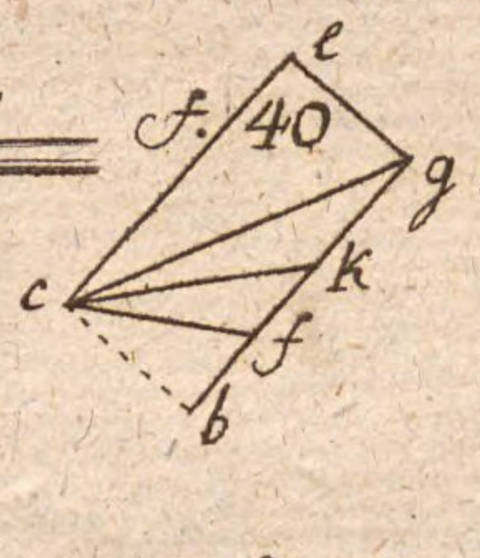
f. 36



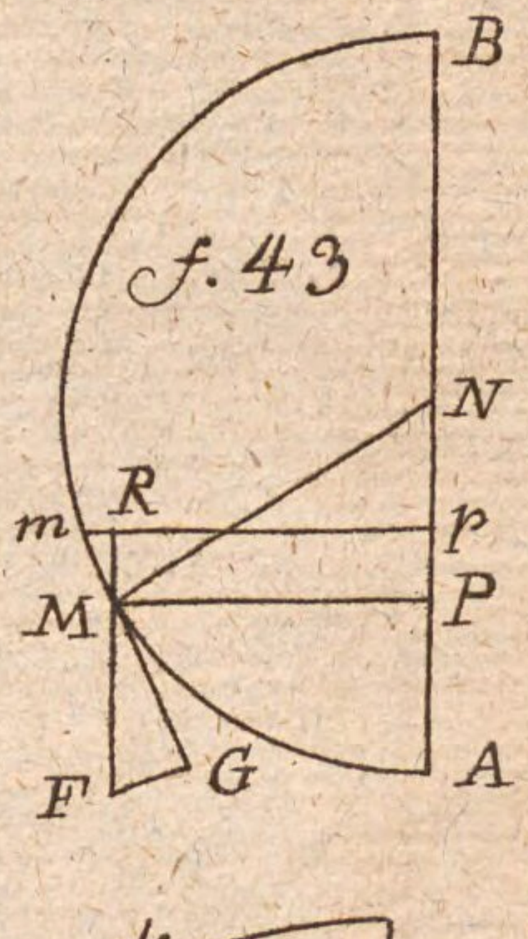
f. 35



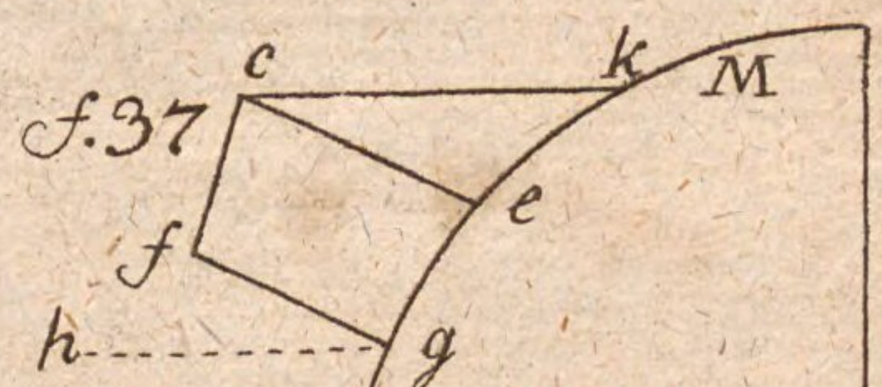
f. 40



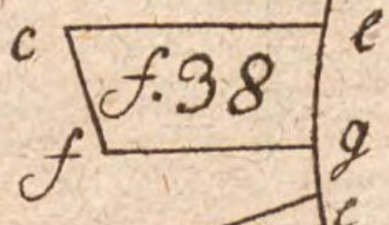
f. 43



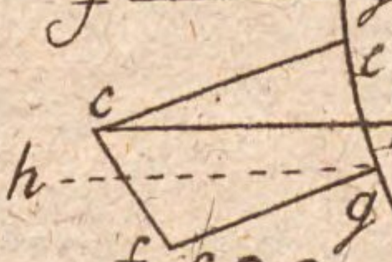
f. 37



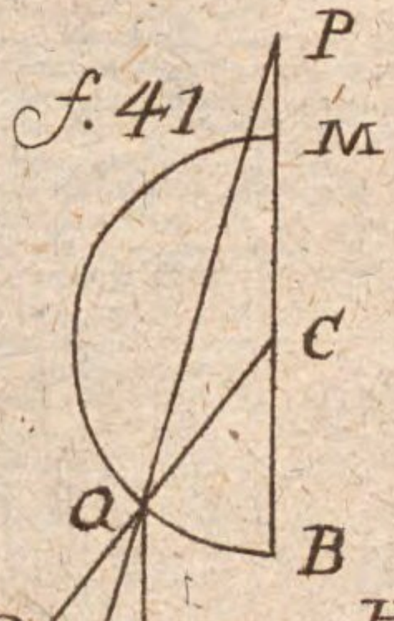
f. 38



f. 39



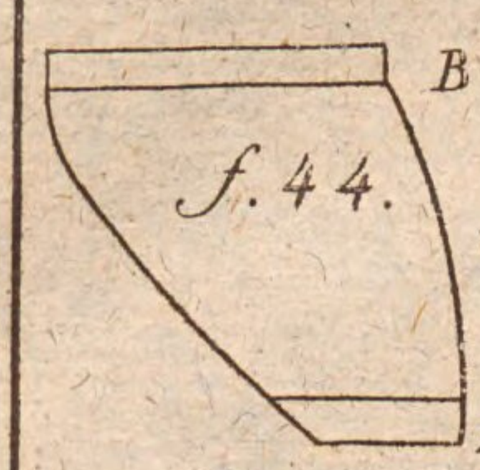
f. 41

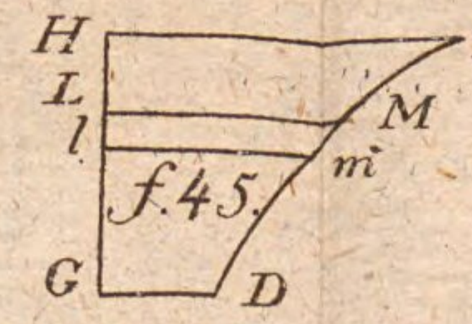


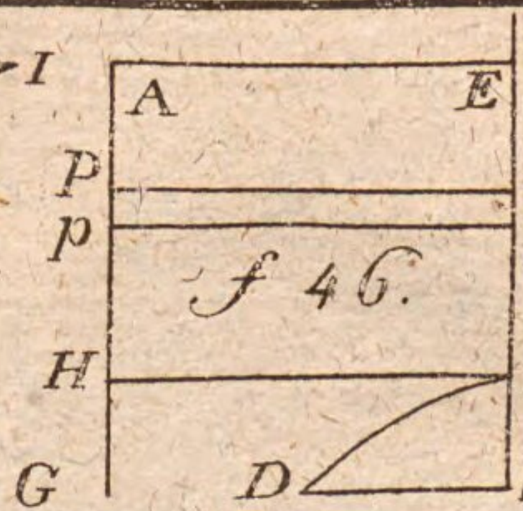
f. 42

C
K
G
H
F
B

Tab. V.

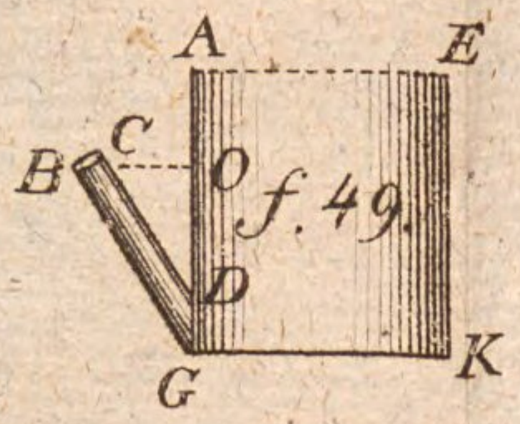

B
f. 44.
A

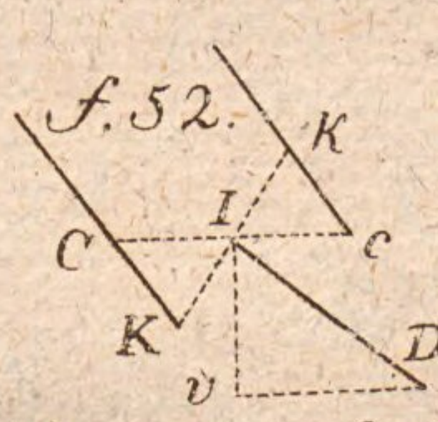

H
I
L
M
l
m
f. 45.
G
D


A
E
P
Q
p
q
f 46.
H
I
G
D
K

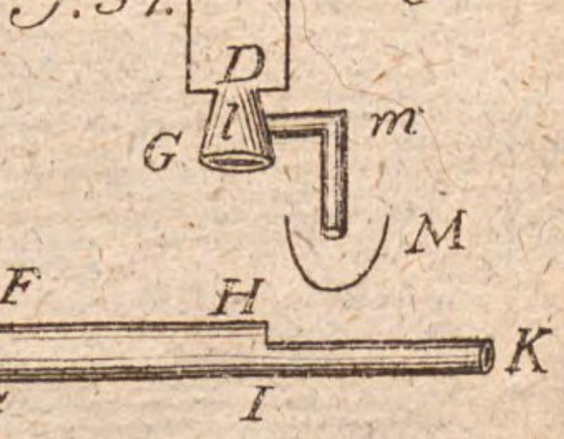
A
E
f
48.
G
D
K
M
L
N

A
E
f. 47
GD
K
O
B
C

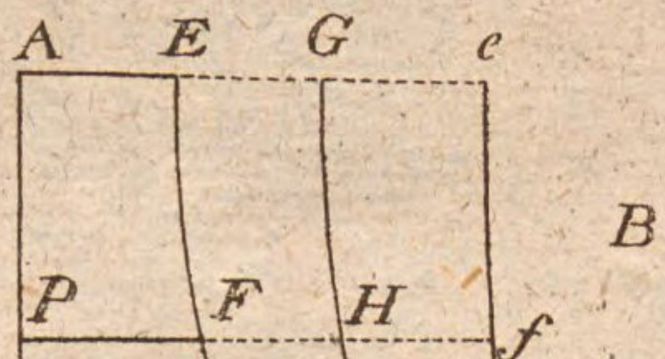

A
E
B
C
O
f. 49.
D
G
K

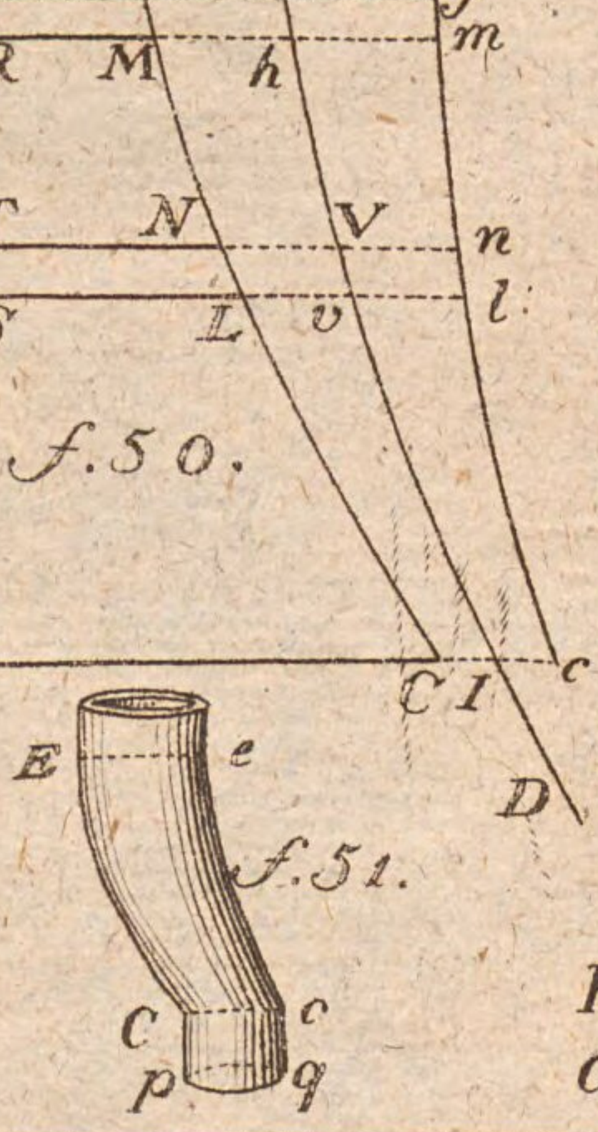

f. 52.
K
I
C
c
K
D
v

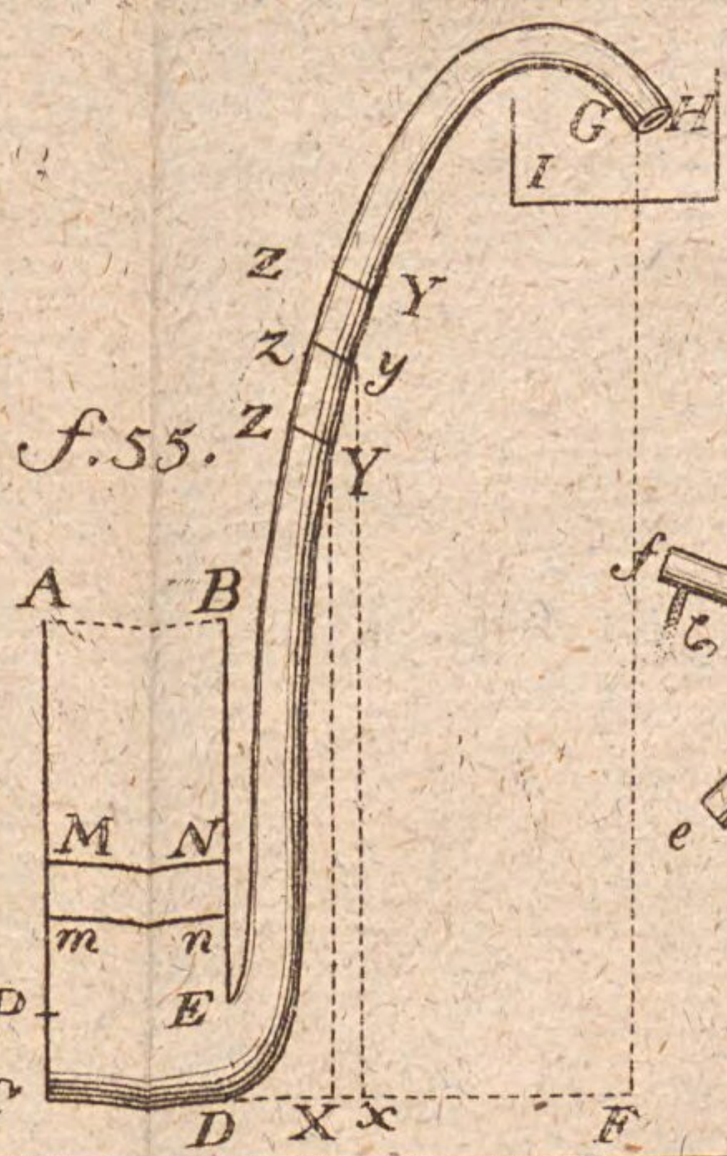
S
E
c
R
f
53
A
B
F
f
C
c

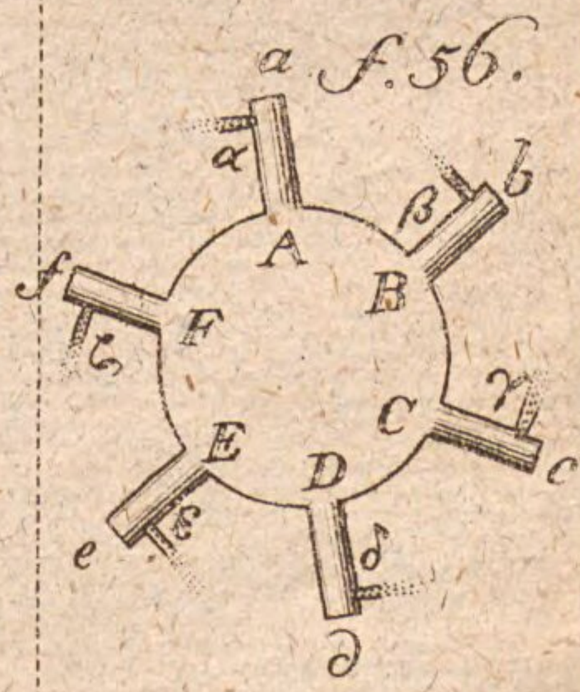

f. 57.
D
G
l
m
M

A
D
L
M
f. 54.
C
F
H
B
K
E
G
I


A
E
G
c
P
F
H
f
m
R
M
h
T
N
V
n
l
S
L
v
f. 50.
C
I
c


E
e
f. 51.
C
c
p
q


G
H
I
z
Y
z
y
z
Y
f. 55.
A
B
D
M
N
m
n
P
E
C
D
X
x
F

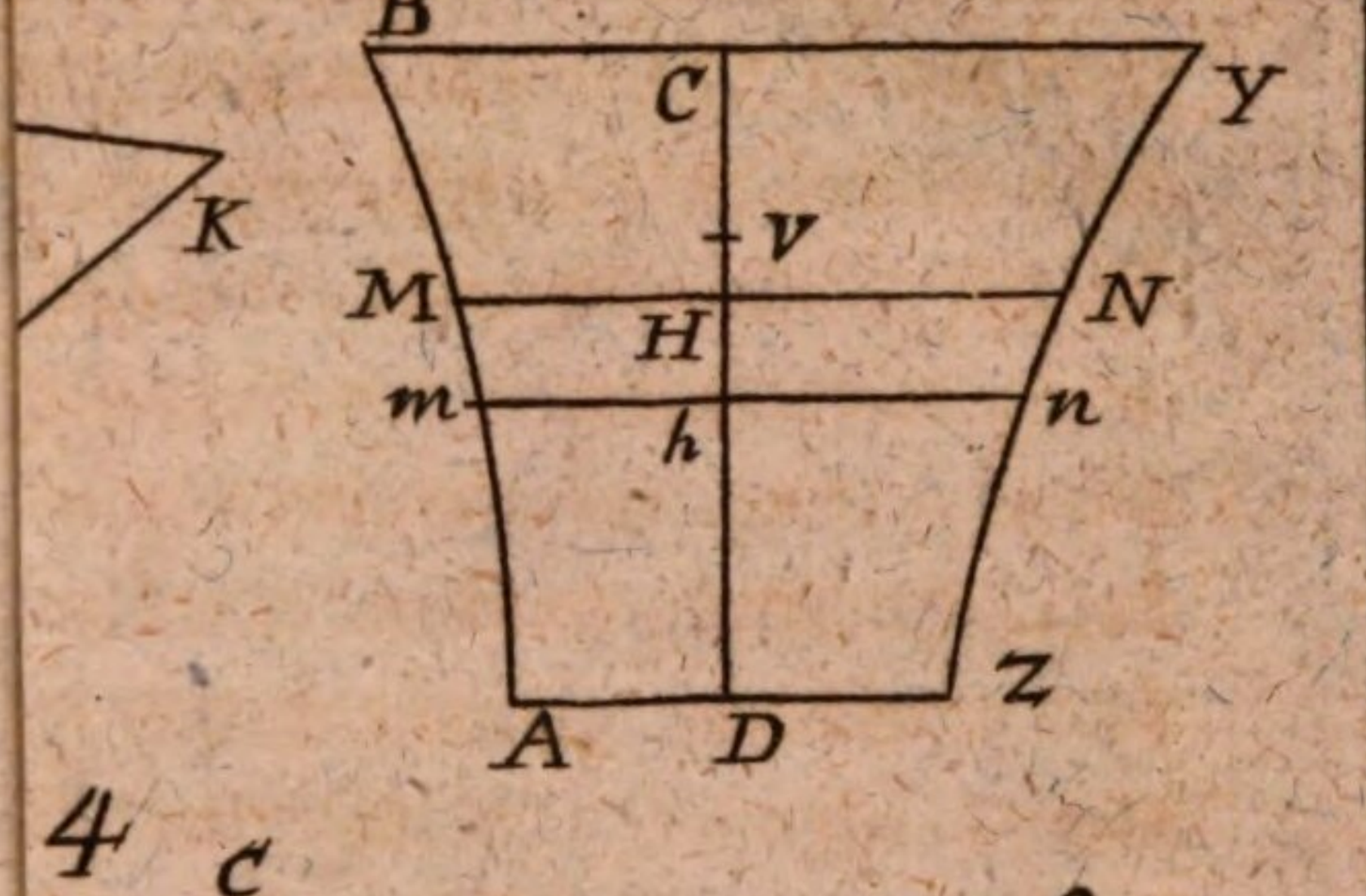

a
f. 56.
α
b
β
A
f
B
F
ζ
C
γ
c
E
D
e
ε
δ
∂

Herr Franz Zallinger, Prof. d. Math. zu Insbruck: Von der Anzahl der Schaufeln bey unterschlächtigen Wasserrädern. Theoretiker geben die Vorschrift: In dem Augenblicke, da eine Schaufel vertical steht, soll die, welche ihr zunächst ins Wasser kommen wird, die Oberfläche des Wassers nur berühren, damit sie kein Wasser auffängt, das auf die verticale stossen will. In der Ausübung werden gewöhnlich mehr Schaufeln gemacht. Dafür meynt Hr. Z. liesse sich auch etwas sagen. Es könnten aber auch Umstände vorkommen, die sich auf keine Theorie oder Berechnung bringen lassen, z E. daß mehr Schaufeln, Kosten und Gewicht des Rades vermehren, also auch Reiben. Es liessen sich wohl bey einem und demselben Rade, weniger oder mehr Schaufeln anbringen, und die Folgen vergleichen. So überlässt Hr. Z. bey dieser Frage noch Manches der Erfahrung.

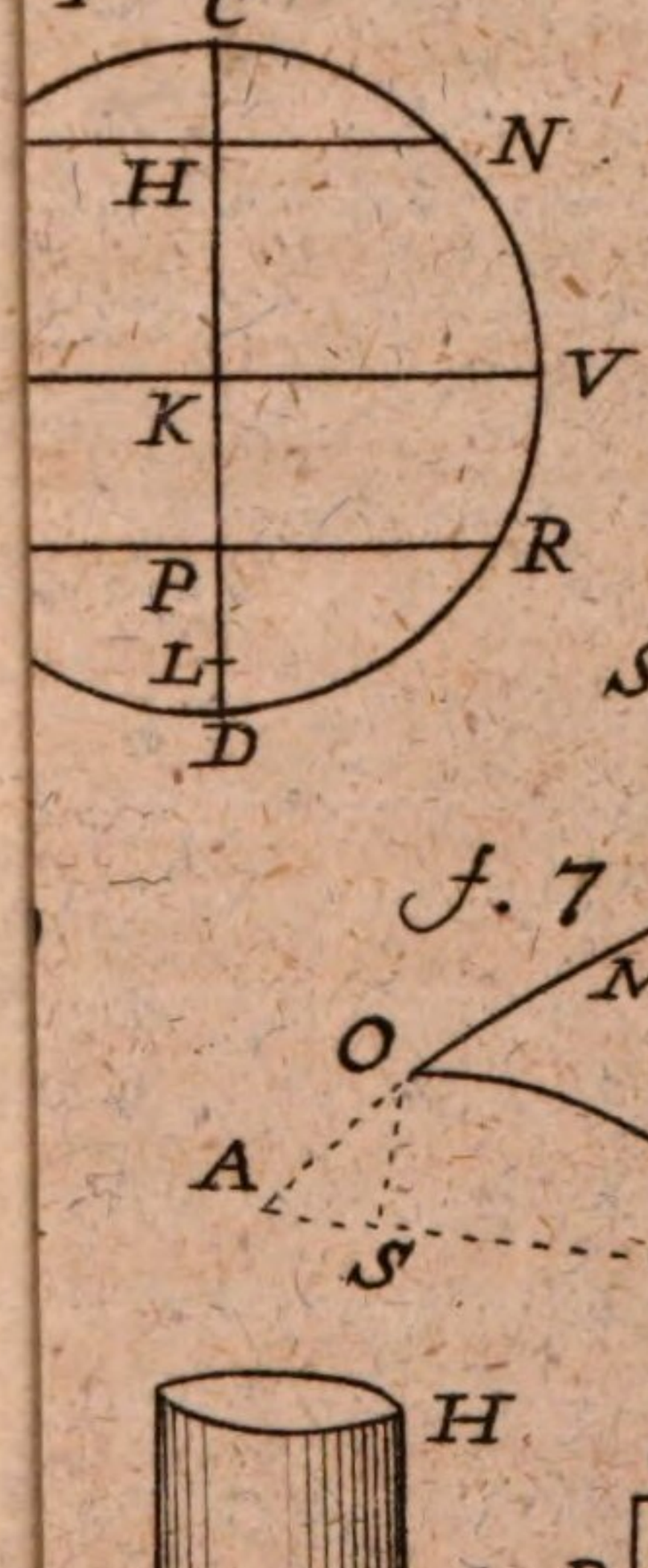
Ein andrer Aufsatz von ihm 431. S. prüft ein angegebenes Schöpfrad. Um des Rades horizontaler Welle, sind in der Fläche senkrecht auf sie, hohle Fächer, wie durch Halbmesser begränzt; Jedes hat am Rande eine Schaufel, die schöpft Wasser, und beym Umgehen des Rades, kömmt jedes Fach über die Horizontallinie, und giesst sein Wasser in eine Rinne aus. Hr Z. berechnet, die Maschine erfodere grössere Geschwindigkeit des Wassers, als Flüsse gewöhnlich haben, und schlägt Verbesserung vor.

Tab. I.

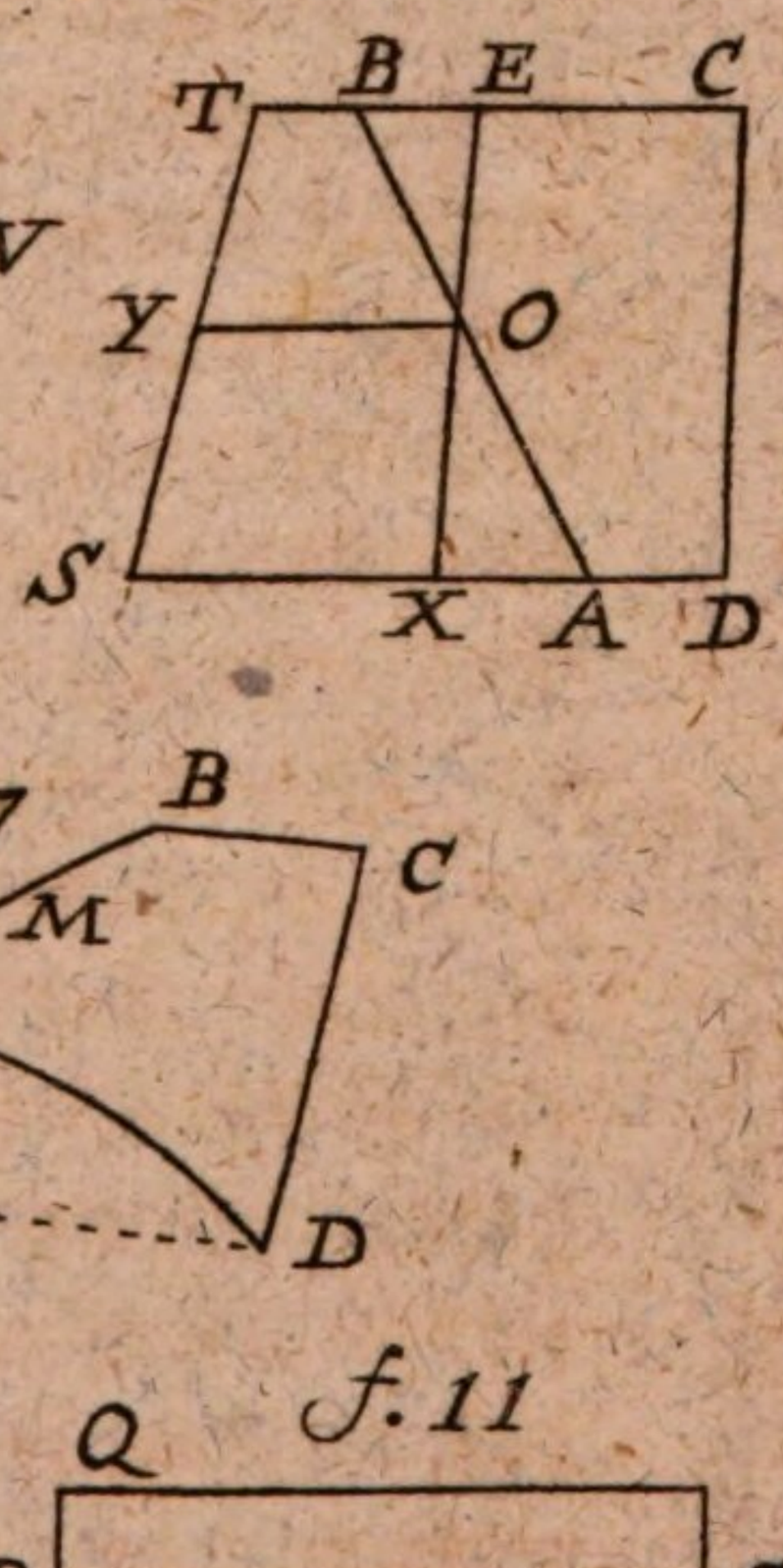
f. 2



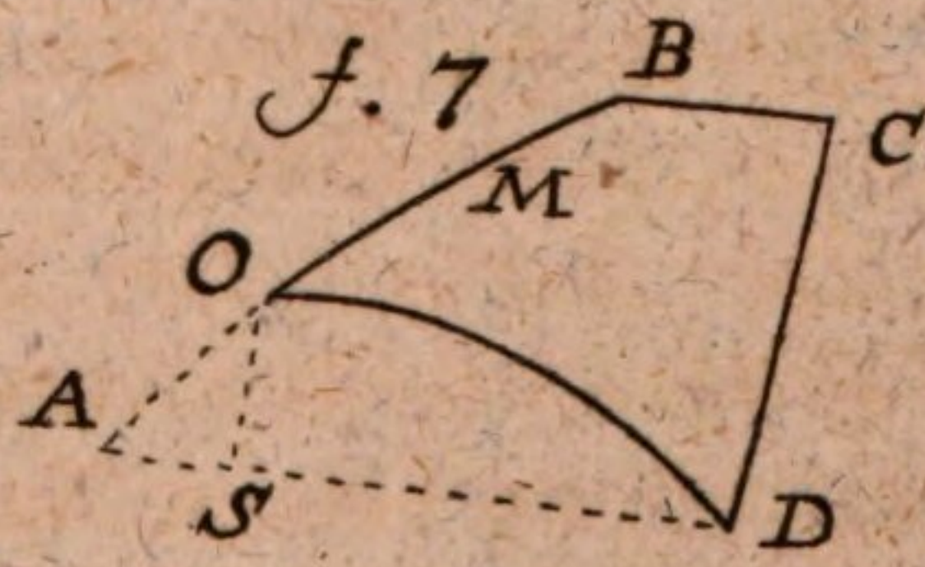
4



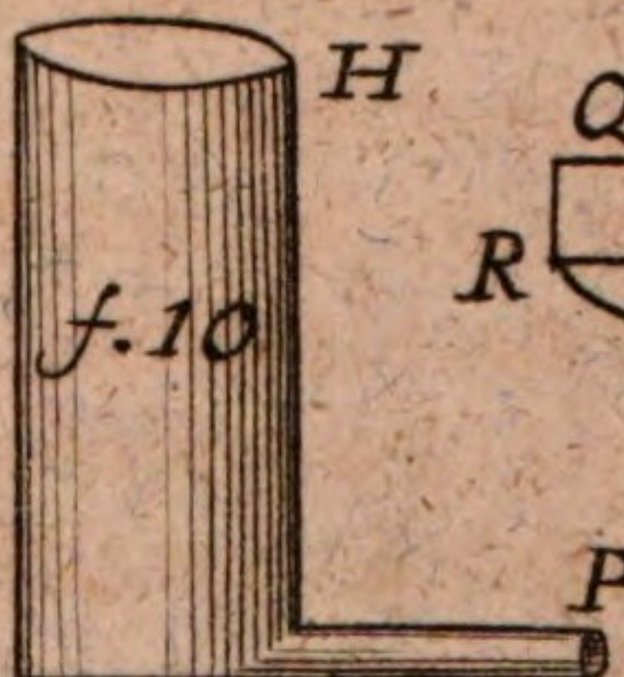
f. 5



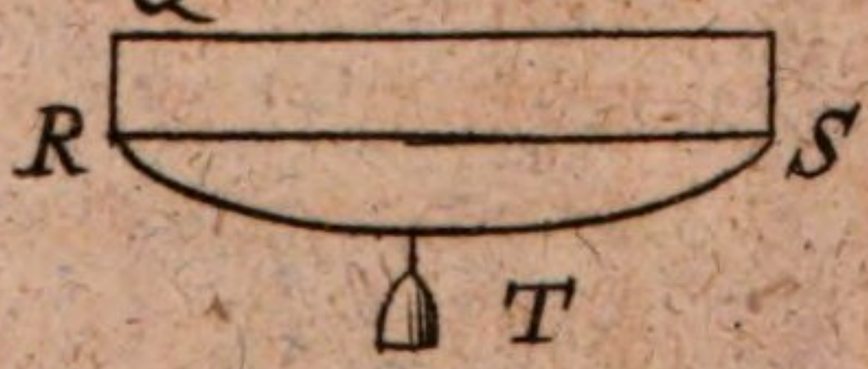
f. 7



f. 10



f. 11



5.2.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf, 1719-1800

Mathematische Anfangsgründe

Bd.: 4,2

Göttingen 1797

Math.u. 80-4,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594000-5
VD18 8036778X-001